

Занятие 12. Непрерывность функций

(Гейне)

Озн. Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ наз. непрерывной в точке $x_0 \in D_f$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$ каждого раз, как только $x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$ ($x_n \in D_f$).

Теорема. Если $x_0 \in D_f$, x_0 — граничная точка D_f , то f — непр. в x_0 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

В изолированной точке $x_0 \in D_f$ $\forall$ функции f — непр.

Озн. (Коши) Функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ наз. непрерывной в $x_0 \in D_f$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in D_f (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

N161 Проверим с помощью озн. Гейне на Коши, является ли непрерывность функции

а) $f(x) = \cos x$.
Зафикс. $\forall x_0 \in \mathbb{R}$.
 $\Delta \forall \varepsilon > 0$ найдём

$$|f(x) - f(x_0)| = |\cos x - \cos x_0| = \left| -2 \sin \frac{x - x_0}{2} \sin \frac{x + x_0}{2} \right| < 2 \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0| < \varepsilon \text{ при } |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

откуда, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon. \blacksquare$

б) $f(x) = \arctg x$.

Δ Зафикс. $\forall x_0 \in D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \right\}$

1) $x_0 = 0 \Leftrightarrow |\arctg x - \arctg x_0| = |\arctg x| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$
 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \varepsilon : |x - 0| < \delta \Leftrightarrow |\arctg x| < \varepsilon$
 $\Rightarrow \arctg x$ — непр. в $x_0 = 0$;

2) $x_0 \neq 0$ $|\arctg x - \arctg x_0| < \varepsilon \Leftrightarrow |\arctg x - \arctg x_0| < \varepsilon$
 $= \left| \frac{x - x_0}{1 + x \cdot x_0} \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{x - x_0}{1 + (x - x_0) \cdot x_0 + x_0^2} \right| < \varepsilon$
 $\Leftrightarrow |x - x_0| < \frac{\varepsilon (1 + x_0^2)}{3|x_0| + 1} = \delta$

$\Rightarrow f$ — непр. $\blacksquare$

Доказать, что f и g — непрерыв. на множ. X .
 Доказать непрерывность на X функций

а) $\varphi_1(x) = |f(x)|$, б) $\varphi_2(x) = f(|x|)$

⚡ $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерыв. за след. из непрерыв. композиции $\tilde{f}(g(x))$

а) $f(x) = |x|$, $g(x) = f(x)$
 б) $\tilde{f}(x) = f(x)$, $g(x) = |x|$

в) $f_+(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) \leq 0 \end{cases}$

г) $f_-(x) = \begin{cases} -f(x), & f(x) \geq 0 \\ 0, & f(x) < 0 \end{cases}$

⚡ В точках $x_0: f(x_0) \neq 0$ $f_+(x)$ и $f_-(x)$ — непрерыв. за след. из непрерыв. композиции $\tilde{f}(g(x))$

б) скажем

⚡ при $x: f(x) > 0$ $f_+(x) = f(x)$ — непрерыв.
 $f_-(x) = -f(x)$ — непрерыв. (из композиции $g(x) = f(x)$, $\tilde{f}(x) = -x$)

при $x: f(x) < 0$ $f_+(x) \equiv 0$ — непрерыв,
 $f_-(x) \equiv 0$

Запишем доказ. в т. $x_0: f(x_0) = 0$

в) $f_+(x_0) = 0$

$\forall \varepsilon > 0$ $|f_+(x) - f_+(x_0)| = |f_+(x)| \begin{cases} = |f(x)|, & \text{если } f(x) > 0 \\ = 0, & \text{если } f(x) \leq 0 \end{cases}$

⚡ Если $f(x_0) > 0$ f — непрерыв. в т. $x_0 \Rightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$
 $f(x_0) \leq 0 \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

⓪ 1) Если $f(x) < 0$
 f — непрерыв. в т. $x_0 \Rightarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

⓪ 2) $|f(x)| < \varepsilon$ ($\exists \delta > 0$ означ. непрерыв. f)

2) А если $2) \geq 0$

$|f_-(x) - f_-(x_0)| = |f_-(x) + f(x_0)| = |f_-(x)| < |f(x)| < \varepsilon$

N 164 a) Дослід. на неперервності композиції $f \circ g, g \circ f$

a) $f(x) = \operatorname{sgn}(x), g(x) = 1 + x^2$

Розв'язок $f(g(x)) = \operatorname{sgn}(1 + x^2) \equiv 1$ — непер.

$$g(f(x)) = 1 + (\operatorname{sgn}(x))^2 = \begin{cases} 2, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

— розривна в т. $x_0 = 0$.

$$(f(-0) \neq f(0), f(+0) \neq f(0))$$

N 165 a) Дослід. на неперервності та визначення характеру точки розриву.

$$f(x) = \begin{cases} 2(1 - 2^{\frac{x}{1-x}}) - 1, & x \neq 0 \text{ та } x \neq 1 \\ 1, & x = 0 \text{ або } x = 1 \end{cases}$$

Розв'язок. Діємо $x \rightarrow 1$, то знаменник у виразі $\frac{x}{1-x}$ обертає в 0.

Діємо $x \rightarrow 0$ то $1 - 2^{\frac{x}{1-x}} = 0, \Rightarrow$ обидва

знаменник в виразі $\frac{2}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}}$ обертає в 0.

В інших точках ($x \neq 0$ та $x \neq 1$)

f — непер., як композиція непер. функцій.

