Заняття 15. Диференціали. Похідна оберн. ф-ії. Похідні параметрично та неявно заданих функцій

$\boxed{№11}$. Вважаючи функції φ та ψ диференційовними на $\mathbb{R}$, обчислити похідні складних функцій

в) $f(x) = (\varphi(x))^{\psi(x)}$

Розвʼязок. $f'(x) = \left(\exp(\ln(\varphi(x))\cdot\psi(x))\right)' =$

$= \cancel{(\exp(\ln(\varphi(x))))'\cdot\psi(x) + \exp}$

$= \exp(\ln(\varphi(x))\cdot\psi(x))\cdot(\ln(\varphi(x))\cdot\psi(x))' =$

$= (\varphi(x))^{\psi(x)}\cdot\left(\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x) + \ln(\varphi(x))\cdot\psi'(x)\right).$

ж) $f(x) = \varphi(\psi(\varphi(x)))$

Розвʼязок. $f'(x) = \varphi'(\psi(\varphi(x)))\cdot\psi'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$

и) $f(x) = \varphi(\arcsin\psi(x))$

Розвʼязок. $f'(x) =$

$\boxed{№12}$ $f'(x_0)$ — ?

а) $f(x) = (x-1)(x-2)^2\cdot(x-3)^3$ з) $x_0 = 2$

Розвʼязок. $f'(x) = 2(x-2)\cdot(x-1)(x-3)^3 + (x-2)^2((x-1)(x-3)^3)'$

$\Rightarrow f'(2) = 0$

і) $x_0 = 0$

$f'(x) =$

$f'(0) =$

и) $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}$, $x_0 = 0$

Розвʼязок. $f'(x) =$

$f'(0) =$

№13 Знайти похідну ~~оберн~~ f за правилом диференціювання оберненої функції на D_f та в т. x_0

а) $f(x) = \arcsin x, \quad x_0 = 0.$

Розвʼязок. Обернена до f функція $f^{-1}(y) = g(y) = \sin y$.

Теор (диф. оберненої функції) Нехай $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має обернену функцію, $x_0 \in D_f$, x_0 – гранична точка D_f, $y_0 = f(x_0)$. Якщо існує $f'(x_0) \neq 0$, та обернена функція f^{-1} неперервна в точці y_0, то вона диференційовна в цій точці. Якщо крім того y_0 – гранична точка $E_f = D_{f^{-1}}$, то $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Наслідок. Нехай $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – неперервна та строго монотонна на компакті D_f функція, яка має похідну в т. $x_0 \in D_f$, що є граничною точкою для D_f. Якщо $f'(x_0) \neq 0$, то обернена функція f^{-1} має похідну в точці $y_0 = f(x_0) \in E_f$, яка обчислюється за формулою $(f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

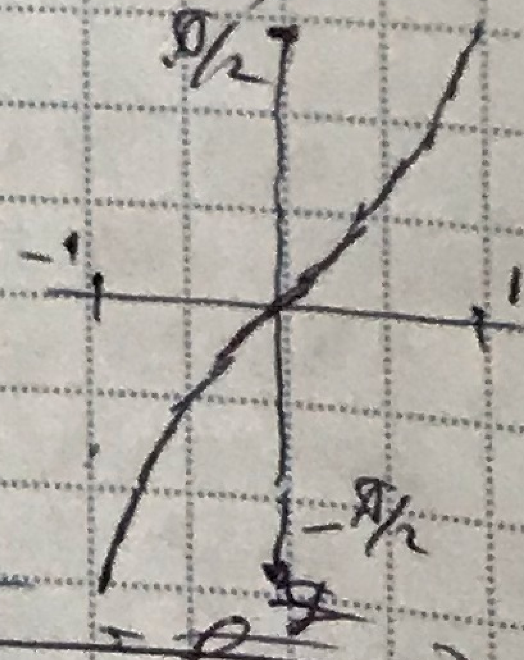
$\sin y$ – непер. в $\forall y \in \mathbb{R}$, диф. в $\forall$ т. $y \in \mathbb{R}$

тоді $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{(\sin y)'} = \dfrac{1}{\cos y} \ominus \Big/ \; x = \sin y \Rightarrow \cos y = \sqrt{1-x^2} \; \Big/ \ominus$

$\cos y \geq 0$ для $y \in (-\pi/2; \pi/2)$

$\ominus \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arcsin x)'\big|_{x=0} = \dfrac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1.$



м) $f(x) = \operatorname{Arsh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad x_0 = 1$

