

Зачема 19

Монотонність, опуклість
Екстремуми
Дослідження функції та побудова
графіка.

Дослідження функції:

- 1) Визначити D_f , періодичність, парність/непарність, точки перегибу $f(t)$ з осей, інтервали знако-
постійності, ~~екстремуми~~ точки розриву та інтервали
неперервності
- 2) знайти асимптоти
- 3) знайти інтервали монотонності та екстремуми
- 4) знайти інтервали опуклості, точки перегибу
- 5) побудувати графік $f(t)$.

N128 а) Дослідити на монотон.
 $f(x) = 3x^3 + 3x^2 + 3x, \quad x \in \mathbb{R}$

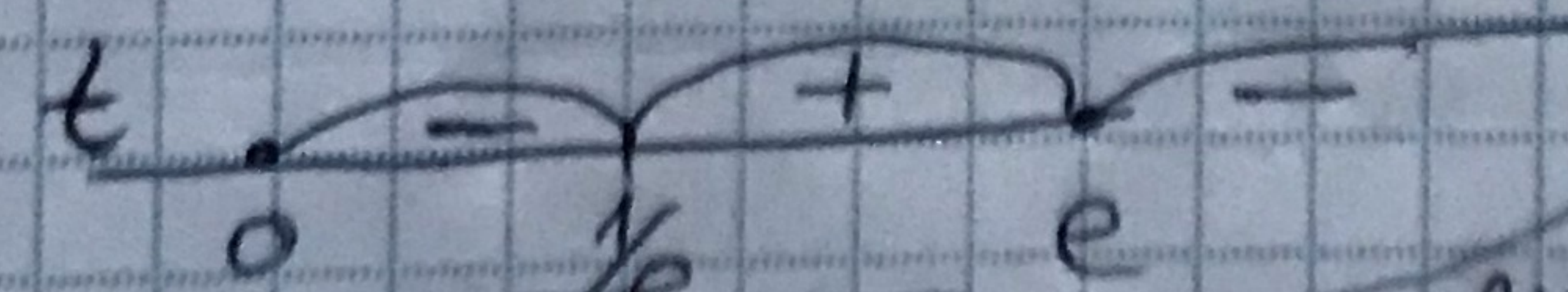
Розв'язок. $f'(x) = 9x^2 + 6x + 3 = 0$
 $3x^2 + 2x + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \quad \forall x$
 $\Rightarrow f$ — монот. зростає на X .

N129 б) Досл. на монотон.
 $x(t) = t \ln t, \quad y(t) = \frac{\ln t}{t}, \quad t > 0$

Розв'язок. $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{1 - \ln t}{t^2} : (\ln t + 1) =$
 $= \frac{1 - \ln t}{t^2(1 + \ln t)}$

$1 - \ln t = 0 \Rightarrow t_1 = e; \quad t^2 = 0 \Rightarrow t_2 = 0; \quad 1 + \ln t = 0 \Rightarrow$
 $t_3 = \frac{1}{e}$

~~y'_x~~ y'_x : 
 $t_1 = e \Leftrightarrow x_1 = e, \quad (t_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0), \quad t_3 = \frac{1}{e} \Leftrightarrow x_3 = -\frac{1}{e}$

$\Rightarrow$ про $x \in (-\frac{1}{e}, 0)$
 $x \in (-\frac{1}{e}, e)$
 $x \in (e, +\infty)$

~~$x'(t)$~~ $x'(t) = 1 + \ln t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{e}$ — локал.
мінімум $x(t)$
 $x \in (-\frac{1}{e}, 0)$
 $x \in (-\frac{1}{e}, e)$
 $x \in (e, +\infty)$

N130 m)

Знайти екстремуми функції f
 $f(x) = x + |\sin 2x|$

Розв'язок.

Шукаємо точки, в яких $f'(x) = 0$
 або неіснують (але існують ($\sin 2x = 0$))

$$f'(x) = 1 + 2\cos 2x \cdot \operatorname{sgn}(\sin 2x) \oplus, \sin 2x \neq 0, \\ 2x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, x \neq \frac{k\pi}{2}$$

$$= \begin{cases} 1 + 2\cos 2x, & \text{якщо } x \in (k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}) \\ 1 - 2\cos 2x, & \text{якщо } x \in (k\pi + \frac{\pi}{2}, (k+1)\pi), k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$1 + 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = -\frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k \quad "+" \rightarrow "-" \Rightarrow \underline{\text{max}}$$

$$1 - 2\cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k \Rightarrow \\ \Rightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi k \quad "+" \rightarrow "-" \Rightarrow \underline{\text{max}}$$

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \quad \underline{\text{min}}$$

N132 d)

Знайти екстремуми $y(x)$
 $x = t^2 + t + 1, y = t^2 - t + 1$

Розв'язок.

