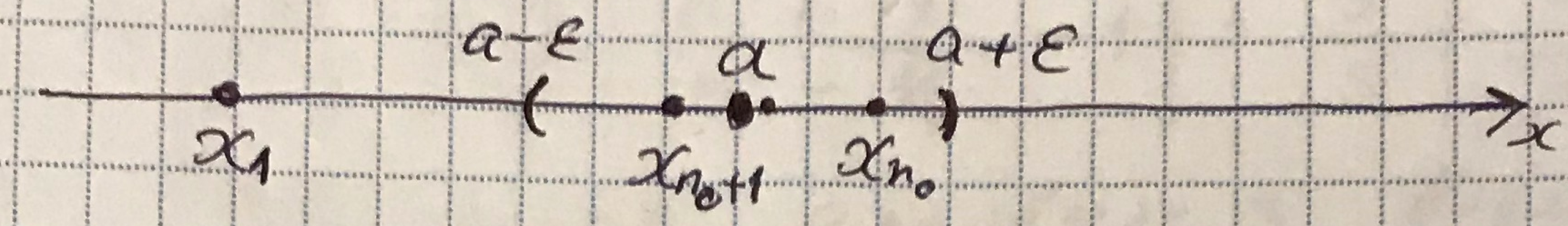
Заняття 6. Границя послідовності.

Озн. Нехай X – довільна множина. Відображення $f: \mathbb{N} \to X$ наз. послідовністю елементів множини X і познач. $\{x_n\}$, де $x_n = f(n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Озн. Число $a \in \mathbb{R}$ наз. границею послідовності $\{x_n\}$, якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0 \quad |x_n - a| < \varepsilon$$



Познач. $x_n \to a, \quad n \to \infty$.

Озн. $x_n \to +\infty$ $(x_n \to -\infty)$ при $n \to \infty$, якщо

$$\forall E > 0 \quad \exists n_0(E) \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n > E \quad (x_n < -E)$$

$\boxed{N 76 \text{ а)}}$ Використовуючи означення границі послідовності, знайти границю

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n^3+1}.$$

Розв'язок $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n^3+1} \overset{?}{=} 0.$

Доведем це за означенням:

$$x_n = \frac{2n}{n^3+1}, \quad a = 0$$

$$|x_n - a| = \left|\frac{2n}{n^3+1} - 0\right| = \frac{2n}{n^3+1} \cancel{< \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2}}$$

Нам треба довести, що

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_0 \quad \frac{2n}{n^3+1} < \varepsilon \quad (*)$$

$$\frac{2n}{n^3+1} < \frac{2n}{n^3} = \frac{2}{n^2} < \varepsilon \Rightarrow n^2 > \frac{2}{\varepsilon},$$

$$n > \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 = \left[\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\right] + 1:$$

$\forall n \geq n_0$ $(*)$ виконується

Отже, довели, що $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \frac{2n}{n^3+1} = 0.$

$\boxed{№76\ в)}$. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}$ — ?

<u>Розвʼязок</u>. $\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1} = \dfrac{3+\frac{1}{n^2}}{5-\frac{1}{n^2}} \xrightarrow{?} \dfrac{3}{5}$ при $n\to\infty$

Доведем це, використовуючи означення

$\forall \varepsilon>0\ \exists n_0\in\mathbb{N}:\ \forall n\geq n_0\ \left|\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}-\dfrac{3}{5}\right|<\varepsilon$? $(*)$

Перетворимо ліву частину нерівності $(*)$

$$\left|\frac{3n^2+1}{5n^2-1}-\frac{3}{5}\right| = \frac{3}{5}\left|\frac{n^2+1/3}{n^2-1/5}-1\right| = \frac{3}{5}\left|\frac{\frac{8}{15}}{n^2-1/5}\right|<\varepsilon$$

$\Rightarrow$ Розвʼязуємо нерівність відносно n

$\dfrac{24}{75(n^2-1/5)}<\varepsilon$ Або ще простішу:

$\dfrac{1}{n^2-1/5}<\varepsilon \Rightarrow n^2>\dfrac{1}{\varepsilon}+\dfrac{1}{5} \Rightarrow n>\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}+\dfrac{1}{5}}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists n_0=\left[\sqrt{\dfrac{1}{\varepsilon}+\dfrac{1}{5}}\right]+1:$
$\forall n\geq n_0$ $(*)$ виконується.

