

Закатна 7.

Грацини посидговесови

НРЗ а)

Знајте грацино, векописноукоу
теорема уо здијави посидговесови?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m a_k n^k}{\sum_{k=0}^l b_k n^k} \quad (a_k \in \mathbb{R}, k=0, \dots, m; b_k \in \mathbb{R}, (k=0, \dots, l), a_m \cdot b_l \neq 0)$$

Развизок 1-и аснагор: $m=l$, тог?

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m a_k n^k}{\sum_{k=0}^l b_k n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \dots + a_1 n + a_0}{b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \dots + b_1 n + b_0}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m + \frac{a_{m-1}}{n} + \dots + \frac{a_1}{n^{m-1}} + \frac{a_0}{n^m}}{b_m + \frac{b_{m-1}}{n} + \dots + \frac{b_1}{n^{m-1}} + \frac{b_0}{n^m}} = \frac{a_m}{b_l}$$

2-и аснагор: $l > m$

$$\text{тог?} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m a_k n^k / n^l}{\sum_{k=0}^l b_k n^k / n^l} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_m}{n^{l-m}} + \frac{a_{m-1}}{n^{l-m+1}} + \dots + \frac{a_0}{n^l}}{b_l + \frac{b_{l-1}}{n} + \dots + \frac{b_0}{n^l}} = 0$$

3-и аснагор: $l < m$

$$\text{тог?} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^m a_k n^k / n^m}{\sum_{k=0}^l b_k n^k / n^m} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{o(1)}{o(1)} = \infty$$

($= +\infty$, ако $a_m \cdot b_l > 0$
 $= -\infty$, ако $a_m \cdot b_l < 0$)

НРЗ б)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \dots + \frac{(-1)^{n+1} n}{n} \right| \text{ (E)}$$

$$\text{Развизок (E)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |1 - 2 + 3 - \dots + (-1)^{n+1} n| =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n+1} \cdot \left[\frac{n+1}{2} \right]}{n} = \begin{cases} 1/2, & n \text{ не пар} \\ -1/2, & n \text{ пар} \end{cases} \Rightarrow x_n \text{ поз.}$$

НРЗ в)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - n^2} + n}{n - \sqrt[3]{n^3 - n^2}} \text{ (E)} \quad \text{небизн. } \infty - \infty$$

$$\text{Развизок (E)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n^3 - n^2)}{n^2 + n \cdot \sqrt[3]{n^3 - n^2} + (n^3 - n^2)^{2/3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + n^2 + n^2} = \frac{1}{3}$$

N83 u) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2n} \sinh^3 - \frac{3n}{6n+1} \right) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(o(1) \cdot O(1) - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$

N87 a) За да докаже критериум Коши за збирану

a) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{2^k}$

Развезок. $x_n \rightarrow \text{чрн } n \rightarrow \infty \Leftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0, p \in \mathbb{N} |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$

$\forall \varepsilon > 0 \quad |x_{n+p} - x_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k}{2^k} \right| = \left| \frac{\cos(n+1)}{2^{n+1}} + \dots + \frac{\cos(n+p)}{2^{n+p}} \right| <$

$\leq \frac{|\cos(n+1)|}{2^{n+1}} + \dots + \frac{|\cos(n+p)|}{2^{n+p}} \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \dots + \frac{1}{2^{n+p}} =$

$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} \right) < \frac{1}{2^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{2^p} + \dots \right) =$

$= \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon \Rightarrow n > \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists n_0 = \lceil \log_2 \frac{1}{\varepsilon} \rceil + 1 : \forall n \geq n_0, p \in \mathbb{N} |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$
 $\Rightarrow x_n \rightarrow \text{чрн } n \rightarrow \infty$

N87 p) $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Развезок. $x_n \not\rightarrow \text{чрн } n \rightarrow \infty, \Leftrightarrow$

$\exists \varepsilon > 0 : \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0, p \in \mathbb{N} : |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon.$

$|x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p} \right| \stackrel{p=n}{=} \underbrace{\left| \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n} \right|}_n \geq$

$\geq \underbrace{\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n}}_n = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2} = \varepsilon$

$\Rightarrow \exists \varepsilon = \frac{1}{2} : \forall n_0 \in \mathbb{N} \exists n \geq n_0, p \in \mathbb{N} |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon$
 $\Rightarrow x_n$ — развезок нејдоговору.

Число e.

