Заняття 2. Бінарні відношення. Функції (відображення)

X, Y, $X \times Y = \{(x,y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$

Γ наз. бінарним відношенням, якщо $\Gamma \subset X \times Y$

Обернене бінарне відношення $\Gamma^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in \Gamma\}$

$\Gamma_1 = пр_1 \Gamma = \{x \in X \mid \exists y \in Y : (x,y) \in \Gamma\}$

$\Gamma_2 = пр_2 \Gamma = \{y \in Y \mid \exists x \in X : (x,y) \in \Gamma\}$ — Проекції

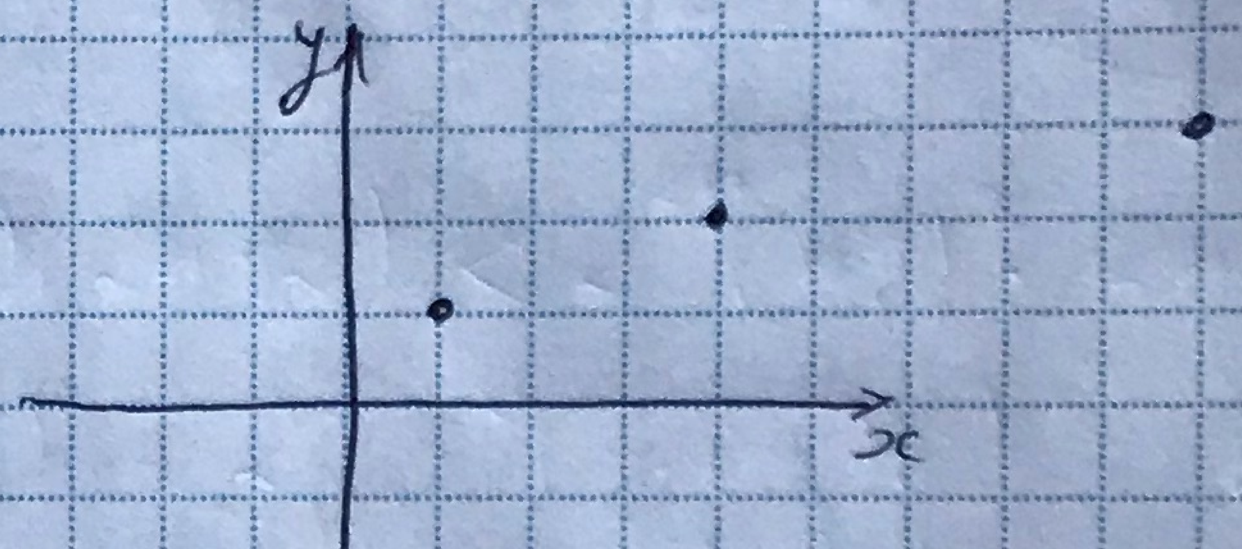
$\Gamma_1(x) = \{y \in Y \mid (x,y) \in \Gamma\}$ — перший переріз за доп. ел. x

$\Gamma_2(y) = \{x \in X \mid (x,y) \in \Gamma\}$ — другий переріз за доп. ел. y

$\boxed{№ 12}$ Побуд. перші та другі проекції та перерізи

а) $X = Y = \mathbb{N}$

1) $\Gamma = \{(x,y) \mid x = y^2\}$



$\Gamma_1 = пр_1 \Gamma = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$

$\Gamma_2 = пр_2 \Gamma = \mathbb{N}$

$$\Gamma_1(x) = \begin{cases} \varnothing, & x \notin \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \{n\}, & \text{якщо } x = n^2, \text{ де } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