Дослід. в т. $x_0 = 1$:

Границя зліва $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}} = -\infty \neq f(1) = 1 \Rightarrow f - \text{розривна}$$

Границя справа $f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) =$

$$= \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}} = 2 \neq 1 - \text{розривна}$$

Дослід. в т. $x_0 = 0$

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} \frac{2}{1 - 2^{\frac{x}{1-x}}} = +\infty$$

$$f(+0) = -\infty$$

$x_0 = 1$ — точка розриву 1-го роду
 $x_0 = 0$ — точка розриву 2-го роду (полюс)

N166 в

Доказать, что функция не непрерывна в
всех точках характер точки разрыва

$$f(x) = \begin{cases} x \left[\frac{1}{x} \right], & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Результат: Функция $\left[\frac{1}{x} \right]$ разрывна, если $\frac{1}{x}$ — целое, то есть $\frac{1}{x} = n$, $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

Рассмотрим все точки разрыва: $x_n = \frac{1}{n}$, n — целое, $n \neq 0$.
 $f(x_n) = \frac{1}{n} \cdot [n] = \frac{n}{n} = 1$

$$f(x_n - 0) = \frac{1}{n} \cdot [n+0] = 1 = f(x_n) \Rightarrow f \text{ — непрерывна слева}$$

$$f(x_n + 0) = \frac{1}{n} [n-0] = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} \neq 1 \Rightarrow$$

$x_n = \frac{1}{n}$ — точки разрыва 1-го рода.

Итак, другие рассмотренные точки $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \left[\frac{1}{x} \right] = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{[y]}{y} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{[y]}{[y] + \{y\}}$$

$$\frac{n}{n+1} \leq \frac{[y]}{[y] + \{y\}} \leq 1, \text{ если } n \leq y < n+1$$

$$\Rightarrow 1, \text{ при } n \rightarrow \infty. \text{ При } x \rightarrow 0 \Rightarrow y \rightarrow \infty \Rightarrow n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow x \left[\frac{1}{x} \right] \rightarrow 1 \neq f(0) = 0$$

$\Rightarrow x=0$ — устранимая точка разрыва,

поэтому непрерывности f в т. 0 нет, мод
всегда есть непрерывная в т. 0 точка:

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x \left[\frac{1}{x} \right], & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

— непрерывна в т. $x_0 = 0$.

N 167 K

Доказать, что непрерывная функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{\sqrt{2}} \left[\frac{2x+\pi}{2\pi} \right], & x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \\ \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (2n+1), & x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Разбор. Пусть $\left[\frac{2x+\pi}{2\pi} \right] = n$ т.е. $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$,

то $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right)$. Означает, что на

каждом промежутке f — непрерывна, как композиция

непр. ф-ий. (хотя $\operatorname{tg} x$ имеет разрывы $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$ и не входит в доп. промежутки)

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (2n+1)$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n - 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi n - 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi n}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi n}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (1+2n) = f(x_n)$$

$\Rightarrow f$ — непрерывна слева.

$$f\left(\frac{\pi}{2} + \pi n + 0\right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + \pi n + 0} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\pi(n+1)}{\sqrt{2}} \right) =$$

$$= -\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi(n+1)}{\sqrt{2}} = \frac{\pi(n+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (2n+1) = f(x_n)$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{2}} (2n+1) = f(x_n) \Rightarrow f \text{ — непрерывна справа} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ — непрерывна на $\mathbb{R}$.

N 168 a)

Доказать, что непрерывна.

$$a) 1) \text{ Функция Дирихле } D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Разбор. 1) Пусть $x_0 \in \mathbb{Q}$.

$$f(x_0) = 1, \exists (x_n) \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$$

$$\text{А так } f(x_n) = 0 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0 \neq 1 \Rightarrow$$

f — не непрерывна в т. x_0 .

2) Пусть $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

$$f(x_0) = 0, \exists (x_n) \subset \mathbb{Q} : x_n \rightarrow x_0, n \rightarrow \infty$$

$$\text{А так } f(x_n) = 1 \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 1 \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$ — не непрерывна в т. x_0 .

Вывод: $D(x)$ разрывна в каждой точке.

N 168 б) Дослід. на непер. ф. ів Рімаєра
 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, \text{ де } m \text{ та } n - \text{взаємно прості} \\ 0, & \text{в існ. в інших випадках } (x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{0\}) \end{cases}$

Розв'язок. Нех. $x_0 = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \Rightarrow f(x_0) = \frac{1}{q}$.

$$x_n = \frac{np+1}{nq} \rightarrow x_0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$x_n \in \mathbb{Q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) = \frac{1}{nq} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$\Rightarrow f$ - розривна в т. $x_0 = \frac{p}{q}$.

$$\text{Нех. } L \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \quad x_n = \frac{p_n}{q_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} L, \quad x_n \in \mathbb{Q}$$

$$\Rightarrow q_n \rightarrow +\infty \Rightarrow f(x_n) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

$$= f(L) \Rightarrow \text{А так як } f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \Rightarrow$$

$$\text{рівність } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(L) = 0 \quad \text{справджується.}$$

$$\text{де } \forall (x_n): x_n \rightarrow L \Rightarrow f \text{ - непер.}$$

$$\text{де } \forall x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

Д/З. N 161 а), N 164 з), N 165 в),

N 166 г), N 167 п), N 168 а) 2), а) 5)

N 172 и) N 172 р), N 172 в)

N 129 8); N 130 2 6); N 131 20); N 132 7); N 134 14); N 135 1 а) д); N 137 4) 9) 14)

- з нового збірника