№ 8 а) б)

Доказать:

а) последов. $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ монот. возрастает и
ограничена сверху

б) послед. $y_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ монот. спадает и
ограничена снизу.

$$\Delta \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n})^n} = (1 - \frac{1}{(n+1)^2})^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} > (1 - \frac{1}{n+1})^{\frac{n+1}{n}} = 1.$$

$\Rightarrow x_n$ - монот. возрастает

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} = \frac{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}}{(1 + \frac{1}{n+1})^{n+2}} = \frac{1}{(1 + \frac{1}{n+1})^n} \cdot \frac{n+1}{n} <$$

$$< \frac{1}{1 + \frac{n}{n^2+1}} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{n^3 + n^2 - n - 1}{n^3 + n^2 - n} < 1 \Rightarrow$$

y_n - монот. спадает.

$$\text{Так } (1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \Rightarrow x_n < y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

таким образом: $x_n < y_n$

$\{x_n\}$ ограничена сверху числом y_1 та

$\{y_n\}$ ограничена снизу числом x_1

$\Rightarrow$ За теор. Вейерштрасса $\{x_n\}$ - сходится
и $\{y_n\}$ - сходится.

Докажем, что $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имеют одну и ту же
пределную точку.

Реш. $x_n \rightarrow e, n \rightarrow \infty$, тогда

$$y_n - x_n = (1 + \frac{1}{n})^n \cdot \frac{1}{n} < \frac{e}{n} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow \infty$$

$$\Rightarrow y_n \rightarrow e, n \rightarrow \infty.$$

№ 8 б) 1) $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$

$$\Delta x_n < e < y_n \Rightarrow (1 + \frac{1}{n})^n < e < (1 + \frac{1}{n})^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(1 + \frac{1}{n})^n < 1 < \ln(1 + \frac{1}{n})^{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n \ln(1 + \frac{1}{n}) < 1 < (n+1) \ln(1 + \frac{1}{n}) \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \ln(1 + \frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$

N89 a) Доведем, что $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$.

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{4}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= \frac{\cancel{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \cancel{\left(1 - \frac{1}{2}\right)} \cancel{\left(1 - \frac{1}{4}\right)} \dots \cancel{\left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)}}{1 + \frac{1}{2}} =$$

x_n — строго убывает. Доведем $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} < 1$.

$x_n > 0$ (все множители > 0)

$\Rightarrow x_n$ — монотонно убывает $\Rightarrow$ по теор. Вернандса $\Rightarrow$ сходится. $\square$

N89 б) $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$.

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) =$$

$$= 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \left(1 + \frac{1}{8}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2^n}\right) = \dots = 2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$$

$$x_n = \exp\left(\ln\left(\prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right)\right) =$$

$$= \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{2^k}\right)\right) < \exp\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}\right) < \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) <$$

$$< \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}\right) = \exp\left(\frac{1/2}{1 - 1/2}\right) = \exp(1) = e.$$

$\Rightarrow x_n$ — монотонно возрастает.

А так x_n — возрастает: $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$

$\Rightarrow$ по теор. Вернандса x_n — сходится. $\square$

N89 в) $x_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

$$x_n = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \rightarrow \frac{1}{e} \quad \square$$

N89 г) $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$

$$x_n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \sim \sqrt[n]{e} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{f(x)} 1 \quad \square$$

N 92 a)

Довести, що $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ - збіжся
- посліг. Ейлера

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n =$$

$$= \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0 \Rightarrow x_n - \text{спадня}$$

Розгн. $y_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1):$

$$y_{n+1} - y_n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n+1}\right) > 0 \Rightarrow y_n - \text{зроста}$$

$$y_{n+1} < x_{n+1} \Rightarrow x_n - \text{адмет. зблну} \text{ чисел } y_n$$

та y_n адмет зблну чисел $x_n \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{x_n\} - \text{збіжся} \rightarrow C - \text{число Ейлера}$$

N 92 b)

Знайти значення: посл. $x_n = \frac{1}{\ln n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

Розв'язок $x_n \sim \frac{1}{\ln n} (\ln n + C) \rightarrow 1, n \rightarrow \infty$

N 93 a)

Знайти значення посліг. $a_n = \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2$

Розв'язок. Скорист. теор. Штольца.
Легко посл. $(y_n) \rightarrow +\infty$ монот. при $n \rightarrow \infty$ та

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \mathbb{R}, \text{ то } \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n k^2, y_n = n^3, y_n \rightarrow +\infty \text{ монот.}$$

$$\text{Тоді } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{(n+1)^3 - n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{3n^2} = \frac{1}{3}$$

N68 2)29); N72 6)16); N74 3)4)6)11); N78 3)6); N77 6)20) - з нового збірника

Д/З N 83 b) c); N 87 m) c), N 89 b) 2) e) 1)
N 92 d) g), N 93 d) x)