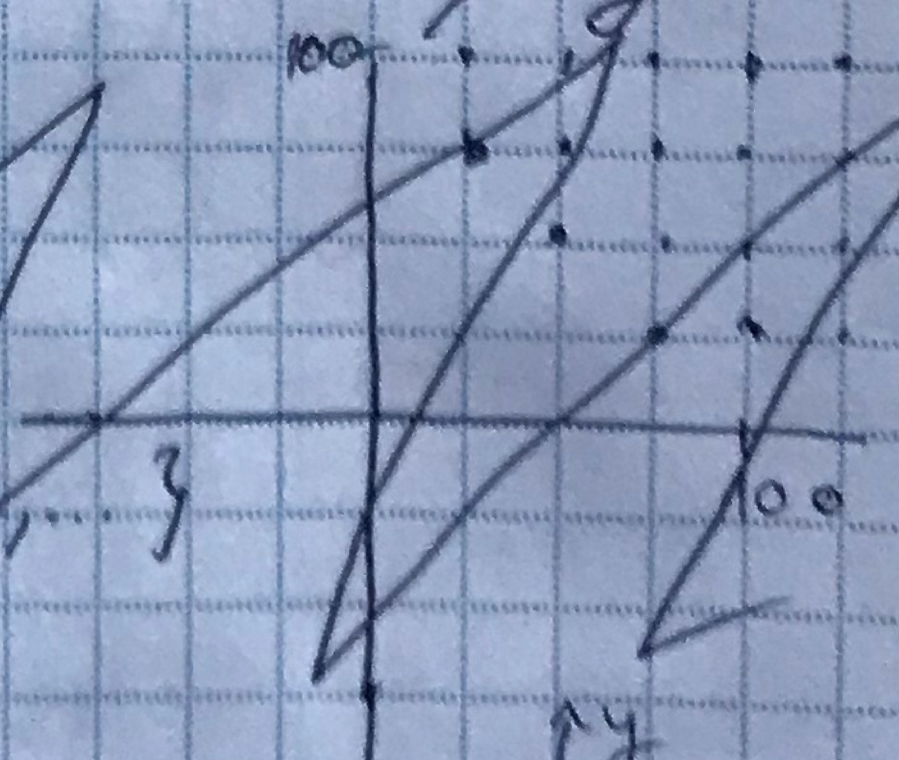
$$= \begin{cases} \{\sqrt{x} = n\}, & \text{якщо } x - \text{повний квадрат } (= n^2) \\ \varnothing, & \text{в іншому випадку} \end{cases}$$

~~3) $\Gamma = \{(x,y) \mid x + y \leq 100\}$~~

~~$пр_1 \Gamma = \mathbb{N}$, $пр_2 \Gamma = \mathbb{N}$~~

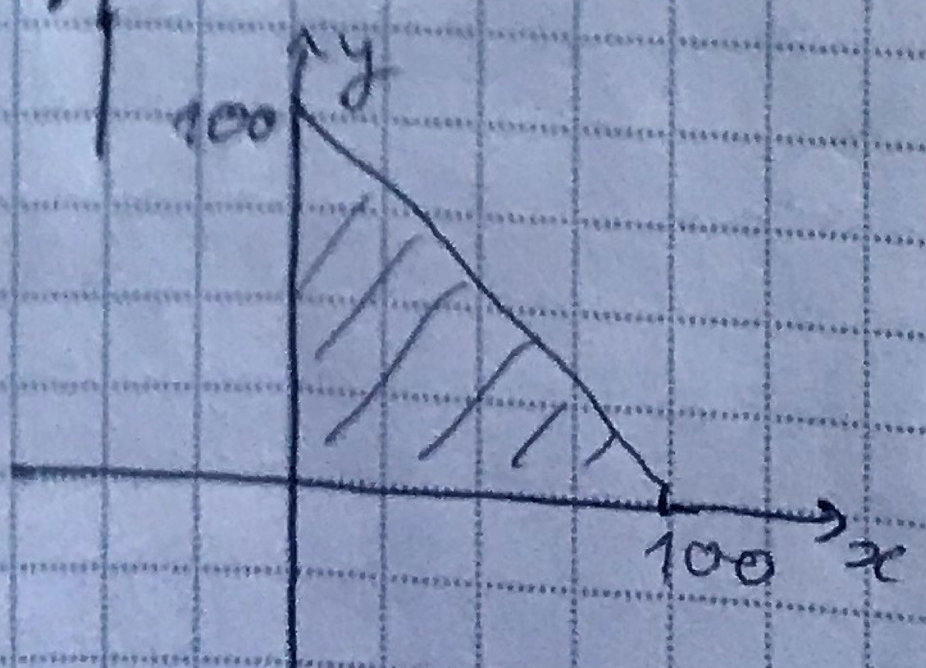
~~$\forall x \in \mathbb{N}$ $\Gamma_1(x) = \{x + k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$~~

~~$\forall y \in \mathbb{N}$ $\Gamma_1(y) = \{y$~~



$\Gamma_2(y) = \{y^2\}$.