Розвʼязок. $\ln(x + \sqrt{x^2+1}) = y \Rightarrow \cancel{x + \sqrt{x^2+1} = e^y}$

$\cancel{\Rightarrow \dfrac{1}{x - \sqrt{x^2+1}} = e^y}$ тоді $x = \operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$,

дійсно $e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$

$e^y = z \Rightarrow z^2 - 2xz - 1 = 0$

$D = 4x^2 + 4$

$z_{1,2} = \dfrac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2+1}$

$\Rightarrow y = \ln(x \pm \sqrt{x^2+1}) = \Big/ \; x - \sqrt{x^2+1} < 0 \; \Big/ = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

$(\operatorname{Arsh}(x))' =$

$(\operatorname{Arsh}(x))'\big|_{x_0=1} =$

$\boxed{N\ 16}$ Знайти диференціал функції f на D_f та в точці $P(x_0, y_0)$ ~~($P(x_0,y_0)$ для неявно заданої функції~~)

а) Явно задана функція

7) $f(x) = x\ln x$, $P(1,0)$.

<u>Озн.</u> Нехай f – диференційовна в т. $x_0 \in D_f$, де x_0 – гранична точка D_f

$$f(x) - f(x_0) = \underline{f'(x_0)(x - x_0)} + o(x - x_0) \qquad (1)$$

Лінійна частина приросту функції наз. <u>диференціалом</u> функції f в т. x_0 і познач. $df(x_0)$. Обчислюється так:

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$, де dx – символічне позначення приросту аргументу.

<u>Розв'язок.</u> $f'(x) = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$

$f'(1) = 1 \Rightarrow df = (\ln x + 1)\,dx$,

$df(1) = dx$.

$\boxed{N\ 16\ б)}$ параметрично задана функція:

$x = t^4 + 1$, $y = t^3 + t$, $P(2,2)$.

Нехай функція $y = f(x)$ задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $a < t < b$ ~~та~~ нехай $\forall t \in (a,b)$ $\exists\, \varphi'(t)$ та $\exists\, \psi'(t) \neq 0$. Тоді функція φ строго монотонна на (a,b) та $\exists$ обернена функція $t = \varphi^{-1}(x)$, яка має похідну $t'(x) = (\varphi^{-1}(x))' = \frac{1}{\varphi'(t)}$. Композиція $f = y = \psi \circ \varphi^{-1}$ має похідну $\forall x \in D_f$, яка обчислюється за формулою

$$f'(x) = (\psi' \circ \varphi^{-1})(x) \cdot (\varphi^{-1})'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad x = \varphi(t).$$

<u>Розв'язок.</u>
Отже, $y'(x) = \frac{(t^3+t)'}{(t^4+1)'} = \frac{3t^2+1}{4t^3} \Rightarrow dy = \frac{3t^2+1}{4t^3}\,dx$

$P(2,2)$: $t^4 + 1 = 2 \Rightarrow t^4 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 2$

тобто точці $P(2,2)$ відповідає $t = 1$

$$y'(x)\big|_P = \frac{3 \cdot 1^2 + 1}{4 \cdot 1^3} = 1 \Rightarrow dy(P) = dx$$

$\boxed{N16\ б)\ 4)}$ $x = \sin t$, $y = \cos t$, $P(0,1)$

Розвʼязок.

$y'(x) =$

$dy =$

$dy(P) =$

$\boxed{N16\ б)\ 1)}$ Знайти диференціал Df та в т. P для неявно заданої функції $y(x)$

1) $x^4 + x = y^5 + y^2$, $P(1,1)$.

Розвʼязок. Перший спосіб (через диференціали)

$$4x^3 dx + dx = 5y^4 dy + 2y\, dy$$

$$\Rightarrow dy = \frac{4x^3+1}{5y^4+2y} dx \Rightarrow dy(P) = \frac{5}{7} dx.$$

Другий спосіб. x – незалежна змінна, y – залежна змінна (функція від x), тоді

$$4x^3 + 1 = 5y^4 \cdot y' + 2y \cdot y' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = \frac{4x^3+1}{5y^4+2y}. \quad y'(P) = \frac{5}{7}.$$

$$dy = \frac{4x^3+1}{5y^4+2y} dx, \quad dy(P) = \frac{5}{7} dx.$$

$\boxed{N17\ з}$ Виразити диференціал функції f через диференціали функцій u та v.

$f = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{v}$.

