Заняття 9. Границя функції

Озн. Нех. $X \subset \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ наз. граничною точкою множини X, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad O_\varepsilon(x_0) \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$$

Озн. Множина всіх граничних точок мн-и X наз. похідною множиною та позначається X'.

Озн. Нехай $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$, та $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ – гранична точка мн-и D_f. Число $L \in \overline{\mathbb{R}}$ наз. частковою границею функції f в т. x_0, якщо

$$\exists (x_n) \subset D_f : \quad (x_n \to x) \wedge (\forall n \in \mathbb{N} \ x_n \neq x_0) \wedge$$
$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L.$$

Озн. Якщо множина часткових границь $E_f(x_0)$ складається з однієї точки $L \in \mathbb{R}$, то L наз. границею функції f в точці x_0 і позначається $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$. (озн. Гейне).

Озн. (Коші) Нех. $f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ та x_0 – гранична точка D_f, $L \in \mathbb{R}$. Число L наз. границею функції f в т. x_0, якщо $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x \in D_f \ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$.

Або $\forall \, O_\varepsilon(L) \quad \exists \, O_\delta(x_0) : \quad x \in O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in O_\varepsilon(L)$

$\boxed{\text{N 113}}$ Які з множин A є околами точок $0, \frac{1}{2}, 1, +\infty$ в просторі X

а) 3) $X = \mathbb{R}, \quad A = [\frac{1}{2}, +\infty)$

а) 7) $X = \mathbb{R}, \quad A = \mathbb{Q}$

б) 4) $X = [0, 1], \quad A = (0, 1)$

б) 8) $X = [0, 1], \quad A = [0, 1] \cap \mathbb{Q}$

$\boxed{N\,115}$ Для множин X знайти X', якщо а) $X=(0,1)$

б) $X=\mathbb{Q}$

в) $X=\{\frac{1}{2^k} \mid k\in\mathbb{N}\}$

$\boxed{N\,117}$ а) Навести приклад, якщо це можливо, множини $X\subset\mathbb{R}$: $X'\neq\emptyset$ та $X''=\emptyset$.

$\boxed{N\,119}$ Для всіх $n\in\mathbb{N}$ знайти $X^{(n)}$, якщо

г) $X=([0,1]\cap\mathbb{Q})\cup([1,2]\cap(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}))$

$\boxed{N\,120}$ а) Знайти $E_f(0)$, $\overline{\lim\limits_{x\to0}} f(x)$, $\underline{\lim\limits_{x\to0}} f(x)$, якщо $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$

Розвʼязок $\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to0} o(1)\cdot O(1)=0$

$\Rightarrow E_f(0)=\{0\}=\overline{\lim\limits_{x\to0}} f(x)=\underline{\lim\limits_{x\to0}} f(x)$.

б) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$

Нех. $x_n=\dfrac{1}{\alpha+2\pi n}$, $n\in\mathbb{N}$ $x_n\to0$, $n\to\infty$.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha\to\sin\alpha$

Таким чином, перебираючи різні α можна отримати часткові границі $\in[-1,1]$

$\Rightarrow E_f(0)=[-1,1]$, $\overline{\lim\limits_{x\to0}} f(x)=1$

$\underline{\lim\limits_{x\to0}} f(x)=-1$

$\boxed{N\,122}$ к) Записати озн. Коші $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$

Розвʼязок.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon,a)>0:\ \forall x\in D_f\ \ 0<a-x<\delta$

$\Rightarrow f(x)>\varepsilon$

№123 а) 3) Записати означ. Коші:
$y \to b-0$ при $x \to a+0$

Розв'язок

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in D_f \ 0 < x - a < \delta \Rightarrow b - f(x) < \varepsilon$

№126 а) знайти $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ та для заданого ε
знайти δ (із озн. Коші)

$f(x) = x^3$, $x_0 = 2$, $\varepsilon = 0.1$.

Розв'язок. $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$. Доведемо це.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in D_f \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$

$x_0 = 2$, $a = 8$.

$|x^3 - 8| = |x-2|\,|x^2 + 2x + 4| = |x-2|\,|(x-2)^2 + 6x| =$

$= |x-2|\,|(x-2)^2 + 6(x-2) + 12| \leq |x-2|\,(|x-2|^2 + 6|x-2| + 12)$

$\leq$ / нехай $\delta < \frac{1}{6}$ $\Rightarrow$ / $\leq$ $14|x-2| < 20|x-2| < \varepsilon$

$\Rightarrow \delta < \varepsilon/20$.

Для $\varepsilon = 0.1$ $\exists \delta = \frac{0.1}{20} = 0.005$

№127 Символи Ландау

Озн. $g = O(f)$, $x \to x_0$, якщо

$\exists M > 0 \ \exists O_\delta(x_0) \subset D_f = D_g : \forall x \in O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$|g(x)| \leq M\,|f(x)|$

Озн. $g = o(f)$, $x \to x_0$, якщо

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists O_\delta(x_0) \subset D_f = D_g \ \forall x \in O_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$

$|g(x)| < \varepsilon\,|f(x)|$

Озн. $f \sim g$, $x \to x_0$, ~~якщо~~ якщо $f - g = o(f)$, $x \to x_0$.