3) $\Gamma = \{(x,y) \mid x + y \leq 100\}$



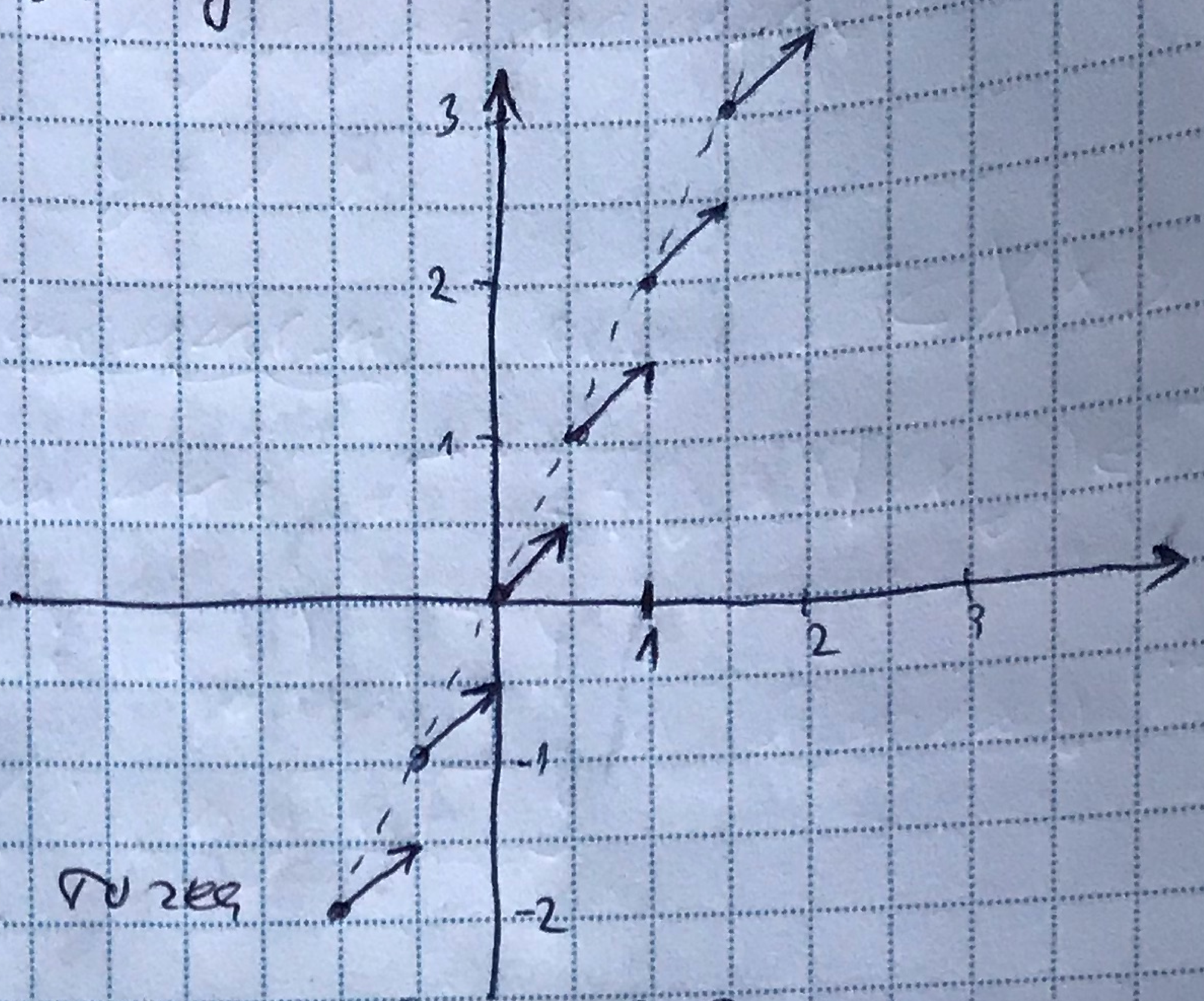
$пр_1 \Gamma = \{1, 2, \dots, 100\} = пр_2 \Gamma$

