

Зачементи 18.

Застосування похідної

1. Правило Лопітала для невязн. $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$

Дано f та g - функц. в $O(x_0)$, $g'(x) \neq 0$ в $O(x_0)$

[якщо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ та $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow$

якщо $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ та $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$

2. Формула Тейлора

Нехай f - $(n-1)$ -раз гуд. в $O(x_0)$

то $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n)$

- локальні формули Тейлора

При $x_0 = 0$ $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n)$, $x \rightarrow 0$

- формули Маклорена

3. Достатня умова зрост.

Нехай f - гуд., $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) $\Rightarrow$
 f - зрост. (f - спадке).

4. 1-а дост. умова екстремуму

Нехай $f \in C((a, b))$, має похідну в $O(x_0) \subset (a, b)$,

можливо, за визначенням самої точки x_0
 якщо при переході через x_0 похідна змінює
 знак $\Rightarrow f$ має в цій точці локальний
 екстремум:

min, якщо $"-" \Rightarrow "+"$
 max, якщо $"+" \Rightarrow "-"$

2-а дост. умова екстремуму

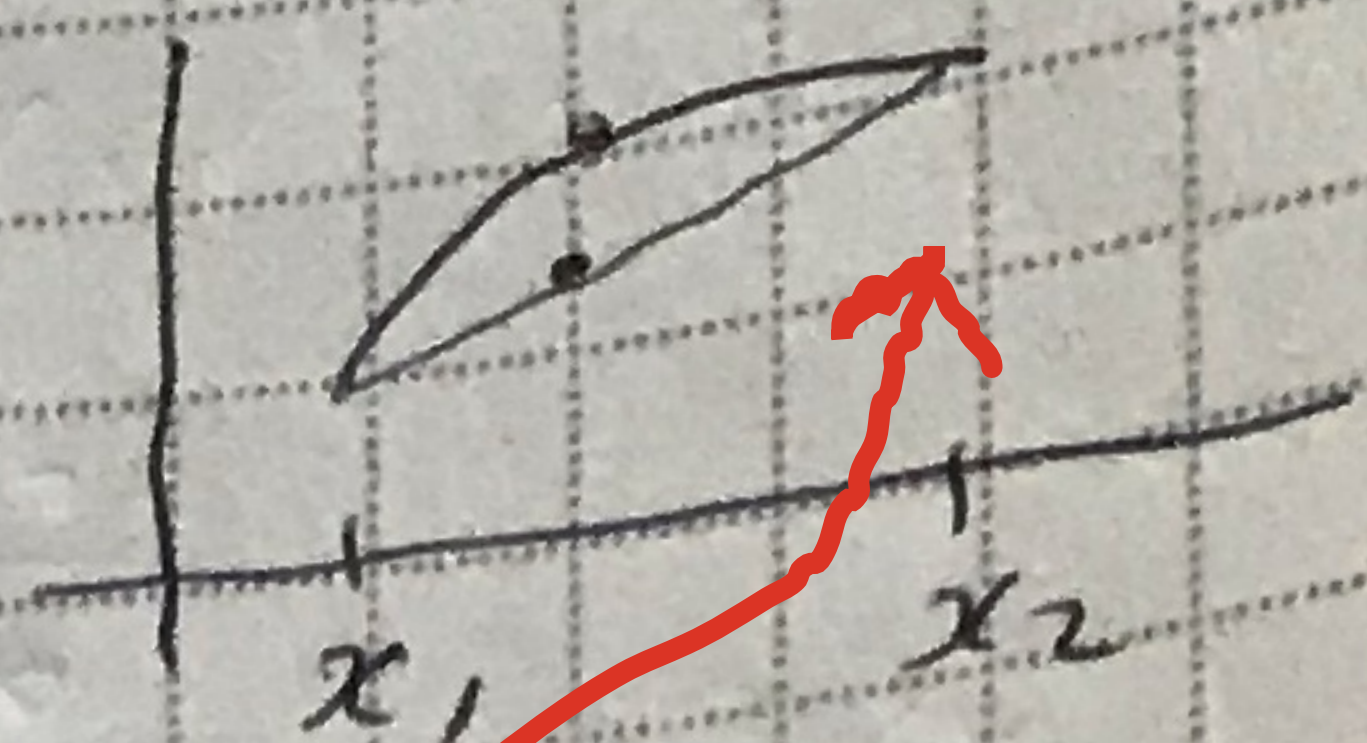
Нехай $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 - внутр. точка D . Нехай f - n -раз гуд.
 гуд. в x_0 , та $\forall k \in \{1, \dots, n-1\}$ $f^{(k)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,
 то при n -парному має локальний екстремум
 (max при $f^{(n)}(x_0) < 0$ та min при $f^{(n)}(x_0) > 0$)

