

Задача 17. Теорема Ролля, Лагранжа, Коші.

Т. Ролля. Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непер. на $[a, b]$ та гур. в $\forall$ точці інтервалу (a, b) . Якщо $f(a) = f(b)$, то існує $\tau \in (a, b) : f'(\tau) = 0$.

Т. Дарбу Якщо $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - гур. в $\forall$ точці $[a, b]$ та $f'_n(a) \cdot f'_n(b) < 0$, то існує така точка $\xi \in (a, b)$, що $f'(\xi) = 0$.

Наслідок 1 Якщо f - гур. в $\forall$ точці $[a, b]$, тоді її похідна приймає всі проміжні значення між $f'_n(a)$ та $f'_n(b)$.

Наслідок 2 Якщо f - гур. в $\forall$ точці $[a, b]$, тоді та $\forall x \in [a, b] f'(x) \neq 0$, то f' зберігає знак на $[a, b]$.

Т. Лагранжа Нехай $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ - непер. на $[a, b]$ та гур. в $\forall$ точці (a, b) . Тоді $\exists \xi \in (a, b) :$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$
 (формула Лагранжа)

Наслідок. $m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M$, де
 $m = \inf_{x \in (a, b)} f'(x), \quad M = \sup_{x \in (a, b)} f'(x)$

Т. Коші. Нехай $\{f, g\} \in C([a, b])$ та гур. на (a, b) . Тоді $\exists \xi \in (a, b) : (f(b) - f(a))g'(\xi) = (g(b) - g(a))f'(\xi)$.

Наслідок Якщо крім умов теор. Коші $\forall x \in (a, b) g'(x) \neq 0$, то

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \xi \in (a, b).$$

N 96 a) Довести твердження: Якщо $f \in C([a, b])$ ($[a, b] \subset \mathbb{R}$) має скінч. похідну в точках (a, b) та $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = C \in \mathbb{R}$,

то $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

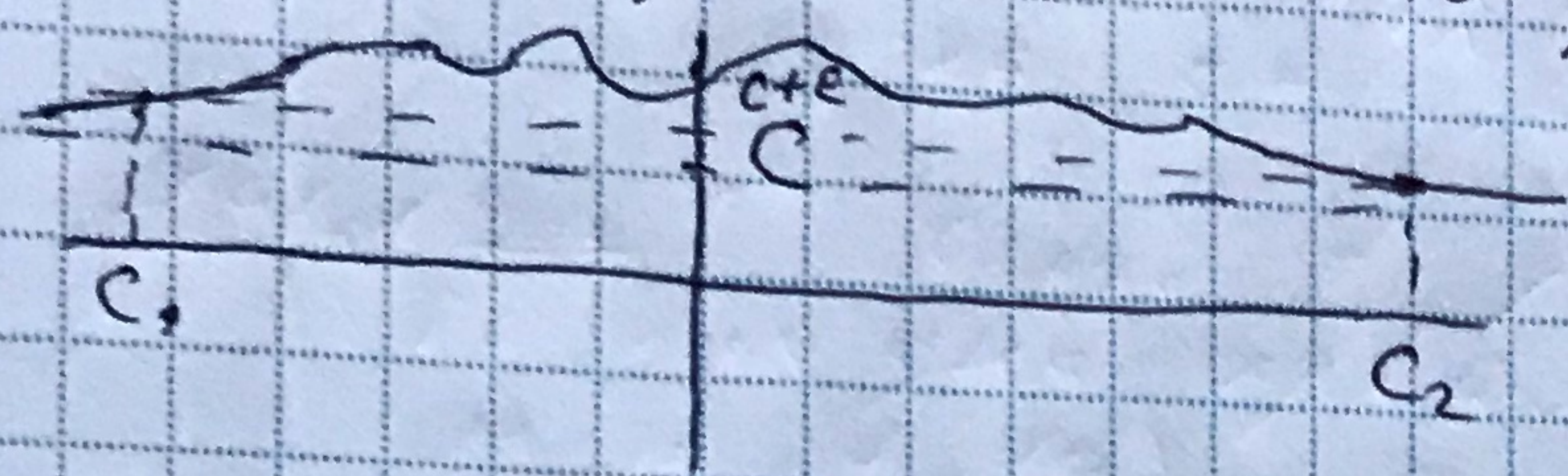
1) Нехай $[a, b] \subset \mathbb{R}$ (скінч.) та $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = C \in \mathbb{R}$