$$\Gamma_1(x) = \begin{cases} \varnothing, & x > 100 \\ \{1, 2, \dots, 100 - x\}, & \text{якщо } x \leq 100 \end{cases}$$

$$\Gamma_2(y) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } y > 100 \\ \{1, 2, \dots, 100 - y\}, & \text{якщо } y \leq 100. \end{cases}$$

$\boxed{№12\ г)\ 5)}$ $X = Y = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{(x,y) \mid y = x + 0.5 \cdot [2x]\}$

Розвʼязок



$пр_1 \Gamma = \mathbb{R}$

$пр_2 \Gamma = \cancel{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k, 2k+1)}$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [k, k + 1/2)$

$\Gamma_1(x) = \{x + 0.5 \cdot [2x]\}$ – одна точка

$$\Gamma_2(y) = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо } \{y\} \geq 0.5 \text{ (дробова частина)} \\ \{[y/2] + \{y\}\}, & \text{якщо } 0 \leq \{y\} < 0.5 \end{cases}$$

$\boxed{№12\ г)\ 18)}$ $X = Y = \mathbb{R}$, $\Gamma = \{(x,y) \mid y^3 - 9y^2 - y + 9 = 0 \wedge y^2 + y = x^2 + x\}$

Розвʼязок. $y^2(y-9) - (y-9) = 0$,

$(y^2 - 1)(y - 9) = 0$

$(y+1)(y-1)(y-9) = 0 \Rightarrow y_1 = -1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 9$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x = (-1)^2 - 1 = 0 \\ x^2 + x = 1^2 + 1 = 2 \\ x^2 + x = 9^2 + 9 = 90 \end{array} \right.$$

$x_1 = 0,\ x_2 = -1$

$\Rightarrow D = 1 + 8 = 9,\ x_3 = \frac{-1-3}{2} = -2,\ x_4 = 1$

$D = 1 + 360 = 361,\ x_5 = \frac{-1-\sqrt{361}}{2},\ x_6 = \frac{-1+\sqrt{361}}{2}$

$\Rightarrow \Gamma = \{(0,-1), (-1,-1), (-2,1), (1,1), \left(\frac{-1-\sqrt{361}}{2}, 9\right), \left(\frac{-1+\sqrt{361}}{2}, 9\right)\}$.

$пр_1 \Gamma = \{0; -1; -2; 1; \frac{-1-\sqrt{361}}{2}; \frac{-1+\sqrt{361}}{2}\}$

$пр_2 \Gamma = \{-1; 1; 9\}$

$$\Gamma_1(x) = \begin{cases} \{-1\}, & \text{якщо } x = 0 \vee x = -1 \\ \{1\}, & \text{якщо } x = -2 \vee x = 1 \\ \{9\}, & \text{якщо } x = \frac{-1-\sqrt{361}}{2} \vee x = \frac{-1+\sqrt{361}}{2} \end{cases}$$

$$\Gamma_2(y) = \begin{cases} \{-1; 0\}, & \text{якщо } y = -1 \\ \{-2; 1\}, & \text{якщо } y = 1 \\ \{\frac{-1 \pm \sqrt{361}}{2}\}, & \text{якщо } y = 9 \end{cases}$$

N16 Чи є функціональними бінарні відношення?

а) $\Gamma \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

3) $|x| + |y| = 4$

Γ – функціональне бінарне відношення – якщо в ньому немає різних пар з однак. першими компонентами.

