Заняття 3. Числові функції

Озн. Множина $X \subset \mathbb{R}$ наз. симетричною відносно нульової точки, якщо $\forall x \in X$ $-x \in X$.

Озн. Ф-я f, що визначена на симетр. відносно нуля множині X, наз. парною, якщо $f(-x) = f(x)$; наз. непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$

Озн. Ф-я $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ наз. T-періодичною, якщо ~~$\forall x \in D_f$~~ $\exists T > 0: \forall x \in D_f$ $f(x) = f(x+T) = f(x-T)$.

$\boxed{N58}$ д) Досл. на парність/непарність

$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. $D_f = \mathbb{R}$

Розв'язок. $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{(-x)^2+1}) =$

$= \ln(\sqrt{x^2+1} - x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = -\ln(x+\sqrt{x^2+1}) =$

$= -f(x)$ — непарна.

а) $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x-1}$ ~~$= \{x^2$~~

Розв'язок. $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{x-1} = \begin{cases} x^2, & x \neq 1 \\ \text{не визн. при } x = 1 \end{cases}$

$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Але D_f не симетр. відносно 0.

Дійсно, $x = -1 \in D_f$, але $-x = 1 \notin D_f$.

$\Rightarrow$ не є парною, та не є непарною.

$\boxed{N60 \text{ в)}}$ Дослідити на періодичність

$f(x) = \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3}$

Розв'язок $D_f = \mathbb{R}$. Нехай $f_1(x) = \sin x$, $f_2(x) = \dfrac{\sin 2x}{2}$, $f_3(x) = \dfrac{\sin 3x}{3}$

$T_1 = 2\pi$, $T_2 = \pi$, $T_3 = \dfrac{2\pi}{3}$.

Періодом $f(x)$ буде спільне кратне T_1, T_2, T_3:

$T = 2\pi$ $(T/T_1 = 1,\ T/T_2 = 2,\ T/T_3 = 3)$

Дійсно, $f(x \pm 2\pi) = \sin(x \pm 2\pi) + \dfrac{\sin(2x \pm 4\pi)}{2} + \dfrac{\sin(3x \pm 6\pi)}{3} =$

$= \sin x + \dfrac{\sin 2x}{2} + \dfrac{\sin 3x}{3}$.

$\boxed{№60\ е)}$ $f(x) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$

Розв'язок. $\sqrt{2}$ — ірраціональне

$f_1(x) = \sin x$, $T_1 = 2\pi$; $f_2(x) = \sin(\sqrt{2}x)$, $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\pi$

Доведемо від супротивного, що f — не періодична.

Припуст., що $\exists\, T > 0$: $\cancel{f(x)}$ $f(x+T) = f(x)$.

$\sin(x+T) + \sin(\sqrt{2}(x+T)) = \sin x + \sin(\sqrt{2}x)$

$\sin(x+T) - \sin x + (\sin(\sqrt{2}(x+T)) - \sin(\sqrt{2}x)) = 0$

$2\sin\frac{T}{2}\cos\left(\frac{2x+T}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\sqrt{2}T}{2}\right)\cos\left(\frac{\sqrt{2}(2x+T)}{2}\right) = 0$

$\sin\frac{T}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{T}{2}\right) + \sin\left(\frac{\sqrt{2}T}{2}\right)\cos\left(\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right)\right) = 0$

$\Rightarrow \sin\frac{T}{2} \equiv 0$ та $\sin\left(\frac{\sqrt{2}T}{2}\right) \equiv 0$

$\Rightarrow T = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$ та $T = \sqrt{2}\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$2\pi k = \sqrt{2}\pi n \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{n}{k}$ — протиріччя

оскільки $\sqrt{2}$ — іррац, а n/k — рац.

$\Rightarrow f(x)$ не є періодичною.

$\boxed{№63}$ а) 1) Довести, що f — періодична, якщо $\exists\, a > 0\ \forall x \in D_f = \mathbb{R}$ викон. умова

$f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - f^2(x)}$

Доведення. $\cancel{4f^2(x+a) = f(x) - f^2(x)}$

$f^2(x+a) - f(x+a) + \frac{1}{4} = f(x) - f^2(x)$

$\cancel{(f(x+a) - f(x))(f(x+a) + f(x)) - (f(x+a) - f(x)) + \frac{1}{4} = 0}$

$\cancel{(f(x+a) - f(x))(f(x+a) + f(x) - 1) + \frac{1}{4} = 0}$

$f^2(x+a) - f(x+a) + \frac{1}{8} = -f^2(x) + f(x) - \frac{1}{8}$ $\Leftrightarrow$