Розвʼязок. $f' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v}} \cdot \left(\operatorname{tg}\frac{u}{v}\right)' = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{u}{v}} \cdot \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

$$df = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v}} d\left(\operatorname{tg}\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{u}{v}} \cdot d\left(\frac{u}{v}\right) =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{u}{v}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{u}{v}} \cdot \frac{(du)v - (dv)u}{v^2}.$$

$\boxed{N 18 \quad б)}$ ~~Замінивши~~ приріст функції її диференціалом, обчислити наближено $\sin 29^\circ$.

Розвʼязок. З формули (1) слідує, що

$\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$,

$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Переведемо в радіани: $\sin 29^\circ = \sin\left(\frac{29\pi}{180}\right)$

$x_0 = 30^\circ = \frac{\pi}{6}$, $\Delta x = (x - x_0) = -\frac{\pi}{180}$.

Тоді $\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot \left(-\frac{\pi}{180}\right) =$

$= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{180}$

$\boxed{N 19}$ Дослідити на диференційовність в обл. визначення функцію $x \to y(x)$, що задана параметрично

а) $x(t) = 2t + |t|$, $y(t) = 5t^2 + 4t \cdot |t|$

Розвʼязок. ~~Область визнач. функцій $x(t)$ та $y(t)$ співпадають і дорівн. $\mathbb{R}$~~ ~~Нех φ~~ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, тоді

$\varphi(t) = 2t + |t|$, $\psi(t) = 5t^2 + 4t \cdot |t|$ — неперервні

$D_\varphi = D_\psi = \mathbb{R}$.

$\psi'(t)$ існує $\forall t \in \mathbb{R}$

$\varphi'(t)$ існує $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Дійсно

$\varphi'_л(0) = (2t - t)'\big|_{t=0} = 1$,

$\varphi'_п(0) = (2t + t)'\big|_{t=0} = 3 \neq 1 \Rightarrow \boxed{y(x) \text{ не диф. при } t = 0}$

~~Крім того, при $t \neq 0$~~ Розглянемо інші випадки:

1) $t < 0$, тоді $\varphi(t) = 2t - t = t$, $\psi(t) = 5t^2 - 4t^2 = t^2$

$\varphi'(t) = 1$, $\psi'(t) = 2t$

$\varphi'(t) \neq 0$, φ ~~монот~~ строго зростає $\Rightarrow$

$x \to y(x)$ — диференц. при таких $t < 0$:

$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = 2t$.

2) $t > 0$, тоді $\varphi(t) = 3t$, $\psi(t) = 9t^2$

$\varphi'(t) = 3$, $\psi'(t) = 18t$

φ ~~монот~~ строго зростає $\Rightarrow$

$x \to y(x)$ — диференційовна при $t > 0$

$y'(x) = 6t$

$\boxed{N20}$ Знайти $y'(x)$ на обл. визначення в т. $M(x_0, y_0)$, якщо

а) $x(t) = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y(t) = \sqrt{1-\sqrt{t}}$, $t_0 = \frac{1}{64}$, $M(1,1)$

Розвʼязок. $\varphi(t) = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $\psi(t) = \sqrt{1-\sqrt{t}}$,

$$D_\varphi = [0, +\infty) = D_\psi \ni t_0 = \frac{1}{64}.$$

~~$y'(x)$~~ $\varphi'(t) = \frac{1}{3}(1-\sqrt{t})^{-2/3} \cdot \left(-\frac{1}{2} t^{-1/2}\right)$

$\psi'(t) = \frac{1}{2}(1-\sqrt{t})^{-1/2} \cdot \left(-\frac{1}{2} t^{-1/2}\right)$

$$y'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} = \frac{3}{2}(1-\sqrt{t})^{-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}} = \frac{3}{2}(1-\sqrt{t})^{1/6}$$

$t_0 = \frac{1}{64} \leftrightarrow x_0 = \frac{\sqrt[3]{7}}{2}$, $y_0 = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$, $y'(x_0) = \frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{1/6} =$

$$= \frac{3}{2} \cdot \left(\frac{7}{8}\right)^{1/6}.$$

$M(1,1) \leftrightarrow t_1$: $\sqrt[3]{1-\sqrt{t}} = 1$ та $\sqrt{1-\sqrt{t}} = 0$

$\Rightarrow t_1 = 0.$

$$y'(x)\Big|_M = \frac{3}{2}(1-\sqrt{0})^{1/6} = \frac{3}{2}.$$

$\boxed{N\ 21}$ Обчислити похідні функцій, що задано неявно.

а) $y^2 = 2px$, $M(2p, 2p)$

Розвʼязок

Д/З. N11 г), N12 е 3), N13 е) к),

N16 а 8), б 2), в 4);

N17 б) N18 г), N20 б) N21 б)