

Зачетное 16

Доказать: в графиках
высших порядков

N26 Дана $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ графы f' , f'' , $f'''(x_0)$.

3) $f(x) = x \ln x$, $x_0 = 1$

Решение.

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x_0) =$$

17) $f(x) = x^x$

Решение. $f'(x) =$

$$f''(x) =$$

$$f'''(x_0) =$$

N27 Две переменные заданы функцией $y(x)$
графа а) y'_x , y''_{x^2} ; б) y'''_{x^3} в точке $P(x(t_0), y(t_0))$
1) $x(t) = 2t - t^2$, $y(t) = 3t - t^3$, $t_0 = 1$

Решение. $y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{3 - 3t^2}{2 - 2t} = \frac{3}{2}(1+t)$

$$y''_{x^2} = \frac{(y'_x)'_t}{x'(t)} = \frac{\left(\frac{3}{2}(1+t)\right)'}{2 - 2t} = \frac{3}{4(1-t)}$$

$$y'''_{x^3} =$$

16) $x(t) = \cos^4 t$, $y(t) = \sin^4 t$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$

$$y'_x =$$

$$y''_{x^2} =$$

$$y'''_{x^3}(P) =$$

N28

Для каждой заданной функции $y(x)$ определить: а) y'_x , y''_{x^2} ; б) $y'''_{x^3}(P)$, если

1) $y^2 = 2px$, $P(2p, 2p)$

16) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, $P(a^3\sqrt{2}, a^3\sqrt{4})$

Решение. 1) 1-й способ: (через похлону)

$$2y \cdot y' = 2p \Rightarrow y'(x) = \frac{p}{y}$$

$$y''(x) = -\frac{p}{y^2} \cdot y'(x) = -\frac{p^2}{y^3}; \quad y'''(x) = \frac{3p^2}{y^4} \cdot y'(x) = \frac{3p^3}{y^4}$$

$$y'''(P) = \frac{3p^3}{(2p)^4} = \frac{3}{16p}$$

2-й способ: (через дифференцирование)

$$2y dy = 2p dx \Rightarrow y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{p}{y}$$

$$y dy = p dx \quad (dy)^2 + y d^2y = 0 \quad (dx = \text{const})$$

$$\Rightarrow d^2y = -\frac{(dy)^2}{y} = -\frac{(p \frac{dx}{y})^2}{y} = -\frac{p^2}{y^3} (dx)^2$$

$$2(dy) d^2y + dy \cdot d^2y + y d^3y = 0$$

$$\Rightarrow d^3y = -\frac{3 dy d^2y}{y} = -\frac{3(\frac{p dx}{y}) \cdot (-\frac{p^2}{y^3} (dx)^2)}{y}$$

$$= -\frac{3p^3}{y^4} (dx)^3 \Rightarrow y'''_{x^3} = -\frac{3p^3}{y^4}; \quad y'''_{x^3}(P) = \frac{3}{16p}$$

16) $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ $P(a^3\sqrt{2}, a^3\sqrt{4})$

Решение.

N29 Для функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ найти n -ую производную

a) $f(x) = (ax+b)^2, \quad a, b \in \mathbb{R}$

Решение. 1) $L \geq n$ ато ($L < n$ та $L \notin \mathbb{N}$)

тогда $f^{(n)}(x) = L(L-1)\dots(L-n+1)a^n(ax+b)^{L-n}$

2) $L \in \mathbb{N}$ та $L < n$ $f^{(n)}(x) \equiv 0$.

1) $f(x) = x^2 e^{2x}, \quad n=20$

Решение. Формула Лейбница $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)} g^{(n-k)}$

тогда $(x^2 \cdot e^{2x})^{(n)} = \left(\begin{matrix} (x^2)' = 2x, \\ (x^2)'' = 2, \\ (x^2)''' = 0 \end{matrix} \right) \quad \text{---}$

$\Rightarrow \cancel{C_n^0} \cancel{C_n^1} \cancel{C_n^2} C_n^{n-2} (x^2)'' \cdot (e^{2x})^{(n-2)} + C_n^{n-1} (x^2)' \cdot (e^{2x})^{(n-1)} + C_n^n \cdot x^2 \cdot (e^{2x})^{(n)} =$

