Заняття 8. Числові послідовності

$\boxed{N105}$ ~~д)~~ ~~$\forall \varepsilon>0$~~ Що можна сказати про послідовність $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$, якщо для фіксованого $a \in \mathbb{R}$ виконується умова

д) $\forall \varepsilon>0 \ \exists n_\varepsilon : \forall n>n_\varepsilon \ |x_n - a| < \varepsilon$

$x_n \to a, \ n \to \infty$

м) $\exists \varepsilon>0 \ \forall n_0 \ \exists n>n_0 \ |x_n - a| \geq \varepsilon$

$x_n \not\to a, \ n \to \infty$

а) $\forall \varepsilon>0 \ \forall n_0 \ \forall n>n_0 \ |x_n - a| < \varepsilon$

Розв'язок. В $\forall$ околі точки $a$ містяться всі елементи послідовності, крім, можливо, першого $\Rightarrow$

$\Rightarrow (x_n)$ – майже стаціонарна послідовність:

$x_1, a, a, a, a, a, \ldots$

$\boxed{N94}$ Для послідовності $(x_n)$ знайти $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ на $\overline{\mathbb{R}}$, якщо

а) $x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$

Розв'язок. Нех $\Omega = (M, \leq)$ – частково впор. простір

Озн. Елемент $\overline{x}\ (\underline{x}) \in M$ наз. мажорантою (мінорантою) множини $X$, якщо $\forall x \in X$ $x \leq \overline{x} \quad (x \geq \underline{x})$.

Озн. Найменша з мажорант, ~~наз.~~ ~~sup~~ якщо вона існує, наз. верхньою гранню, познач. $\sup X$.

Озн. Найбільша з мінорант, якщо вона існує наз. нижньою гранню та познач. $\inf X$.

Озн. Якщо у посл. $(x_n)$ $\exists$ підпосл. $(x_{n_k}) \to a$, то це число наз. частковою границею послідовності $(x_n)$.

Озн. Нех. $A \subset \overline{\mathbb{R}}$ – множина усіх часткових границь посл. $(x_n)$

Верхня границя $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = \sup A$,

нижня границя $\underline{\lim} x_n = \inf A$

Знайдемо всі часткові границі:

$$\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n \text{ — непарне} \\ 1, & \text{якщо } n = 4k \\ -1, & \text{якщо } n = 4k+2 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cancel{\lim_{n\to\infty} x_n =} \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} x_{2k-1} = 1 \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{4k} = \lim\limits_{k\to\infty} 1 + \frac{4k}{4k+1}\cos 2\pi k = 2 \\ \lim\limits_{k\to\infty} x_{4k-2} = \lim\limits_{k\to\infty} 1 + \frac{4k-2}{4k-1}\cos(-\pi+2\pi k) = 0, \end{cases}$$

$x_{4k} \nearrow$, $x_{4k-2} \searrow$ $\Rightarrow$ $\sup(x_n) = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 2$

$\inf(x_n) = \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = 0$

$\boxed{N95}$ Знайти множину всіх часткових границь послідовності:

з) $x_n = \sin n^\circ$

Розв'язок. $A = \{\sin 0^\circ = 0, \sin 1^\circ, \ldots, \sin 359^\circ\}$,

бо $x_{k_0+360m} = \sin(360^\circ \cdot m + k_0^\circ) = \sin k_0^\circ$ $\forall k_0 = \overline{0, 359}$

Більш точно, всього 180 різних значень:

$A = \{\sin(-89^\circ), \sin(-88^\circ), \ldots, \sin(-1^\circ), \sin 0^\circ,$
$\sin(1^\circ), \ldots, \sin(89^\circ), \sin(90^\circ)\}$.

$\boxed{N96}$ Побудувати, якщо це можливо, послідовність $(x_n)$, множина часткових границь якої:

в) всі числа із $[0, 1]$

$x_n = |\sin n|$ або $x_n = |\cos n|$

е) $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Розв'язок. Задача 95 б)

$1, \frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}, \frac{1}{2}+\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1+\frac{1}{4}, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}, \frac{1}{3}+\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots$

$\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}, \frac{1}{2}+\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots$

$x_{n_k} = \frac{1}{k} + \frac{1}{k+n}$ $\longrightarrow 0, \ k \to \infty$

$\longrightarrow \frac{1}{k}, \ n \to \infty$

~~A=R~~

$\boxed{N 97 \ a)}$ Нехай всі члени послідовності $(x_n)$ додатні числа. Довести, що якщо $\lim_{n \to \infty} x_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то послідовності середніх арифметичних $\xi_n$, середніх гармонічних $y_n$, та середніх геометричних $\eta_n \to l$

$\triangleleft$ 1) $\xi_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$

$|\xi_n - a| = \left| \frac{x_1 - a}{n} + \frac{x_2 - a}{n} + \ldots + \frac{x_n - a}{n} \right| \leq$

$\leq \frac{|x_1 - a|}{n} + \ldots + \frac{|x_n - a|}{n} =$

$x_n \to a \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists N_0 : \forall n > N_0 \ |x_n - a| < \varepsilon$

$= \frac{|x_1 - a|}{n} + \ldots + \frac{|x_{N_0} - a|}{n} + \frac{|x_{N_0+1} - a|}{n} + \ldots + \frac{|x_n - a|}{n}$

$\leq \frac{|x_1 - a|}{n} + \ldots + \frac{|x_{N_0} - a|}{n} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{n} + \ldots + \frac{\varepsilon}{n}}_{n - N_0} \leq$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \forall n > N_1 \ \frac{1}{n} < \varepsilon$

$x_n$ – зб. $\Rightarrow x_n$ – обмеж. $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n$

$|x_n| < M$, $|x_n - a| < 2M$

$\leq 2M\varepsilon + \varepsilon = (2M+1)\varepsilon$

$M$ – скін., $\varepsilon$ – нес. мал. $\Rightarrow$

$\xi_n \to a$.