Критерій еквівалентності.

$f \sim g$, $x \to x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$.

$\boxed{\text{№128}}$ а)) Довести, що при $x \to 0$ (в околі т. 0) виконуються твердж.

а) $x^m = o(x^n)$, $m > n$; г) $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$, при $m > n$

Розв'язок

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists O_\varepsilon(0)$:

а) $\forall x \in O_\varepsilon(0) \setminus \{0\} \quad |x^m| < \varepsilon_1 |x^n|$?

$\forall \varepsilon_1 > 0 \ \exists O_\varepsilon(0) \ \forall x: \ 0 < |x| < \varepsilon \quad |x^m| < \varepsilon_1 |x^n|$?

$$\frac{|x^m|}{|x^n|} = |x^{m-n}| < \varepsilon_1 \quad ? \quad (*)$$

$\forall \varepsilon_1 > 0 \quad \exists \varepsilon > 0: \ \varepsilon = \varepsilon_1^{\frac{1}{m-n}}$

$(*)$ виконується

$$\boxed{g = o(f), \ x \to x_0, \ \text{якщо} \ \lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^m}{x^n} = \lim_{x \to 0} x^{m-n} = |m-n > 0| = 0$$

$\Rightarrow x^m = o(x^n)$.

г) $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$.

◄ Нехай $g_1 = o(x^m)$, $\Rightarrow$

$$\frac{g_1(x)}{x^m} \to 0, \quad x \to 0.$$

$$\frac{g_1(x)}{x^n} = \frac{g_1(x)}{x^m} \cdot x^{m-n} = o(1) \cdot x^{m-n} \to 0, \quad x \to 0$$

$\Rightarrow g_1 = o(x^n) \Rightarrow$

$o(x^m) + o(x^n) = o(x^n) + o(x^n) \overset{?}{=} o(x^n)$

Нехай $g_1(x) = o(x^n)$, $g_2(x) = o(x^n)$

$$g_1 + g_2 \overset{?}{=} o(x^n)$$

$$\frac{g_1(x) + g_2(x)}{x^n} = \frac{g_1(x)}{x^n} + \frac{g_2(x)}{x^n} = o(1) + o(1) \to 0$$

$\Rightarrow g_1 + g_2 = o(x^n) \Rightarrow o(x^n) + o(x^n) = o(x^n)$

►

N 131 ~~а) (x~~ Виконати перетворення (при $x\to0$)

а) $(x-x^2+x^3+o(x^4))(1-2x+3x^3+o(x^4)) =$

$= \Big/ \; x^m\cdot o(x^n)=o(x^{m+n})$ N128 и) $\Big/ = x-3x^2+5x^3+x^4+o(x^4)$

N 132 Знайти, якщо це можливо границю при $x\to0$

а) $\dfrac{x^3-3x^2+o(x^3)}{6x^2+o(x^3)} = \dfrac{-3x^2+o(x^2)}{6x^2+o(x^3)} \to -\dfrac{1}{2}$

д) $\dfrac{x^3+o(x)}{x^3+o(x^2)} = \Big/ \begin{matrix} x^3=o(x), \\ x^3=o(x^2) \end{matrix} \Big/ = \dfrac{o(x)}{o(x^2)}$

Цю границю знайти неможливо, бо, наприклад $5x^2=o(x)$ та $x^3=o(x^2)$

$\Rightarrow \dfrac{5x^2}{x^3} = \dfrac{5}{x} \to \infty$,

але $5x^3=o(x)$ та $x^3=o(x^2)$,

$\dfrac{5x^3}{x^3} \to 5$ при $x\to0$

$\infty \neq 5$

N 134 б) Довести, що $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{a}$.

◁ Нех. $a=0$, тоді треба довести, що $\sqrt[3]{x}\to0$ при $x\to0$.

Тр. дов., що $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|x|<\delta \Rightarrow |\sqrt[3]{x}|<\varepsilon$

$|\sqrt[3]{x}| = \sqrt[3]{|x|} < \varepsilon$ — викон. при $|x|<\varepsilon^3=\delta$.

Нех. $a\neq0$.

$|\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}| = \dfrac{|x-a|}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ax}+\sqrt[3]{x^2}} = \dfrac{|x-a|}{(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{2}\sqrt[3]{a})^2+\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}}$

$< \dfrac{|x-a|}{\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}} < \varepsilon \Rightarrow \exists\ \delta = \varepsilon\cdot\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}$

▷ **N95 12)16) ;N100 2д); N106 11); N107 4); N108 2)10); з нового збірника**

Д/З. N115 м)п), N120 е, N122 ж),
N123 б 6), N128 л),
N131 г), N132 б) к), N134 д)