$= \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 \cdot (e^{2x})^{(n-2)} + n \cdot 2x \cdot (e^{2x})^{(n-1)} + x^2 (e^{2x})^{(n)} \quad \text{---}$

$\left((e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x} \right) \quad \text{---} \quad \text{---} \quad n(n-1) \cdot 2^{n-2} \cdot e^{2x} + n x 2^n e^{2x} + x^2 2^n e^{2x}$

$= \cancel{e^{2x}} \cdot 2^{n-2} (n(n-1) + n x \cdot 4 + 4x^2)$

N30 б) $f^{(n)} = ?$ $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

Решение. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1} = (x-2)^{-1} - (x-1)^{-1}$

$\Rightarrow f^{(n)}(x) = (-1)(-1-1)\dots(-1-n+1)(x-2)^{-1-n} - (-1)(-1-1)\dots(-1-n+1)(x-1)^{-1-n}$

$= (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n (x-2)^{-1-n} - (-1)^n \cdot 1 \cdot 2 \dots n (x-1)^{-1-n}$
 $= (-1)^n n! ((x-2)^{-1-n} - (x-1)^{-1-n})$

N30 в) $f(x) = x \sinh x$

Решение

$f^{(n)}(x) =$

N30 x) $f(x) = e^{ax} \cdot \sin(bx+c)$; у) $g(x) = e^{ax} \cos(bx+c)$
 $f^{(n)} - ?$ $g^{(n)} - ?$

Решение. Вспомогат. комплексное число:

$$g(x) + if(x) = e^{ax} (\cos(bx+c) + i \sin(bx+c)) = e^{ax} \cdot e^{i(bx+c)} = e^{ax+i(bx+c)}$$

$$(e^{ax+i(bx+c)})^{(n)} = e^{ax+i(bx+c)} \cdot (a+ib)^n = e^{ax} \cdot (a^2+b^2)^{n/2} \cdot e^{i(bx+c)} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \right)^n = e^{ax} (a^2+b^2)^{n/2} \cdot e^{i(bx+c)} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n \quad \textcircled{1}$$

где φ : $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ /

$$\textcircled{2} e^{ax} (a^2+b^2)^{n/2} e^{i(bx+c+n\varphi)} = e^{ax} (a^2+b^2)^{n/2} (\cos(bx+c+n\varphi) + i \sin(bx+c+n\varphi))$$

$$\Rightarrow g^{(n)}(x) = e^{ax} (a^2+b^2)^{n/2} \cos(bx+c+n\varphi)$$

$$f^{(n)}(x) = e^{ax} (a^2+b^2)^{n/2} \sin(bx+c+n\varphi)$$

N31 б) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $f^{(n)}(0) = ?$

Решение. 1-й способ

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{x-i} - \frac{1}{x+i} \right) \quad f^{(n)}(x) = \frac{1}{2i} \left(\frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x-i)^n} - \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{(x+i)^n} \right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{2i} \left((1+x^2)^{-n/2} (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) - (1+x^2)^{-n/2} (\cos n\varphi - i \sin n\varphi) \right)$$

$$= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{2i} \cdot 2i \sin n\varphi \cdot (1+x^2)^{-n/2}$$