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+1}{5n^2-1}=\dfrac{3}{5}$.

$\boxed{№78\ а)}$. Довести за означенням, що число a не є границею послідовності

а) $x_n=\dfrac{n}{n+1}$, 1) $a=0$.

<u>Розвʼязок</u>. Треба довести, що $\dfrac{n}{n+1}\not\to 0,\ n\to\infty$.

$\exists\varepsilon>0:\ \forall n_0\in\mathbb{N}\ \exists n\geq n_0:\ |x_n-a|\geq\varepsilon$.

$|x_n-a|=\dfrac{n}{n+1}\geq\varepsilon$. $(*)$

Спростимо нерівність $(*)$:

$\dfrac{n}{n+1}\geq\dfrac{n}{n+n}=\dfrac{n}{2n}=\dfrac{1}{2}=\varepsilon$.

Отже, $\exists\varepsilon=\dfrac{1}{2}:\ \forall n_0\in\mathbb{N}\ \exists n\geq n_0:\ \dfrac{n}{n+1}\geq\dfrac{1}{2}$

Остання нерівність викон. $\forall n\in\mathbb{N}$

$\boxed{\text{№78 а) 3)}}$ $x_n = \dfrac{n}{n+1}$, $a = +\infty$.

Розв'язок. $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$, якщо

$\forall E > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \ \forall n \geq n_0 \ \ x_n > E$.

$x_n \not\to +\infty$ при $n \to \infty$, якщо

$\exists E > 0: \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \ \exists n \geq n_0: \ x_n \leq E$?

Спробуємо встановити останнє твердження.

$\dfrac{n}{n+1} \leq E = 1$.

Отже, $\exists E = 1: \ \forall n_0 \in \mathbb{N} \ \ \exists n \geq n_0: \ \ x_n \leq 1$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n \neq +\infty$

$\boxed{\text{№77 а)}}$ Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ $(\alpha \in \mathbb{R}, \ a > 1)$.

Доведення. Нехай m – ціле та $m \geq \alpha$.

Тоді $0 < \dfrac{n^\alpha}{a^n} \leq \dfrac{n^m}{a^n} = \left(\dfrac{n}{\sqrt[m]{a^n}}\right)^m = \left(\dfrac{n}{b^n}\right)^m$, де

$b = \sqrt[m]{a} > 1$.

Покажемо, що $\dfrac{n}{b^n} \to 0$ при $n \to \infty$.

Дійсно, $0 < \dfrac{n}{b^n} = \dfrac{n}{(1+(b-1))^n} = \dfrac{n}{1 + n(b-1) + \frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2 + \dots + (b-1)^n} <$

$< \dfrac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(b-1)^2} = \dfrac{2}{(n-1)(b-1)^2} \to 0$ при $n \to \infty$.

Далі, за теор. про арифм. дії над послідовностями (для добутку), отримаємо, що

$\left(\dfrac{n}{b^n}\right)^m \to 0$ при $n \to \infty$ $\Rightarrow$ $\dfrac{n^\alpha}{a^n} \to 0$ при $n \to \infty$

Цей приклад доводить, що експоненційна (показникова) функція швидше зростає, ніж степенева.

$\boxed{№77\ б)}$ Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ $(a>0)$.

▲ $0 < \left|\frac{a^n}{n!}\right| = \underbrace{\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{|a|}{m}}_{m \text{ множників}}\cdot\underbrace{\frac{|a|}{m+1}\cdot\ldots\cdot\frac{|a|}{n}}_{n-m \text{ множників, кожен з яких } \le \frac{|a|}{m+1}} \le$

$\le \frac{|a|^m}{m!}\cdot\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} =$

$\exists\, m\in\mathbb{N}: \frac{|a|}{m+1} < 1$. Доведемо, що у цьому випадку $\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} \to 0$ при $n\to\infty$.

Познач. $q = \frac{|a|}{m+1}$. Доках., що $q^n \to 0$ при $n\to\infty$, якщо $0 \le q < 1$.