2) Те, що $y_n \to a$ доводиться за доп. теореми Тепліца:

Нех. 1) $p_{nk} \geq 0$

2) $\sum_{k=1}^{n} p_{nk} = 1$;

3) $\lim_{n \to \infty} p_{nk} = 0$ для $\forall$ фіксованого $k$

4) $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, тоді

послідовн. $t_n = \sum_{k=1}^{n} p_{nk} x_k$ збігається до $a$.

3) Оскільки $y_n \le z_n \le t_n \Rightarrow z_n \to a,\ n\to\infty$. ▼

$\boxed{N\,97\ б)}$ ~~Довести~~, Нехай $x_n > 0\ \forall n\in\mathbb{N}$. Довести, що якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = l\in\overline{\mathbb{R}}$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = l.$$

▲ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{x_n}{x_{n-1}}}$ $\overset{N97a)}{=}$

середнє геометр. для $y_n = \frac{x_n}{x_{n-1}}$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\ldots+y_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n-1}} =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = l.$ ▼

$\boxed{N\,98}$ а) Знайти границю

$$x_n = \left(\frac{n!}{n^n e^{-n}}\right)^{1/n}$$

Розв'язок. $x_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}}$

Тоді $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = ?$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{(n+1)^{n+1}}\,n^n\cdot e =$

$= \lim\limits_{n\to\infty}\frac{e}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = 1 \Rightarrow$

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = 1.$

$\boxed{N\,102}$ в) Довести твердження:

якщо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = b\in\mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} n(a_{n+1}-a_n) = c\in\mathbb{R}$,

то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b + c$.

<u>Доведення</u>. Нехай $c_n = n(a_{n+1}-a_n) \to c$

$\Rightarrow \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \to c$.

$\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} c_k = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k(a_{k+1}-a_k) = \frac{1}{n}\left(\underline{a_2}-a_1+\underline{2a_3}-\underline{2a_2}+\right.$

$\left.+3a_4-\underline{\underline{3a_3}}+\ldots+n a_{n+1}-n a_n\right) = \frac{1}{n}\left(-a_1-a_2-\ldots-a_n+n a_{n+1}\right) =$

$\ominus$ $\underbrace{-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k}_{\to -b} + a_{n+1} \longrightarrow c \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{n+1} \longrightarrow b+c, \quad n\to\infty.$

## Рекурентні послідовності

$\boxed{№91\ а)}$ Використовуючи теорему Вейєрштраса, знайти границю послідовності:

$x_1=5, \quad x_{n+1}=\sqrt{5+x_n}, \quad n\geq 1$

Розв'язок. Припускаючи, що посл. $x_n$ — збіжна, знайдемо границю:

$a=\sqrt{5+a} \Rightarrow a^2-a-5=0$

$D=1+20=21$

$a_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{21}}{2}.$

Всі $x_n>0 \Rightarrow a=\frac{1+\sqrt{21}}{2}.$

Доведемо, що $x_n$ — збіжна. Для цього доведемо монотонність та обмеженість.

~~$x_n$ — обмеж.? $x_n>0$ — очевидно. За індукцією покажемо, що $x_n<\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ (n=1: $5<\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ — викон.) Нехай викон. для деяк. n~~

~~$x_{n+1}<\frac{1+\sqrt{21}}{2}$?~~

~~$x_{n+1}=\sqrt{5+x_n}<\sqrt{5+\frac{1+\sqrt{21}}{2}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{21}}{2}}$~~

(*) $x_n>\frac{1+\sqrt{21}}{2}$? — Доведемо це за індукцією.

$x_1=5>\frac{1+\sqrt{21}}{2}$ — викон.

Нехай (*) — викон.

$x_{n+1}=\sqrt{5+x_n}>\sqrt{5+\frac{1+\sqrt{21}}{2}}=\sqrt{\frac{11+\sqrt{21}}{2}}=$

$=\sqrt{\frac{22+2\sqrt{21}}{4}}=\sqrt{\frac{1+2\sqrt{21}+21}{4}}=\sqrt{\left(\frac{1+\sqrt{21}}{2}\right)^2}=\frac{1+\sqrt{21}}{2}.$

$\Rightarrow$ (*) викон. $\forall n\in\mathbb{N}$.

Залишилося довести, що $x_n \searrow$

$x_{n+1} - x_n = \sqrt{5+x_n} - x_n < 0$ ?

$\sqrt{5+x_n} < x_n$ ?     $5 + x_n < x_n^2$ ?

$x_n^2 - x_n - 5 > 0$
— виконується при
$\Rightarrow$ $x_n > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$

$+$   $\frac{1-\sqrt{21}}{2}$   $-$   $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$   $+$

$x_{n+1} - x_n < 0$ при $x_n > \frac{1+\sqrt{21}}{2}$ $\Rightarrow$ $x_n$ — монот. спадає

$\Rightarrow$ За теор. Веєрштраса $x_n$ — збіжна до $\frac{1+\sqrt{21}}{2}$.

Д/З. N105 л), N94 и), N95 р) N98 б)

N103 д) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$, $x \geq 0$

N104 а) б).

N90 11); N79 12); N80 12); N83 2);N88 6); #89 1)2); - з нового збірника