5. Похідні асимптотично параболіч. функції

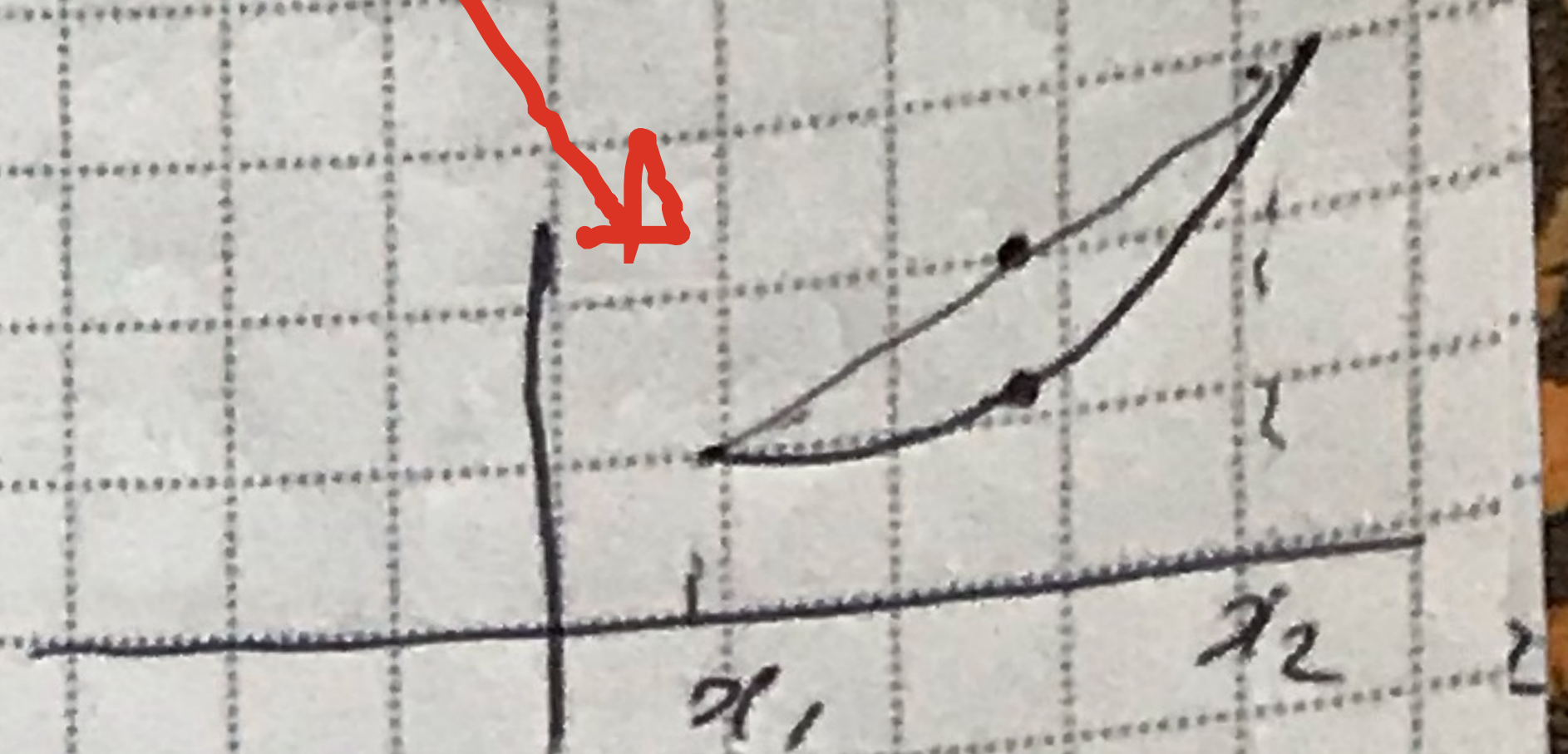
1) зв'язь $y = kx + b$ - похидна асимпт. при $x \rightarrow \infty$, $\Leftrightarrow$
 $\exists$ скінч. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = k$. $\Rightarrow b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$

2) параметр: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. $y = kx + b$ - похидна асимпт. $\Leftrightarrow$
 $\exists$ скінч. $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\psi(t)}{\varphi(t)} = k \Rightarrow b = \lim_{t \rightarrow t_0} (\psi(t) - k\varphi(t))$

6. f - опукла ~~функція~~ ^{вниз}, якщо
 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
 $\forall x_1, x_2 \in (a, b), \forall \lambda \in [0, 1]$



f - ~~вогнута~~ ^{вверх} ~~функція~~, якщо
 $f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$
 $\forall x_1, x_2 \in (a, b), \forall \lambda \in [0, 1]$



Якщо f має ~~грудку~~ ^{вогнуту} ~~корінь~~ ^{опуклу} $\Rightarrow$
 $(f - \text{вогнута}) \Leftrightarrow f''(x) > 0$
~~опукла~~

Тоді нерівність $\Rightarrow f''(x_0) \leq 0$.