$C \in \text{const}$. Розв. φ -ізо $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in (a, b) \\ C, & x = a \text{ або } x = b \end{cases}$

$F \in C([a, b])$ - гур. в $\forall$ точці (a, b) , $F(a) = F(b) = C$.
 $\Rightarrow$ за теор. Ролля $\exists \xi \in (a, b) : f'(\xi) = 0$.

Нехай (a, b) - нескінченний інтервал

2) Ідея (9,6) - нескінченний інтервал, C-скінт.
 Оскільки $\forall x \in (a,b) \exists \text{ скінт. } f'(x) \Rightarrow$
 $\exists \varepsilon > 0$: або іррац. $y = C + \varepsilon$, або іррац.
 $y = C - \varepsilon$ перетинає графік функції
 $y = f(x)$ принаймні в двох точках c_1 та c_2



$\Rightarrow$ для f викон. всі
 умови т. Ролля на
 $[c_1, c_2] \Rightarrow$

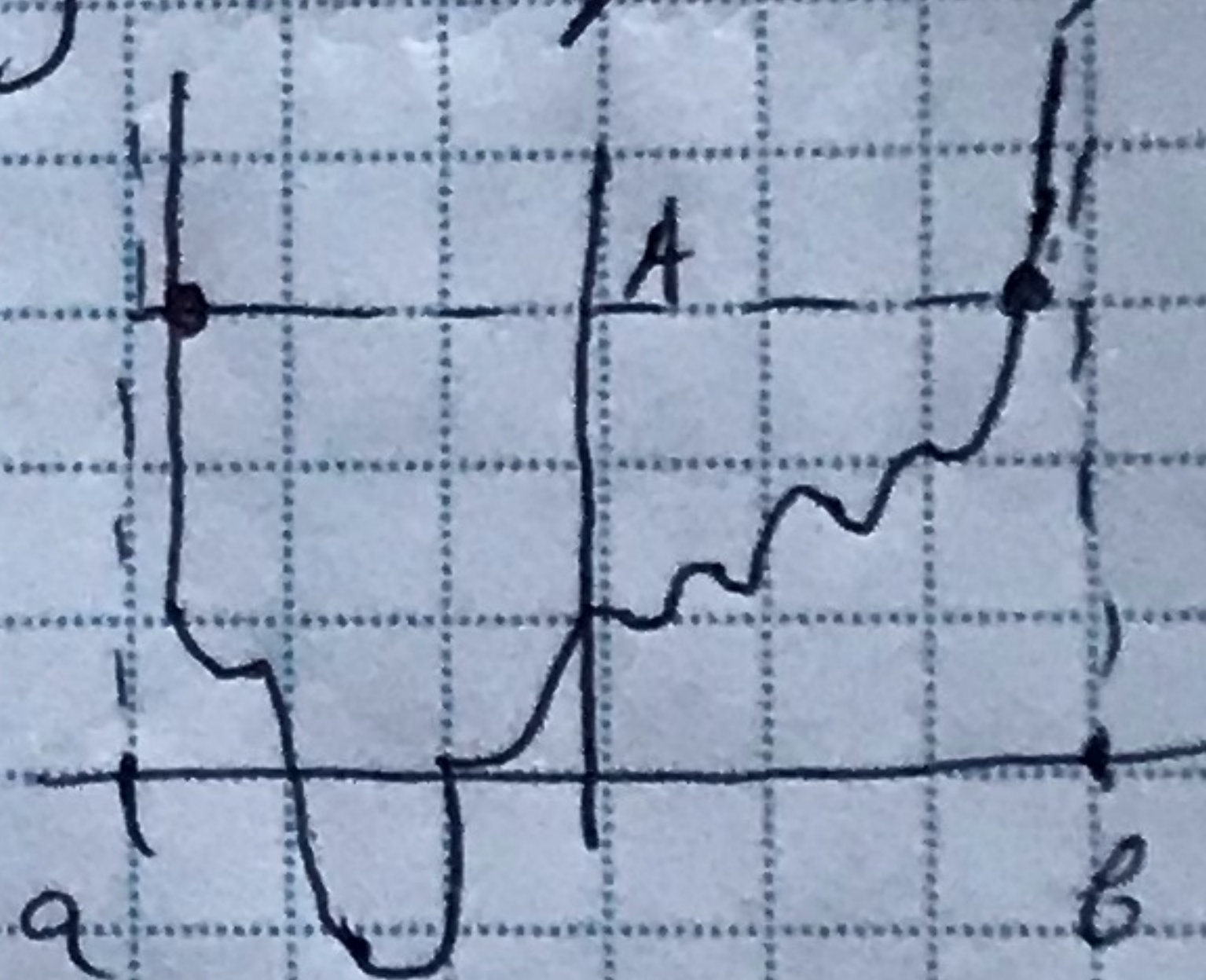
$$\Rightarrow \exists \zeta \in (c_1, c_2) \quad f'(\zeta) = 0.$$