Тобто, якщо $\exists (x, y_1) \in \Gamma \wedge \exists (x, y_2) \in \Gamma \wedge y_1 \neq y_2 \Rightarrow \Gamma$ не є функц. бінарн. відношенням.

Розвʼязок. $\Gamma = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}, |x| + |y| = 4\}$

$\exists\ x = 0,\ y_1 = -4,\ y_2 = 4;$

$(0, -4) \in \Gamma$ та $(0; 4) \in \Gamma$, $4 \neq -4 \Rightarrow$

Γ – не є функціональним б. в.

б) $\Gamma \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

6) $\Gamma = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N} \wedge x^2 + y^2 = 25\}$

Розвʼязок. Γ – функц., бо $\forall x \in \mathbb{N}$ або $\exists!\ y = \sqrt{25 - x^2}$ для $x = 3, x = 4,$ або $\neg\exists$ відповідного y.

в) $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

7) $x = 2y^{10} - 6y^8 + y^7 - 11y^3 + 5y - 1$

Розвʼязок. Старший степінь 10 – парне, отже графік має дві гілки, що спрямовані праворуч (коеф. $2 > 0$ в головн. доданку $2y^{10}$).

$\Rightarrow$ Знайдеться достатньо велике x_0: пряма $x = x_0$ перетинає обидві гілки

$\Rightarrow \Gamma$ – не функц. бін. відн.

6) $x = y^9 + 2y^7 + 3y^5 - 5y^3 + 15y + 1$

Розвʼязок $x'(y) = 9y^8 + 14y^6 + 15y^4 - 15y^2 + 15 =$

$= 9y^8 + 14y^6 + 15(y^4 - y^2 + 15) > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow x(y)$ – зростає $\forall y \Rightarrow \Gamma$ – функціональне бін. відн.

$\boxed{№17}$ $f: X \to Y$. $\mathcal{D}_f$ та E_f

$\mathcal{D}_f = пр_1 \Gamma$, $E_f = пр_2 \Gamma$.

а) $y = \cos x$

1) $X = Y = \mathbb{R}$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $E_f = [-1;1]$

2) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0,1]$

$\cos x \geq 0$ $\quad x \in \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$

$\Rightarrow \mathcal{D}_f = \bigcup\limits_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$

