# Заняття 13. Рівномірна неперервність.

**Озн.** Функція $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наз. рівномірно неперервною на множині $X \subset D_f$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon) > 0: \forall (x_1 \in X, \ x_2 \in X): |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow \quad (*)$$
$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon.$$

[187 g] **Твердження.** $f$ — рівн. неп. на $X \iff \forall (x_n) \subset X, (y_n) \subset X$: $(x_n - y_n) \to 0$, при $n \to \infty \Rightarrow f(x_n) - f(y_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

$f$ не є рівн. неп. на $X$, якщо

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists (x_1 \in X, \ x_2 \in X): |x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon.$$

**Теор. Кантора.** Нех. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Якщо звуження функції $f|_X$ на компакт $X \subset D_f$ неперервно, то $f$ — рівн. непер. на $X$

(Компакт — замкнена обмеж. множина).

$\boxed{N 187 \text{ a)}}$ Якщо $f$ — рівн. непер. на $X$ ~~то~~ $f$ — непер. на $X$.

◁ Нех. $x_0 \in X$. $(*)$ викон. $\forall x_1 \in X$, в тому числі для $x_2 = x_0$:

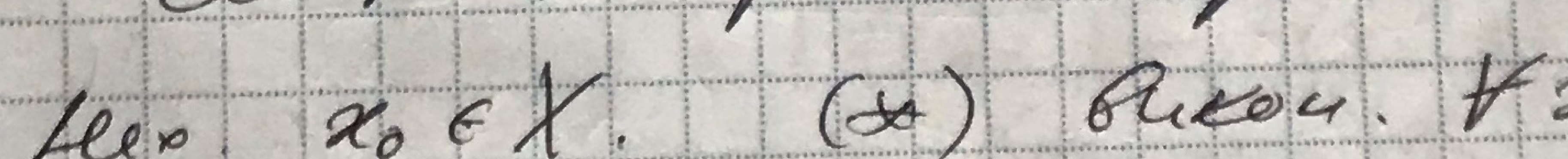
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1 \in X: |x_1 - x_0| < \delta$$
$$\Rightarrow |f(x_1) - f(x_0)| < \varepsilon \quad ▷$$

$$\Rightarrow f \text{ — непер. в т. } x_0.$$

$\boxed{N 187 \text{ в}}$ Якщо $f$ — рівн. непер. на проміжках $[a, b]$ та $[b, c]$ (можливо нескінченних), то вона рівн. непер. на $[a, c]$.

◁ 1) Нех. $a, b, c$ — скінчені, тоді $f$ — непер. на $[a, b]$, непер. на $[b, c] \Rightarrow$ неп. на $[a, c]$. Оскільки $[a, c]$ — компакт, то за т. Кантора $f$ — рівн. непер. на $[a, c]$.

2) Нех. $a = -\infty$, $c = +\infty$, $b$ — скінч. $f$ — непер. на $[b-R, b+R] \Rightarrow$ рівн. непер. на ньому за т. Кантора, де $R$ — достатньо велике, скінч.



$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \ \delta < R \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, \ x_2 \in \mathbb{R}: |x_1 - x_2| < \delta$$

тоді
$$\left[ \begin{array}{lll} x_1 < b \ \wedge \ x_2 < b & \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, & \text{оск. } f \text{ — р.н. на } (-\infty, b] \\ x_1 > b \ \wedge \ x_2 > b & \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, & \text{оск. } f \text{ — р.н. на } [b, +\infty) \\ x_1, x_2 \in [b-R, b+R] & \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, & \text{оск. } f \text{ — р.н. на } [b-R, b+R] \end{array} \right.$$ ▶

$\boxed{N187\ \text{ж)}}$ Довести, що якщо $f \in C(\mathbb{R})$ та періодична, то вона рівномірно неперервна на $\mathbb{R}$.

◁ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наз. $T$-періодич., якщо $\exists T \neq 0$, скінч.

$\forall x \in D_f \quad f(x) = f(x+T) = f(x-T)$

$f(x+nT) = f(x) \quad \forall x \in D_f, \ n \in \mathbb{Z}$.

$\forall a \in D_f$. ~~Розгл. $X_n =$~~ $\quad f \in C(\mathbb{R}) \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$.