3) Ідея $C = \infty$, або $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$
 (a,b) - скінт. або нескінт.

$\exists A$ - достатньо велике, $A > 0$:
 рівняння $f(x) = A$ має два різні корені,
 які позначимо x_1 та x_2 .

$\Rightarrow$ за т. Ролля $\exists \zeta \in (x_1, x_2)$:

$$f'(\zeta) = 0.$$



N 96 d Довести, що якщо $f \in C^{(n-1)}([x_0, x_n])$,
 має похідну n -го порядку $\forall x \in (x_0, x_n)$ та
 $f(x_0) = f(x_1) = \dots = f(x_n)$, де $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, то
 $\exists \zeta \in (x_0, x_n) : f^{(n)}(\zeta) = 0$.

На кожному з проміжків $[x_i, x_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-1}$
 виконуються умови т. Ролля $\Rightarrow$

$$\exists \zeta_i \in (x_i, x_{i+1}) : f'(\zeta_i) = 0, \quad i = \overline{0, n-1} \quad (n \text{ точок})$$

Тоді для $f'(x)$ викон. умови теор. Ролля
 на кожному проміжку $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$, $i = \overline{0, n-2}$
 ($n-1$ точка).

І так далі. Викон. умови теор. Ролля на
 проміжку $[\zeta_0, \zeta_{n-1}]$, де $f^{(n-1)}(x)$ $\Rightarrow \exists \zeta \in (\zeta_0, \zeta_{n-1})$:
 $f^{(n)}(\zeta) = 0$

N 96 B) Довести, що якщо корені полінома $P(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ($a_k \in \mathbb{R} \quad \forall k=0, n$) дійсні, то всі його похідні $P'(x), P''(x), \dots, P^{(n-1)}(x)$ також мають тільки дійсні ~~корені~~ корені.

Δ Нех. всі нулі $P(x)$ різні $\Rightarrow$ за т. Ролля $P'(x)$ має $(n-1)$ дійсних різних нулів, $P''(x)$ має $(n-2)$ дійсних різних нулів і т.д. Оскільки при дуж. спадіє поліном зменш. на одиницю $\Rightarrow$ всі нулі $P^{(k)}(x)$ — дійсні. Якщо якийсь нуль полінома $P(x)$ — кратний, то він дуж. нулем і для $P'(x)$, тобто також дійсний. ▮

N 96 C-1) Довести, що всі корені поліному $P_n(x)$ — дійсні, де

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} ((x^2 - 1)^n) \quad \text{— поліном Лежандра}$$

Δ Поліном $Q_{2n}(x) = (x^2 - 1)^n$ має на $[-1, 1]$ $2n$ дійсних нулів: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = -1$ та $x_{n+1} = x_{n+2} = \dots = x_{2n} = 1$.