Спочатку розглянемо $x(t)$ та $y(t)$,

$$x'(t) = 2t + 1 \Rightarrow x(t) \text{ при } t < -\frac{1}{2} \text{ спадає,}$$

$$\text{при } t > -\frac{1}{2} \text{ зростає}$$

$$y'(t) = 2t - 1 \Rightarrow y(t) \text{ при } t < \frac{1}{2} \text{ спадає,}$$

$$\text{при } t > \frac{1}{2} \text{ зростає}$$

$$y'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{2t - 1}{2t + 1}$$

$$y'_x: \begin{array}{c} + \quad - \quad + \\ \hline -\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \end{array} \Rightarrow t_1 = -\frac{1}{2} \text{ - лок. max} \\ t_2 = \frac{1}{2} \text{ - лок. max}$$

$$t_1 = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{4}, y_{\max} = \frac{7}{4}$$

$$t_2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{7}{4}, y_{\min} = \frac{3}{4}$$

N 133 e) Знайти найбільше та найменше значення f на мн-і: A . Якщо вони не існують, тоді знайти $\sup$ та $\inf$

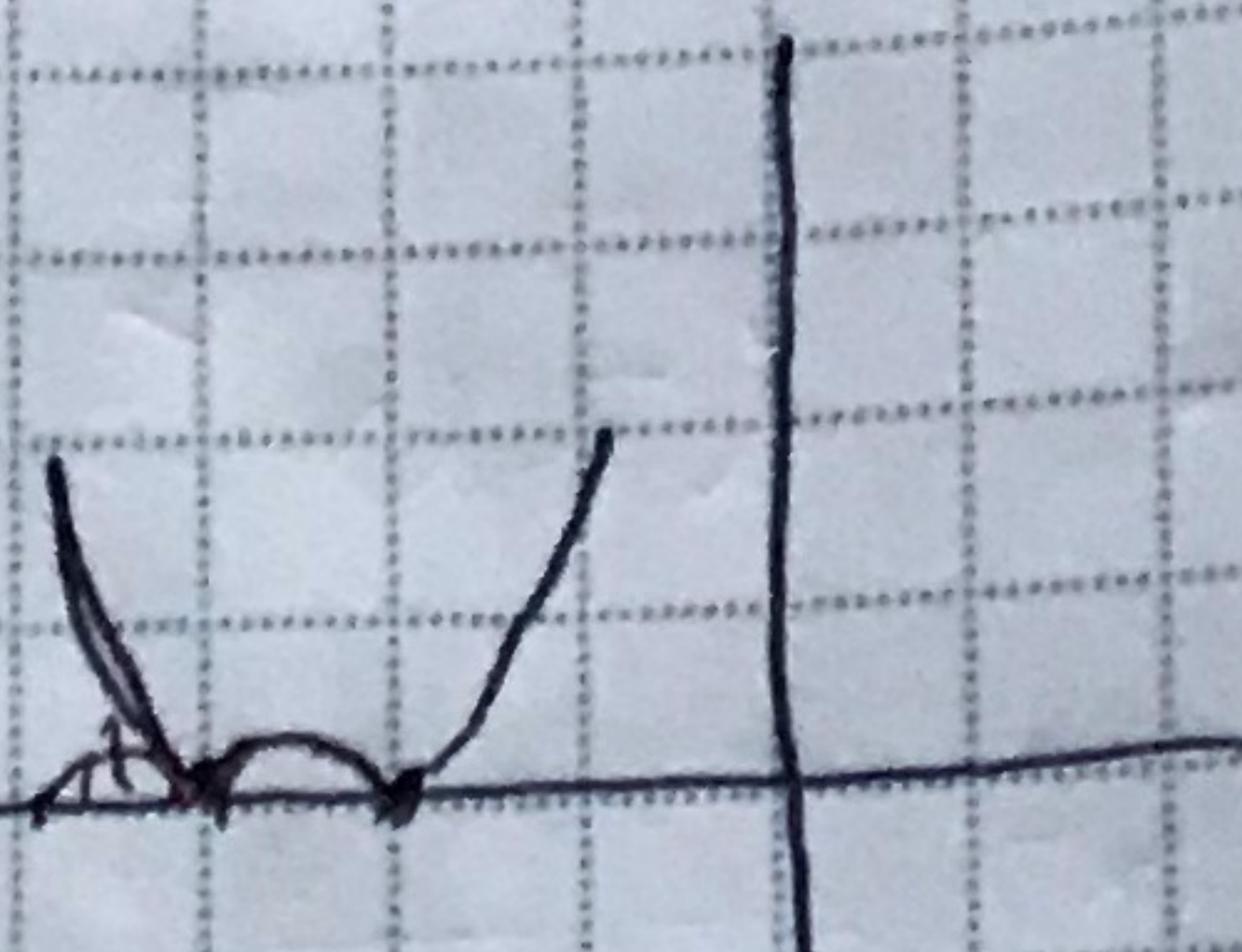
d) $f(x) = |x^2 + 5x + 6|$, $A = [-10, 10]$

Розв'язок. Розглянемо нерівність: $x^2 + 5x + 6 \leq 0$
 $\Delta = 25 - 24 = 1$, $x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} = -3; -2;$

$\Rightarrow$ Найменше значення $y = 0$
 в точках $x_{1,2}$.