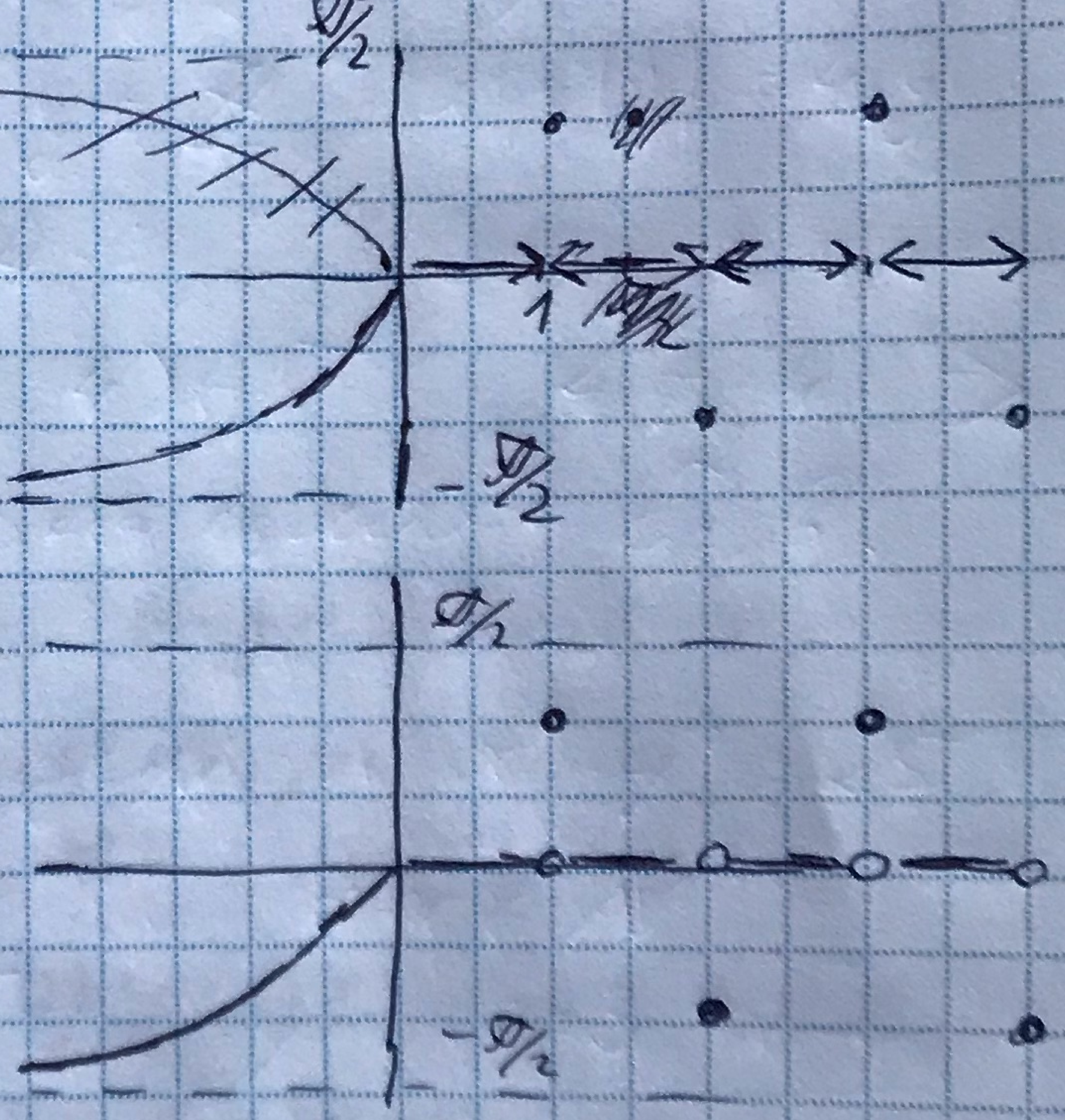
$E_f = [0,1]$

л) $y = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \leq 0 \\ \left[\sin \frac{\pi x}{2}\right], & x > 0 \end{cases}$

Розвʼязок.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$

$E_f = \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right] \cup \{1\}$.



$\boxed{№18}$ $y = \cos x$

1) $X = Y = \mathbb{R}$ $\quad$ бієкція? (Γ^{-1} - функц.)

відображення "в" - ? ($\mathcal{D}_f = X$)

відображення "на" - ? ($\mathcal{D}_f = X \cap E_f = Y$)

2) $X = \mathbb{R}$, $Y = [-1, 1]$

3) $X = \mathbb{R}$, $Y = [0, 1]$

№22 Знайти образ множини A та прообраз множини A' для функції: $f: X \to Y$.