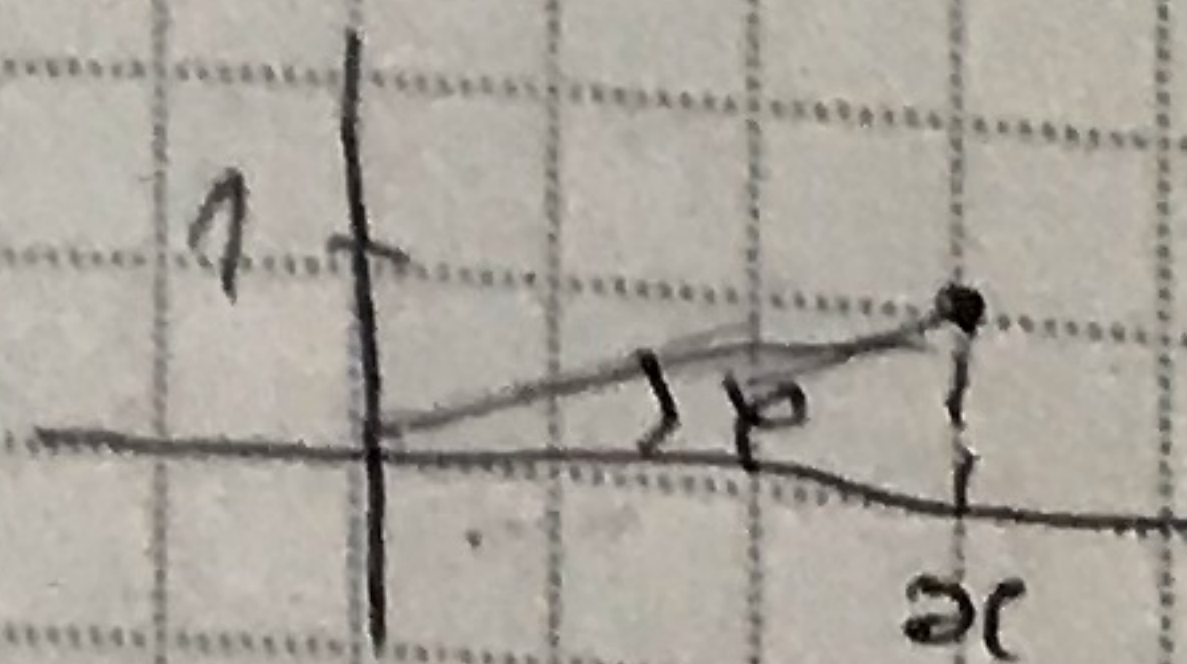
$$= \frac{(-1)^{n-1} (n-1)! \cdot \sin n\varphi}{(1+x^2)^{n/2}} \quad \underline{f^{(n)}(0) =}$$

где φ : $x+i = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + i \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x$$

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1} (n-1)! \sin(n \operatorname{arctg} 0) =$$

$$= (-1)^{n-1} (n-1)! \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n=2k, k \in \mathbb{N} \\ (-1)^k (2k)!, & n=2k+1 \end{cases}$$



2-й способ. $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = -\frac{2xf'(x)}{1+x^2}$
 $\Rightarrow (1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) \equiv 0$ — тождество.

Дифференцируем это тождество $(n-2)$ раз, засос $x=0$ получим:

$$(1+x^2)f^{(n)}(x) + 2(n-2)xf^{(n-1)}(x) + (n-2)(n-3)f^{(n-2)}(x) + 2xf^{(n-1)}(x) + 2(n-2)f^{(n-2)}(x) \equiv 0$$

$x=0 \Rightarrow f^{(n)}(0) = -(n-1)(n-2)f^{(n-2)}(0).$

Оск. $f(0) = \arctg 0 = 0 \Rightarrow f^{(2k)}(0) = 0$ (n -нечет)

а чн $n=2k+1$ $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)!$

N 32 б) Силнее показано в с. 2050 нас $f(x)$,

лем $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x - x, & x < 0 \\ x - \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$

Решение $f(-0) = f(+0) = f(0) = 0$ — непрерыв. в 0
 $f'(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x - 1, & x < 0 \\ 1 - \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ — непрерыв. в 0

$f''(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}$ — непрерыв. в 0

$f'''(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ — непрерыв. в 0

$f^{(4)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sh} x, & x < 0 \\ -\sin x, & x \geq 0 \end{cases}$ — непрерыв. в 0

$f^{(5)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x, & x < 0 \\ -\cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ — разрывна в 0

N 34 В каком x функции не имеют азучености, зучености, разрывности.

а) $x d^2 x^3 =$

б) $x^2 d^3 x^2 =$

в) $x^3 d^3 x^3 =$

N 35 Запиши df , $d^2 f$, $d^3 f$, а также е) $f = \operatorname{sh} u$.

Решение $df = du \cdot \operatorname{ch} u + u \frac{du}{u}$

$d^2 f =$

$d^3 f =$

З/З. N 26 а) б) 7), N 27 а) б) 5), N 28 а) б) 15), N 29 НФ),
 N 30 г), N 31 2)