Тоді за попередньою задачею $Q_{2n}^{(n)}(x)$ має n дійсних коренів на $[-1, 1]$,

$Q_{2n}^{(n)}$ — поліном n -го степеня $\Rightarrow$ всі його корені — дійсні $\Rightarrow$

у $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} Q_{2n}^{(n)}(x)$ всі корені дійсні. ▮

N 96 M-1) Довести, що якщо функція f має похідну на $[a, b]$ та $f(a) = f(b) = 0$, тоді рівняння $\varphi(x) = 0$ має розв'язок на (a, b) , де $\varphi(x) = f(x) + f'(x) \tan x$, $-\frac{\pi}{2} < a < b < \frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} \Delta \quad f(x) + f'(x) \tan x &= \frac{1}{\cos x} (f(x) \cos x + f'(x) \sin x) = \\ &= \frac{1}{\cos x} (f(x) (\sin x)' + f'(x) \sin x) = \frac{1}{\cos x} (f(x) \sin x)' = \\ &= \frac{1}{\cos x} g'(x), \quad \text{де } g(x) = f(x) \sin x. \end{aligned}$$

g має похідну на $[a, b]$, $g(a) = g(b) = 0 \Rightarrow$ за теор. Ролля $\exists \xi \in (a, b): g'(\xi) = 0$

$\Rightarrow$ рівн. $\varphi(x) = \frac{1}{\cos x} g'(x) = 0$ має розв'язок. ▮

N 97 a)

Довести, что справедливо следующее утверждение:
 Если $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, то для любой точки $\xi \in (a, b)$: $f'(\xi) = 0$, если
 $f(x) = |x|$, $[a, b] = [-1, 1]$.

Решение. $f'(-1) = -1$, $f'(1) = 1$, $f'(-1) \cdot f'(1) < 0$

Але $f = |x|$ не гур. в т. $x_0 = 0$
 не викон. всі умови т. Дарбу.

$\exists \xi \in (-1, 1) : f'(\xi) = 0$.

б) $f(x) = x^2$, $[a, b] = [-\frac{1}{2}; 2]$

Решение. f — гур. на $[-\frac{1}{2}, 2]$,

$$f'(-\frac{1}{2}) = 2x|_{x=-\frac{1}{2}} = -1,$$

$$f'(2) = 2x|_{x=2} = 4, \quad f'(-\frac{1}{2}) \cdot f'(2) < 0$$

— всі умови теор. Дарбу викон. $\Rightarrow \exists \xi \in (-\frac{1}{2}, 2)$:

$$f'(\xi) = 0 \quad \exists \xi = 0 \quad f'(x) = 2x, \quad f'(0) = 0.$$

N 100

Довести нерівність

$$a) |\sin x - \sin y| \leq |x - y|.$$

Решение. т. Лагранжа. За теор.

$f(x) = \sin x$ — непер. на $\mathbb{R}$. Для любых $x \neq y$
 та гур.

$$\Rightarrow \exists \xi \in (y, x) : \sin x - \sin y = \cos \xi \cdot (x - y).$$

$$\text{Тоді } |\sin x - \sin y| = |\cos \xi| \cdot |x - y| \leq |x - y| \quad \square$$

$$б) p y^{p-1} (x - y) \leq x^p - y^p \leq p x^{p-1} (x - y),$$

де $0 < y < x, \quad p > 1$

Решение. $f(x) = x^p$ — непер. та гур. $\Rightarrow$ за т. Коши:

$$x^p - y^p = p \xi^{p-1} (x - y), \quad y < \xi < x$$

$$(x - y) p y^{p-1} \leq x^p - y^p \leq (x - y) p x^{p-1} \quad \square$$

З/З N 96 г-2), е-2), н), ф-2), N 97 б) г-2),
~~N 100~~ N 100 б), з), м).