а) $f(x) = 4 - x^2$, $X = Y = \mathbb{R}$

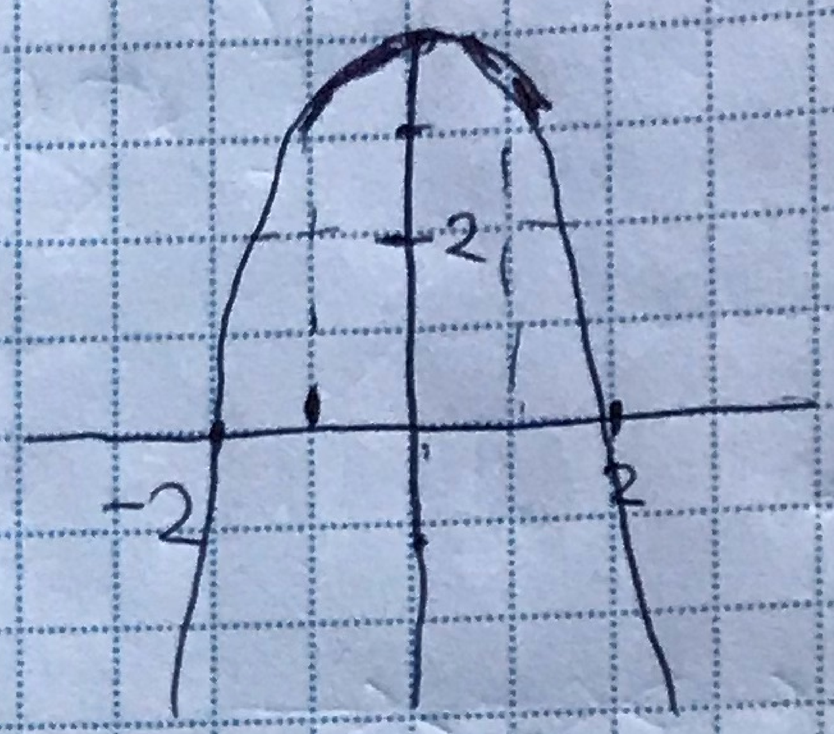
1) $A = \mathbb{R}$. $\forall A \subset D_f$ $f(A) = \{y \in E_f \mid \exists x \in A : f(x) = y\}$

$D_f = \mathbb{R}$, $f(A) = (-\infty, 4]$

3) $A = [-1, 1]$, $f(A) = [3, 4]$

9) $A' = \mathbb{R}^-$, $\forall A' \subset E_f$ $f^{-1}(A') = \{x \in D_f \mid f(x) \in A'\}$

$f^{-1}(\mathbb{R}^-) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$



10) $A' = [2, 4]$

$\cancel{f^{-1}(A') =}$

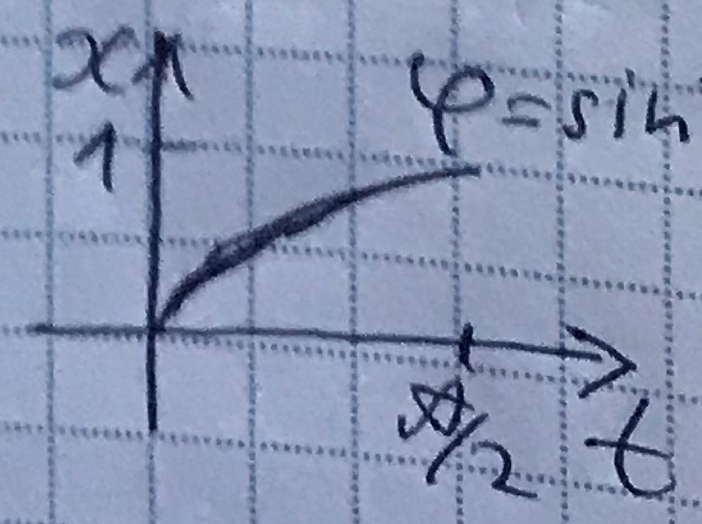
$4 - x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$

$f^{-1}(A') = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

№25 а) В яких випадках визначена функція $X \xrightarrow{f} Y$, що задана параметрично за доп. відображень $T \xleftrightarrow{\varphi} X$ та $T \xrightarrow{\psi} Y$, якщо ~~[illegible]~~ а) $\varphi(t) = \sin^2 t$, $\psi(t) = \cos^2 t$

1) $T = X = Y = \mathbb{R}$ — ні, бо φ — не бієкт. між T та X
$\sin^2 t = x_0$ може мати безліч розв'язків на $\mathbb{R}$

3) $T = [0, \frac{\pi}{2}]$, $X = Y = [0, 1]$
— так, φ-бієктивне відобр.



Тоді $\exists\ \varphi^{-1}(x) = \arcsin\sqrt{x}$,

$y(x) = \cos^2(\arcsin\sqrt{x}) =$
$= 1 - \sin^2(\arcsin\sqrt{x}) = 1 - (\sqrt{x})^2 = 1 - x$.

Д/З №12 2) 7), 8), №16 б 1) 2) 5), №17 м), №18 м), №22 е), №23 м)