Скористаємось нерівністю Бернуллі:

$\frac{1}{q^n} = \left(1+\left(\frac{1}{q}-1\right)\right)^n > 1+n\left(\frac{1}{q}-1\right) > n\left(\frac{1}{q}-1\right)$.

Тоді $q^n < \frac{q}{n(1-q)} < \varepsilon \quad \forall\, n > \frac{q}{\varepsilon(1-q)}$

Тоді $\left(\frac{|a|}{m+1}\right)^n \to 0 \Rightarrow \left(\frac{|a|}{m+1}\right)^{n-m} \to 0$ при $n\to\infty$.

Перший множник $\frac{|a|^m}{m!}$ — обмежений

$= O(1)\cdot o(1) \to 0$ при $n\to\infty$. ▼

Цей приклад доводить, що факторіал швидший за експоненційну (показникову) функцію.

$\boxed{№77\ ж)}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\varepsilon} = 0$ $(\varepsilon>0)$

без доведення.

Цей приклад демонструє, що логарифм повільніший за будь-яку степеневу функцію із степенем > 0.

$\boxed{N\,84\ \text{а)}}$ Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, якщо

$$x_n = \frac{n! - e^n + n^{10} + \ln(n+1)}{5^n - 25^n + n^4 + 1} \sim -\frac{n!}{25^n} \to ?$$

$\boxed{N\,84\ \text{в)}}$ Знайти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - \ln(n^{15}+n) + \ln(n+2^n)}{\log_2(1+n^{16}) - 2\sqrt[3]{n} + \sin n}$

$\boxed{N\,82\ \text{г)}\ 18)}$ ~~Типи невизначеностей~~

$a_n \to 0$, $b_n \to +\infty$ при $n\to\infty$.
Знайти, якщо можливо границю
$a_n \cdot b_n$

Розв'язок.

Типи невизначеностей (навести контрприклади — дві пари послідовностей з різними границями)

1) $0 \cdot \infty$
2) $\frac{0}{0}$
3) $\frac{\infty}{\infty}$
4) 0^0
5) $1^{+\infty}$

$\boxed{N81\ а)}$ Знайти границю сумою спрощення (принцип скорочення середніх)

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$$

Розв'язок. $x_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) =$

$$= \frac{1}{1} - \cancel{\frac{1}{2}} + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \cancel{\frac{1}{4}}\right) + \ldots + \left(\cancel{\frac{1}{n-1}} - \cancel{\frac{1}{n}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

$\boxed{N81\ з)}$ $x_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^3-1}{k^3+1}$

Розв'язок. $x_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} =$

$$= \prod_{k=2}^{n} \frac{(k-1)\left((k+1)^2-(k+1)+1\right)}{(k+1)\cdot(k^2-k+1)} =$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{(3^2-3+1)}}{(2^2-2+1)} \cdot \frac{2}{\cancel{4}} \cdot \frac{\cancel{(4^2-4+1)}}{\cancel{(3^2-3+1)}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{(5^2-5+1)}}{\cancel{(4^2-4+1)}} \cdot$$

$$\cdot \ldots \cdot \frac{\cancel{(n-2)}\cancel{(n^2-n+1)}}{n\,\cancel{((n-1)^2-(n-1)+1)}} \cdot \frac{\cancel{(n-1)}}{(n+1)} \cdot \frac{((n+1)^2-(n+1)+1)}{\cancel{(n^2-n+1)}}$$

$$= \frac{1\cdot 2}{n(n+1)} \cdot \left((n+1)^2-(n+1)+1\right) = \frac{2(n^2+n+1)}{n^2+n} \to 2$$

при $n \to \infty$

$\boxed{N81\ и}$ $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$

Розв'язок. Додамо і віднімемо в чисельнику одиницю:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3+6k^2+11k+6-1}{(k+3)!} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(k+3)(k+2)(k+1)-1}{(k+3)!} = \ldots$$

N57 11),20); N60 2); N63 1)20)24); N64 7)10); N68 24)28) - з нового збірника

Д/З. N 76 д) л); N78 в), N80 а) с) ш)
N81 е) м); N84 б) е).