Заняття 19 Диференційовність функції

Озн. Нехай $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Вираз $y' = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$, (*)

якщо він має зміст, наз. похідною функції $f(x)$ в т. x_0, а сама функція $f(x)$ при цьому наз. ~~похідною~~ диференційовною в т. x_0.

~~f~~ - ф-ція в т. $x_0 \Leftrightarrow \exists$ скін. (*).

Основні правила знаходження похідних

Дві задачі з функції:

Нехай $C = \text{const}$, $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$, тоді

1) $C' = 0$
2) $(Cu)' = Cu'$
3) $(u+v-w)' = u'+v'-w'$
4) $(uv)' = u'v + v'u$
5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ $(v \neq 0)$
6) $(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$, ($u$ – стале число)
7) Нехай функції $y = f(u)$ та $u = \varphi(x)$ мають похідні, тоді $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ (похідна композиції)

Односторонні похідні

Озн. $f'_л(x) = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ – ліва похідна

$f'_п(x) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ – права похідна.

Критерій диференційовності.

Нехай ф-ція $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовна в т. $x_0 \in D_f$, що є граничною точкою $D_f \cap (-\infty, x_0]$ та $D_f \cap [x_0, +\infty)$, тоді і тільки тоді, коли $\exists$ скінчена $f'_л(x_0) = f'_п(x_0)$.

№3 а) Дослідити на диференційовність f

а) $f(x) = |x|$

Розв'язок $D_f = \mathbb{R}$.

1) Нехай $x_0 < 0$. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-(x_0+\Delta x) + x_0}{\Delta x} = -1 \Rightarrow$

$f'(x_0) = -1$

2) Нехай $x_0 > 0$, тоді $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x_0+\Delta x - x_0}{\Delta x} = 1 = f'(x_0)$

$\Rightarrow$ f – диф-ма $\forall x_0 < 0$

3) $x_0 = 0$: $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} -\frac{\Delta x}{\Delta x} = -1 = f'_л(0)$

~~$f'_п(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0}$~~

$\Rightarrow$ f – диф-ма $\forall x_0 < 0$

$f_n(0) = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1 \neq -1$

$f_л(0) \neq f_п(0)$ $\Rightarrow$ f не є дифф. в т. $x_0 = 0$.

№ 35 Дослід. на дифф. в т. $f(x) = x|x|$

Розв'язок. 1) Нехай $x_0 < 0$, тоді $f(x) = -x^2$ в околі т. x_0

$\exists f'(x) = -2x$ $\Rightarrow$ f – диференц. при $x < 0$

2) Нехай $x_0 > 0$, тоді $f(x) = x^2$ в околі т. x_0

$\exists$ ~~Coba~~ $f'(x) = 2x$ $\Rightarrow$ f – дифф. при $x > 0$

3) $x = 0$: ~~$\Delta x \to 1$~~

$\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta x \cdot |\Delta x| - 0 \cdot |0|}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to -0} -\Delta x = 0$ $\Rightarrow$ $\exists f'_л(0) = 0$.

$\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta x \cdot |\Delta x|}{\Delta x} =$

$= \lim\limits_{\Delta x \to +0} \Delta x = 0$ $\Rightarrow$ $\exists f'_п(0) = 0$.

$\exists f'_л(0) = f'_п(0)$ співпали $\Rightarrow$ f – дифф. в т. 0.

№ 36 Дослід. на диференц. $f(x) = \begin{cases} x\left|\cos\frac{1}{x}\right|, & \text{при } x \neq 0 \\ 0, & \text{при } x = 0 \end{cases}$

Розв'язок. Ф-я $u(x) = x$ має похідну $\forall x \in \mathbb{R}$,

ф-я $v(x) = \left|\cos\frac{1}{x}\right|$ має похідну скрізь, за

виключенням точок $x_0 = 0$, $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$

Тому похідну f при $x \neq 0$ та $x \neq x_n$ можна знайти через формулу для похідної добутку і композиції та похідної добутку:

1) при $\cos\frac{1}{x} > 0$ $\Rightarrow$ $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$

$\Rightarrow f(x) = x\cos\frac{1}{x}$, ~~$f'(x)$~~ $f'(x) \cdot (x)' \cdot \cos\frac{1}{x} + x \cdot \left(\cos\frac{1}{x}\right)' =$

$= \cos\frac{1}{x} + x \cdot \left(-\sin\frac{1}{x}\right) \cdot \left(+\frac{1}{x}\right)' = \cos\frac{1}{x} + x \cdot \left(-\sin\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= \cos\frac{1}{x} + \frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}$.