Розглян. функц. $g(x) = x^2 - x + 1/8$. Тоді

маємо $g(f(x+a)) = -g(f(x)) = g(f(x-a))$

~~Оскільки $g \neq 0$ то $\Rightarrow f(x$~~

$\Leftrightarrow f^2(x-a) - f(x-a) + \frac{1}{8}$ $\Rightarrow$

$f(x+a) = f(x-a)\ \forall x \Rightarrow f$ — періодич., $T = 2a$

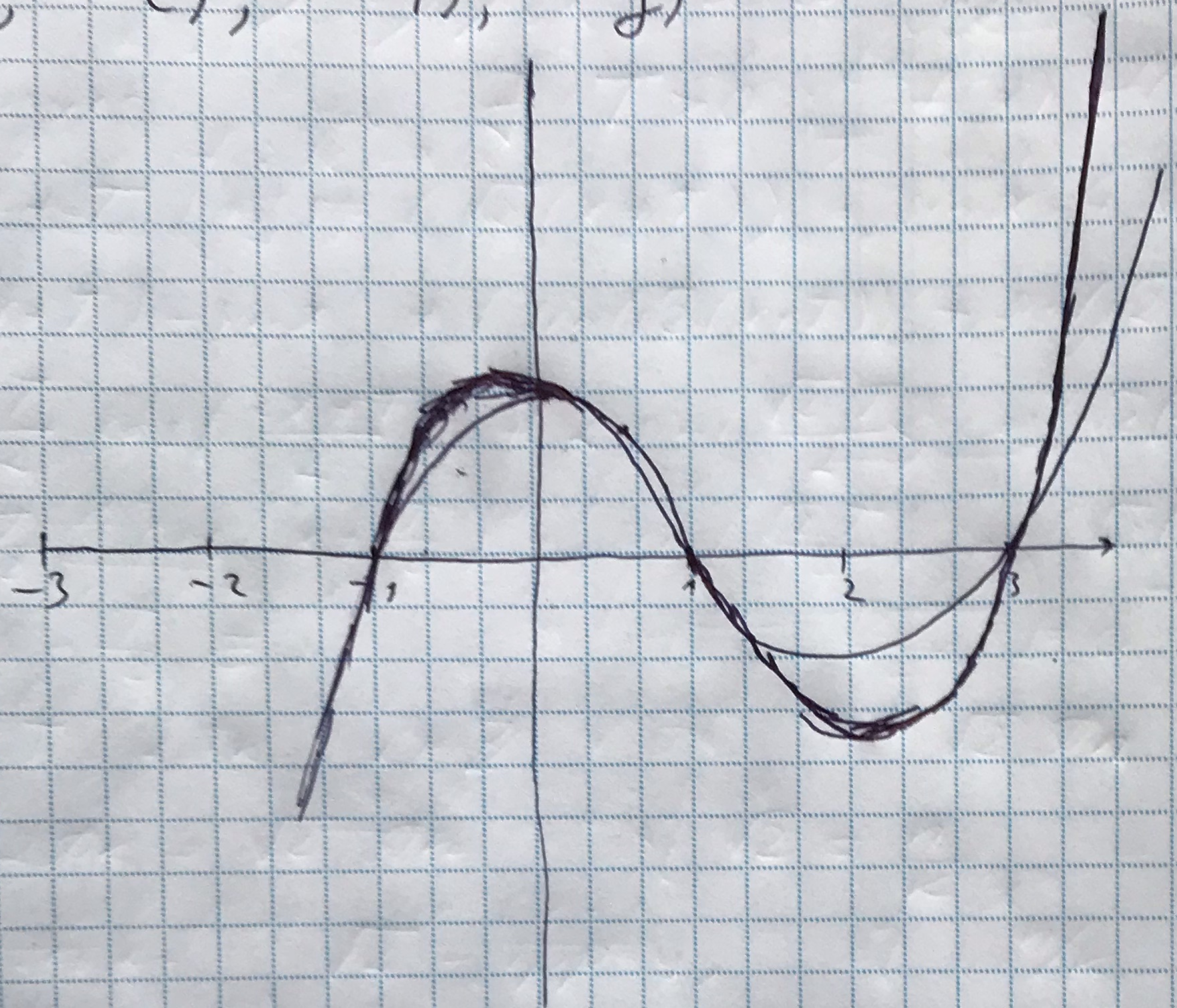
$\triangleright$

$\boxed{N64}$ $y = f(x) = (x-3)(x-1)(x+1)$.

Побудувати ескіз графіка функції

а) б); в) г); д) е); ж) и); о);

п); с); т); у)



$\boxed{N66\ н)}$ Методом складання побудувати графік функції $f(x) = \frac{2x+3}{x+3} + \frac{6x-1}{2-2x}$

$\boxed{N68\ а)}$ Шляхом множення побудувати графік функції $f(x) = x \cdot \sin x$

$\boxed{№ 69 \text{ н)}}$ Побудувати графік функції:

$$f(x) = \ln\left(\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{(x+5)^2} + \frac{4x-7}{2-x}\right) - \frac{\pi}{4}\right).$$

№ 58 х), № 60 э)

Д/З. № 67 щ), № 68 д), № 69 ж), з), у)