Розгл. відрізки $X_n = [a + T\cdot n, \ a + T\cdot(n+1)]$, $n = 0, \pm 1, \pm 2$

$\Rightarrow \mathbb{R} = \bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty} X_n$. $\quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad X_n$ — компакт

$\Rightarrow$ За теор. Кантора $f$ — рівн. неп. на $X_n$

$\Rightarrow \forall N \in \mathbb{N} \quad f$ — рівн. непер. на $\bigcup\limits_{n=-N}^{N} X_n$.

$N \to \infty$ ?

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0, \ \delta < T \quad \forall x_1 \in \mathbb{R}, x_2 \in \mathbb{R} : |x_1 - x_2| < \delta$

$\exists k \in \mathbb{Z} : \left[\begin{array}{l} 1)\ x_1 - kT \in X_0 \ \wedge \ x_2 - kT \in X_0 \\ 2)\ x_1 - kT \in X_1 \ \wedge \ x_2 - kT \in X_1 \\ 3)\ x_1 - kT \in X_0 \cup X_1 \ \wedge \ x_2 - kT \in X_1 \cup X_2 \end{array}\right.$

1) $\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1') - f(x_2')| < \varepsilon$, оскільки $f$ — р.н. на $X_0$, де $x_1' = x_1 - kT$, $x_2' = x_2 - kT$

2) $\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1') - f(x_2')| < \varepsilon$, оскільки $f$ — р.н. на $X_1$

3) $\Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1') - f(x_2')| < \varepsilon$, оскільки $f$ — р.н. на $X_1 \cup X_2$ (згідно N187 в)). ▷

$\boxed{N188\ \text{а)}}$ Досл. на р.н. на множині $X$, якщо $f(x) = 1/x$

1) $X = (\frac{1}{100}, 100)$; 2) $X = (0, 1)$; 3) $X = (1, +\infty)$

Розв'язок 1) $f$ — непер. на ~~$(0, +\infty)$~~ $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Rightarrow f$ — непер. на $[\frac{1}{100}, 100]$ — компакт

$\Rightarrow$ За т. Кантора $f$ — р.н. на $[\frac{1}{100}, 100] \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ — р.н. на $(\frac{1}{100}, 100)$.

2) $X = (0, 1)$. $f(x) \to +\infty$ при $x \to +0$

Тому будемо доводити, що $f$ не є рівн. непр. на $X$:

$$\exists\ x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n+1}: \quad x_n - y_n = \frac{1}{n(n+1)} \underset{n\to\infty}{\to} 0,$$

$$f(x_n) - f(y_n) = n - (n+1) = -1 \not\to 0, \ n \to \infty$$

$\Rightarrow f$ не є рівн. непр. на $X = (0, 1)$

3) $X = (1, +\infty)$.

Твердж. [N187 е)] Якщо $f \in C([a, +\infty))$ та $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$, то $f$ – р.н. на $[a, +\infty)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, $f(x) = \frac{1}{x}$ – неперер. на $[1, +\infty)$

$\Rightarrow f$ – р.н. на $[1, +\infty)$ $\Rightarrow$
$f$ – р.н. на $(1, +\infty)$.

$\boxed{N188\ 2)}$ Досл. на р.н. $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$,

1) $X = (0, \pi)$; ~~2) $X = (0, +\infty)$~~ 3) $X = (1, +\infty)$

<u>Розвязок</u> 1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\lim\limits_{x\to 0} \sin \frac{\pi}{x}$ не існує.

Тому будемо доводити, що $f$ – не є р.н. на $X = (0, \pi)$:

$$x_n = \frac{1}{2n}, \quad y_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + 2n} \qquad x_n - y_n \to 0 \text{ при } n \to \infty$$

$$f(x_n) - f(y_n) = \sin 2\pi n - \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = -1 \underset{n\to\infty}{\not\to} 0,$$

$\Rightarrow f$ не є рівн. неп. на $(0, \pi)$.

3) $X = (1, +\infty)$

$f$ – р.н. на $X$ згідно тверд. N187 е.

$\boxed{N188\ e)}$ $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, 1) $X=(0,1)$, 2) $X=(1,+\infty)$

Розвʼязок. 1) $X=(0,1)$ $f(1)=\sin 1$.