2) при $\cos\frac{1}{x} < 0$ $\Rightarrow$ $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$

$\Rightarrow f(x) = -x\cos\frac{1}{x}$ $\Rightarrow f'(x) = -\cos\frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cdot \sin\frac{1}{x}$.

3) Нехай $\cos\frac{1}{x}=0 \Rightarrow x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$, $n\in\mathbb{Z}$

Існує або по похідну за означенням. Нехай n - фікс.

$$f_n'(x_n)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_n+\Delta x)-f(x_n)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{(x_n+\Delta x)\left|\cos\frac{1}{x_n+\Delta x}\right|-x_n\left|\cos\frac{1}{x_n}\right|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}+\Delta x\right)\cos\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}+\Delta x\right)-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2}+2\pi n}{1+\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\Delta x}\right)-\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot 0}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\cdot\left(1+\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\Delta x\right)^{-1}\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot\cos\left(\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\left(1-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\Delta x+o(\Delta x)\right)\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2\Delta x\right)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}+\frac{\sin\left(\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2\Delta x\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)^2\Delta x}{\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\Delta x}=$$

Аналогічно

$$=\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

$$f_n'(x_n)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_n+\Delta x)-f(x_n)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(x_n+\Delta x)\left|\cos\frac{1}{x_n+\Delta x}\right|-x_n\left|\cos\frac{1}{x_n}\right|}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\left(\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}+\Delta x\right)\cdot\left(-\cos\left(\frac{1}{\frac{1}{\pi/2+2\pi n}+\Delta x}\right)\right)-0}{\Delta x}$$

$$=-\frac{\pi}{2}-2\pi n.$$

$$\neq\frac{\pi}{2}+2\pi n$$

$\Rightarrow f$ - розривна в $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ $\forall n\in\mathbb{Z}$

2 спосіб $f_n'(x_n)=f'(x_n-0)=\cos\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n}\sin\frac{1}{x_n}=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)+\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=\frac{\pi}{2}+2\pi n$

$f_n'(x_n)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)=$

$=-\left(\frac{\pi}{2}+2\pi n\right)\neq f_n'(x_n)\Rightarrow f$ - розрив

f' - розривна в т. $x_n\Rightarrow f$ - не диф. в т. x_n

4) $x_0 = 0$. За озн.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \left|\cos \frac{1}{\Delta x}\right|}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left|\cos \frac{1}{\Delta x}\right| \nexists,$$ так як

наприклад, $x_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$

$$\lim_{n \to \infty} \left|\cos \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}\right| = \lim_{n \to \infty} \left|\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)\right| = 0$$

а $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ $\lim_{n \to \infty} \left|\cos(2\pi n)\right| = 1 \neq 0$

$\Rightarrow$ f - не дифф. в т. x_0.

№4 а) Дослід. на диференційовність

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

в околі т. x_0

Розв'язок. 1) Нехай $x_0 \neq 0$, тоді $f'(x) =$

$$= \frac{(1 + e^{1/x}) - x \cdot e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)}{(1 + e^{1/x})^2} = \frac{1 + e^{1/x} + \frac{e^{1/x}}{x}}{(1 + e^{1/x})^2} =$$

існує скінчена.

$\Rightarrow$ f - диф. в $\forall x \neq 0$.

2) $x_0 = 0$. Спочатку перевіримо неперерв. f в т. $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = \lim_{x \to -0} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0$$

$$\lim_{x \to +0} f(x) = \lim_{x \to +0} \frac{x}{1 + e^{1/x}} = 0$$

отже, $f(-0) = f(+0) = f(0) \Rightarrow$ f - неперерв. в 0

Далі досліджуємо на диф. в т. $x_0 = 0$:

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{\frac{\Delta x}{1 + e^{1/\Delta x}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{1}{1 + e^{1/\Delta x}} = \blacktriangle$$

$$\lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{1}{1 + e^{1/\Delta x}} = 0$$

$\Rightarrow$ $f'_л(0) \neq f'_п(0)$ $\Rightarrow$ f - не дифф. в т. 0

№5 а) Обрати значення параметрів α та β так, щоб ф-ія f
1) неперервна на $\mathbb{R}$
2) диференційовна на $\mathbb{R}$
3) неперервно диференційовна на $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$

Розв'язок.