Найбільшого не існує ($+\infty$)

Локальний мах: $f'(x) = (x^2 + 5x + 6)' = 2x + 5 = 0$
 $\Rightarrow x = -2.5$
 — це є найбільшим значенням.



N 135 a) Довести нерівність: $e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}$, $x > 0$

Цією $f(x) = e^x$, $g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}$

~~1) $x > 0$:~~ $f'(x) = e^x$, $g'(x) = 1 + x$

$f''(x) = e^x$, $g''(x) = 1$

~~1) $x > 0$:~~

~~Згідно N 134~~

Отже, що $f''(x) > g''(x)$ при $x > 0$

$f'(0) = g'(0) = 1$

$f(0) = g(0) = 1$

$\Rightarrow$ Згідно задачі N 134 a) $\Rightarrow f(x) > g(x)$ при $x > 0$

$\Rightarrow e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad \forall x > 0$

N 138 b) Дослідити характер опуклості f на A
 знайти точки перегибу
 $f(x) = x(x+1)(x+2)$, $A = \mathbb{R}$

Розв'язок. x_0 — точка перегибу, якщо

1) $\exists$ проміжок в σ $(x_0, H(x_0))$

2) в σ x_0 змінюється опуклість

$f'(x) = (x^3 + 3x^2 + 2x)' = 3x^2 + 6x + 2$

$f''(x) = 6x + 6 = 0 \Rightarrow x = -1$ — точка перегибу

при $x < -1$ $f''(x) < 0$ $\cap$

при $x > -1$ $f''(x) > 0$ $\cup$

— опукла вгору

— опукла вниз

N 139 б)

Доказать, что функция в области
выражения $y(x): x = t^2, y = 3t + t^3$.

Решение. $x = \varphi(t) = t^2, y = \psi(t) = 3t + t^3$.

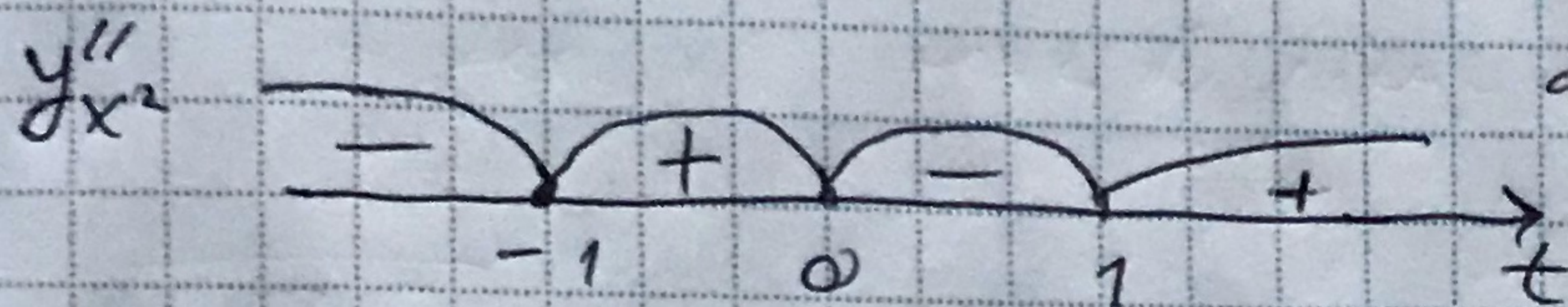
$E_\varphi = [0, +\infty) \Rightarrow D_f = [0, +\infty) (y = f(x))$.