N107 a)

Дано $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана формулою Маклорена
 по точкам нашої кривої $f(x) = \tan x$.

Розв'язок.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5), \quad x \rightarrow 0$$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)\right)^{-1} =$$

$$= \left(1+x\right)^{-1} = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{2(2-1) \dots (2-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) =$$

$$\Rightarrow (1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) \left(1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + o(x^5)\right) =$$

$$= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + x^5 \left(-\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120} + \frac{1}{9}\right) + o(x^5) =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5).$$

N107 b)

$f(x) = \arcsin x$

Розв'язок.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

$$\Rightarrow f'(x) = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right)(-x^2) + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)(-x^2)^2}{2} + o(x^4) =$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + o(x^4).$$

$$= f(0) + x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5) = \arcsin 0 = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

$$= x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + o(x^5)$$

N 108 б)

$f(x) = e^{2x-x^2}$
Записать формулу Маклорена при $x \rightarrow 0$

Решение.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$+ \frac{x^4}{4!}$$

N 108 а)

$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$, $n=5$

Решение.

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^5), x \rightarrow 0$$

$$- \frac{x^4}{4}$$

N 110 а)

Разложить по формуле Маклорена до x^5

$$f(x) = \sin e^x$$

Решение.

$$f(x) = \sin\left(1 + \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)\right)$$

$$= \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$= \sin 1 \cdot \cos\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) +$$

$$+ \cos 1 \cdot \sin\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right) =$$

$$= \sin 1 \cdot \left(1 - \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)^2 + \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^4 + o(x^5)\right) +$$

$$+ \cos 1 \cdot \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} - \frac{\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)\right)$$

$$= \sin 1 \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} + x^4 \left(-\frac{1}{8} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24}\right) + x^5 \left(-\frac{1}{24} + \frac{4}{2 \cdot 24}\right)\right) +$$

$$+ \cos 1 \cdot \left(x + \frac{x^2}{2} + x^3 \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + x^4 \left(\frac{1}{24} + \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{6}\right) + x^5 \left(\frac{1}{120} + \frac{3}{6} + \frac{1}{120}\right) + o(x^5)\right) =$$

N117 2)

Одзначим ε произвольно $\varepsilon \in (0, 10^{-5})$

Решение:

$$\sin 18^\circ = \sin \frac{\pi}{10}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}$$

$$R_{2n+1} = \frac{f^{(2n+1)}(\xi)}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

$$n=3$$

~~n=4~~

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + R_7$$

$$R_7 = \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} x^7$$

$$|R_7| \leq \frac{|f^{(7)}(\xi)|}{7!} |x^7| = \frac{|\sin^{(7)}(\xi)|}{7!} \cdot \frac{\pi^7}{10^7} \leq \frac{\pi^7}{7! 10^7}$$

$$\sin 18^\circ \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{6} \frac{\pi^3}{10^3} + \frac{1}{120} \frac{\pi^5}{10^5}$$

N120 a)

Зная что $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = 0$ и используя, мы можем
их использовать за год. уравнения лондона.

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x \sin \frac{1}{x} + x^2 \cos \frac{1}{x} \cdot (-\frac{1}{x^2})}{\cos x} \sim \frac{-\cos \frac{1}{x}}{\cos x}$$

~~Но $\cos \frac{1}{x}$ не имеет предела~~ не можем использовать правило лондона.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

N121 a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4) - (1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2})}{x^4}$$

$$= \frac{1}{24} - \frac{1}{8}$$

N121 2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}) = \infty - \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \sqrt[6]{1 + \frac{1}{x}} - x \sqrt[6]{1 - \frac{1}{x}}) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{1+y} - \sqrt[6]{1-y}}{y}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{1/6} - (1-y)^{1/6}}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{6}y + o(y) - (1 - \frac{1}{6}y + o(y))}{y} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

D/3 N107 4) 108 e) 110 a) 120 k) 121 d) 6) 3)