Означимо, що функція $f_1(x) = \alpha x + \beta$ — неперервно диференц. при $x < 1$
$f_1'(x) = \alpha$ — стала ф-я — неперр. $\forall \alpha, \beta$.

Означимо, що $f_2(x) = x^2$ — неперервно диференційовна при $x > 1$,
бо $f_2'(x) = 2x$ — неперервна функція.

Залишається дослідити в т. ~~$x_0 = 0$~~ $x_0 = 1$:

1) неперервність:

$$f(1-0) = f_1(1-0) = \lim_{x \to 1-0} \alpha x + \beta = \alpha + \beta = f(1)$$

$$f(1+0) = f_2(1+0) = \lim_{x \to 1+0} x^2 = 1$$

прирівняємо $f(1+0)$ та $f(1) \Rightarrow$
$\alpha + \beta = 1$ — при такій умові f — неперр. на $\mathbb{R}$.

2) диференційовність:

визначимо α, β: $f_л'(1) = f_п'(1)$ ✱

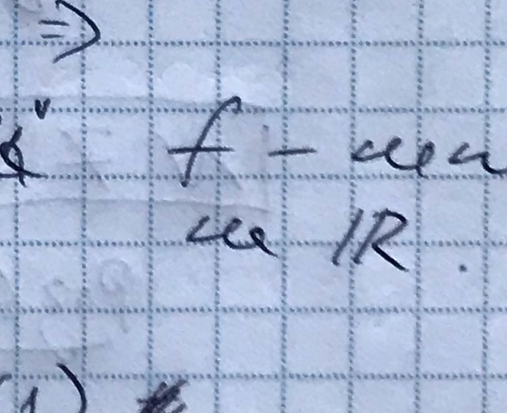
$f_л'(1) = \alpha$, $\quad f_п'(1) = 2x\big|_{x=1} = 2$

$\Rightarrow \alpha = 2 \Rightarrow$ при $\alpha = 2$ $\quad \beta = -1$ $\quad f$ — диффер. в т. $x_0 = 1$.

перевіримо

3) неперерв. диференц.: при $\alpha = 2$:

$$f^{(x)}(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \le 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$$



$$f'(x) = \begin{cases} 2, & x \le 1 \\ 2x, & x > 1 \end{cases}$$ — неперер.

$\Rightarrow$ ф-я f — неперер. диф. при $\alpha = 2$, $\beta = -1$.

№7 а) Знайти похідну від.

Визначення $f(x) = (1+x)\cdot\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}$

$D_f = \mathbb{R}$.

Розв'язок $f'(x) = (1+x)'\cdot(\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3}) +$

$+ (1+x)\cdot(\sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3})' =$

$= \sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\cdot((2+x^2)^{1/2}\cdot(3+x^3)^{1/3})' =$

$= \sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} + (1+x)\left(((2+x^2)^{1/2})'\cdot(3+x^3)^{1/3} + \right.$

$\left. + (2+x^2)^{1/2}\cdot((3+x^3)^{1/3})'\right) = \sqrt{2+x^2}\cdot\sqrt[3]{3+x^3} +$

$+\left(\frac{1}{2}(2+x^2)^{-1/2}\cdot 2x\cdot(3+x^3)^{1/3} + (2+x^2)^{1/2}\cdot\frac{1}{3}(3+x^3)^{-2/3}\cdot 3x^2\right)$

№7 з) $f(x) = \sin(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))$ $\quad f'(x) - ?$

Розв'язок $f'(x) = \cos(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))\cdot(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))' =$

$= \cos(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))\cdot 2\cos(\operatorname{tg}^3 x)\cdot(\cos(\operatorname{tg}^3 x))' =$

$= \cos(\cos^2(\operatorname{tg}^3 x))\cdot 2\cos(\operatorname{tg}^3 x)\cdot(-\sin(\operatorname{tg}^3 x))\cdot$

$\cdot 3\operatorname{tg}^2 x\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\cdot$

№7 л) $f(x) = 3^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$, $\quad f'(x) - ?$

Розв'язок $f(x) = e^{\ln 3\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$

$f'(x) = e^{\ln 3\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\cdot(\ln 3\cdot\operatorname{tg}\frac{1}{x})' =$

$= 3^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\cdot(\operatorname{tg}\frac{1}{x})' = 3^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\cdot\ln 3\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$

Д/З №3 в) е); №6 а)

№7 б) е) к) ф) ц); №8 е) о) р) №10 а)