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{3 + 3t^2}{2t} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1+t^2}{t}$$

$$y''_{x^2} = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{1+t^2}{t} \right)' \cdot \frac{1}{2t} = \frac{3}{4t} \cdot \frac{2t^2 - (1+t^2)}{t^2} = \frac{3(t^2-1)}{4t^3}$$

$$y''_{x^2} = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \pm 1 - \text{точки перегиба}$$

$t_3 = 0$ - точка, в которой функция $y(x)$ может
замкнуть окружность, а не быть точкой перегиба



$$t_1 = -1 \leftrightarrow x_1 = 1, y_1 = -4$$

$$t_2 = 1 \leftrightarrow x_2 = 1, y_2 = 4$$

$$t_3 = 0 \leftrightarrow x_3 = 0, y_3 = 0$$

$$t \in (-\infty, -1) \leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

$$t \in (-1, 0) \leftrightarrow x \in (0, 1)$$

$$t \in (0, 1) \leftrightarrow x \in (0, 1)$$

$$t \in (1, +\infty) \leftrightarrow x \in (1, +\infty)$$

$\Gamma(f)$ $\cap$ - огибающая
 $\Gamma(f)$ $\cup$ - f-огибающая
 $\Gamma(f)$ $\cap$ - f-огибающая
 $\Gamma(f)$ $\cup$ - f-огибающая

N 142 а) Доказать неравенство:

$$2) \frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x+y}{2} \right)^n, \text{ где } x > 0, y > 0, n > 1$$

$$f(x) = x^n, f'(x) = nx^{n-1}, f''(x) = n(n-1)x^{n-2} > 0 \text{ при } x > 0$$

$\Rightarrow f$ - огибающая вогнутая $\cup$

$$\Rightarrow \forall x, y > 0 \forall \lambda \in [0, 1] f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}: f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \Rightarrow$$

$$\left(\frac{x+y}{2} \right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}$$

$$2) \frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}, \text{ где } x > 0, y > 0$$

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln y + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) - \frac{1}{x+y}$$

$$\ln\left(\frac{x+y}{2}\right) + \frac{1}{2} \frac{x+y}{x+y} \geq \frac{1}{2} \left(\ln x + \frac{1}{2x} \right) + \frac{1}{2} \left(\ln y + \frac{1}{2y} \right)$$

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{2x}, f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2}, f''(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} = \frac{1-x}{x^3} < 0$$

при $x > 1$ $\Rightarrow f$ - огибающая вогнутая $\Rightarrow$ неравенство выполняется

N146 a)

Знайти асимптоти графіка функції: $y = y(x)$
 $x = \frac{t}{(t^2-1)(t+2)}$, $y = \frac{t^2}{(t+1)^2(t+2)}$

Розв'язок. Якщо при $t \rightarrow t_0$ $x(t) \rightarrow \infty$, $y(t) \rightarrow A \Rightarrow$ гориз. асимптота

$x(t) \rightarrow a$, $y(t) \rightarrow \infty$ — верт. асимптота,

$x(t) \rightarrow \infty$ та $y(t) \rightarrow \infty \Rightarrow$ може бути похила асимптота

1) $x = x(t)$ $t_1 = \pm 1$, $t_3 = -2$ — верт. асимптоти
 т.ч. $x(t)$

2) $y = y(t)$ $t_4 = -1$, $t_5 = -2$ — верт. асимптоти
 для функції $y(t)$.

t	-2	-1	1	∞
x	∞	∞	∞	0
y	∞	∞	$\frac{1}{12}$	0

$\Rightarrow$ при $t = 1$ — горизонт. асимпт. $y = \frac{1}{12}$
 у функції $y(x)$

при $t = -2$ та $t = -1$ можливі похилі асимптоти.

$$t = -2: \lim_{t \rightarrow -2} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^2}{(t^2-1)(t+2)} \cdot \frac{(t^2-1)(t+2)}{t} = \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t(t-1)}{t+1} = -6$$

$$= \lim_{t \rightarrow -2} \frac{t^2}{(t+1)^2(t+2)} + \frac{6t}{(t^2-1)(t+2)} = \frac{1}{t+2} = \frac{1}{5}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u-2)^2}{(u-1)^2 u} + \frac{6(u-2)}{((u-2)^2-1) \cdot u}$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u-2)}{u} \left(\frac{u-2}{(u-1)^2} + \frac{6}{(u-2)^2-1} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u-2}{u} \left(\frac{u-2}{(u-1)^2} + \frac{6}{(u-3)(u-1)} \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u-2}{u(u-1)} \left(\frac{u-2}{u-1} + \frac{6}{u-3} \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2}{u} \left(\frac{u^2-5u+6+6u-6}{(u-1)(u-3)} \right)$$

$$= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2}{u} \frac{u^2+u}{3} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{2(u+1)}{3} = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$ похила асимптота $[y = kx + b = -6x + \frac{2}{3}]$

$$t = -1: \lim_{t \rightarrow -1} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \rightarrow -1} \frac{t(t-1)}{t+1} = \infty$$

$\Rightarrow$ може бути похила асимптота при $t \rightarrow -1$.

Д/З N128 а) з), N129 а), N130 в), N132 в), N133 в)
 N135 в), N139 г), N142 п) 10), N146 д)