$\lim\limits_{x\to+0}\frac{\sin x}{x}=1 \Rightarrow$ функцію $f$ можна довизначити неперервним чином в т. $x=0$

$f(0)=1$ : $f^*(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & x\in(0,1]\\ 1, & x=0\end{cases}$ — непер. на компакті $[0,1] \Rightarrow$

$f^*$ — р. непер. на $[0,1] \Rightarrow$

$f$ — р. н. на $(0,1)$

2) $X=(1,+\infty)$. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ — р. н. згідно тв. N187 е

$\boxed{N188\ л)}$ $f(x)=\frac{x^6-1}{\sqrt{1-x^4}}$; ~~1) $X=(-1,0)$~~, 2) $X=(0,1)$, ~~3) $X=(-1,1)$~~

~~4) $X=(1,+\infty)$~~

Розвʼязок 2) $1-x^4=0 \Rightarrow x_{1,2}=\pm1$

$\lim\limits_{x\to1}\frac{x^6-1}{\sqrt{1-x^4}}=\lim\limits_{y\to1}\frac{y^3-1}{\sqrt{1-y^2}}=\lim\limits_{y\to1}\frac{(1-y)(1+y+y^2)}{(1-y)^{1/2}(1+y)^{1/2}}=$

$=\lim\limits_{y\to1}\frac{(1+y+y^2)(1-y)^{1/2}}{(1+y)^{1/2}}=0 \Rightarrow$ можна довизн

ф-ю $f$ непер. чином в т. $x=1$ значенням 0 яка буде непер. на $[0,1] \Rightarrow f$ — р. н. на $(0,1)$ за теор. Кантора

~~4) $X=(1,+\infty$~~

$\boxed{N190\ и\ з}$ $f(x)=x^2$ $X=(0,+\infty)$

Розвʼязок. $f$ — зростає швидше лінійної функції на нескінченності, тому будемо доводити, що $f$ не є р. н. на $X$

$x_n=\sqrt{n+1}$, $y_n=\sqrt{n}$, $x_n-y_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=$

$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\to0$, $n\to\infty$

$f(x_n)-f(y_n)=n+1-n=1 \not\to 0$, $n\to\infty$

$\Rightarrow f$ — не є р. н. на $(0,+\infty)$.

$\boxed{N 190\ з)}$ $f(x)=\sqrt{x}$, 1) $X=(0,1)$; 2) $X=(1,+\infty)$; ~~3) $X=R^+$~~

Розв'язок 1) $f$ – р.н. на $(0,1)$ за теор. Кантора.

2) $X=(1,+\infty)$. $f$ – повільніше зростає, ніж степенева функція, тому будемо доводити, що $f$ – р.н. на $(1,+\infty)$.

$\forall \varepsilon>0 \quad |f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| = \dfrac{|x-y|}{|\sqrt{x}+\sqrt{y}|} < |x-y| < \varepsilon$

$\Rightarrow \exists\, \delta=\varepsilon : \forall\, x,y>1 : |x-y|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$

$\Rightarrow f$ – р.н. на $(1,+\infty)$.

$\boxed{N 188\ д)}$ $f(x)=\ln x$; 1) $X=(0,1)$; 2) $X=(1,e)$; 3) $X=(e,+\infty)$

Розв'язок. 1) $X=(0,1)$

$x_n=e^{-n}$, $y_n=e^{-2n}$, $x_n-y_n\to 0$, $n\to\infty$

$f(x_n)-f(y_n) = -n+2n = n \not\to 0$ при $n\to\infty$

$\Rightarrow f$ – не є р.н. на $(0,1)$.

2) $X=(1,e)$

$f$ – р.н. за т. Кантора

3) $X=(e,+\infty)$. $\ln x$ – повільніша за лінійну функцію на $\infty$, тому будемо доводити р.н.:

Нехай $x>y>e$

~~$\forall \varepsilon>0$~~ $|f(x)-f(y)| = |\ln x-\ln y| = \left|\ln\dfrac{x}{y}\right|$

$= \left|\ln\left(1+\dfrac{x-y}{y}\right)\right|$

$\forall (x_n)\subset X$, $\forall (y_n)\subset X$ : $x_n-y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$|f(x_n)-f(y_n)| = \left|\ln\left(1+\dfrac{x_n-y_n}{y_n}\right)\right| \to \Big/ y_n>e,\ x_n-y_n \underset{n\to\infty}{\to} 0 \Big/$

$\to 0$, $n\to\infty$ $\Rightarrow f$ – р.н. на $(e,+\infty)$

Д/З N 188 в), к), у), ~~[illegible]~~, N 189 ю),

N 190 а), д), т); N 188 ж)

**N147 8),12),13),15); N148 12); 32); N149 1),8); - з нового збірника**