Заняття 1. Метод матем. індукції

Принцип мат. індукції:
Твердження $A(n)$ – вірне для $\forall n \in \mathbb{N}$, якщо
1. Доведено, що $A(1)$ – вірне.
2. Із припущення, що $A(m)$ – вірне для деякого $m \in \mathbb{N}$ слідує, що $A(m+1)$ – також вірне.

$\boxed{№40\ б)}$ Використовуючи метод мат. індукції, довести рівність $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Доведення. ◄ $n=1$: $1^2 \overset{?}{=} \frac{1\cdot 2\cdot(2\cdot 1+1)}{6}$

$1 = 1$ – довели.

Припускаємо, що твердження вірне для $n=m$, тобто $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$.

Доведемо, що із цього припущення також буде випливати, що

$$\sum_{k=1}^{m+1} k^2 = \frac{(m+1)(m+2)(2(m+1)+1)}{6}.$$

Дійсно,

$$1^2+2^2+\dots+m^2+(m+1)^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}+(m+1)^2 =$$

$$= \frac{(m+1)}{6}\cdot(m\cdot(2m+1)+6(m+1)) = \frac{m+1}{6}\cdot(2m^2+7m+6) =$$

$$\circleddash \quad \begin{array}{r|l} 2m^2+7m+6 & m+2 \\ \hline 2m^2+4m & 2m+3 \\ 3m+6 & \\ 3m+6 & \\ 0 & \end{array} \quad \circleddash \ \frac{(m+1)(m+2)(2m+3)}{6}$$

►

N40 в) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

◁ При $n=1$ твердж очевидне.

Припускаємо, що $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{m} k\right)^2 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$ — вірне

Доведемо для $m+1$:

$$1^3+2^3+\dots+m^3+(m+1)^3 = \frac{m^2\cdot(m+1)^2}{4}+(m+1)^3 =$$

$$= \frac{(m+1)^2}{4}\cdot\left(m^2+4(m+1)\right) = \frac{(m+1)^2}{4}\cdot(m^2+4m+4) =$$

$$= \frac{(m+1)^2\cdot(m+2)^2}{4}$$ — довели ▷

N40 е) $\sum_{k=1}^{n} k\cdot k! = (n+1)!-1$ $\quad(A(n))$

◁ $n=1$: $1\cdot 1! = 2!-1$

$1=1$ — вірно

Припускаєм, що $\sum_{k=1}^{m} k\cdot k! = (m+1)!-1$ — вірно.

Доведем, що $A(m+1)$ — вірно:

Дійсно,

$$\sum_{k=1}^{m+1} k\cdot k! = 1\cdot 1! + 2\cdot 2! + \dots + m\cdot m! + (m+1)(m+1)! =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} k\cdot k! + (m+1)(m+1)! = (m+1)!-1+(m+1)(m+1)! =$$

$$= (m+1)!\,(1+m+1)-1 = (m+1)!\,(m+2)-1 = (m+2)!-1$$ ▷

N40 к) $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg}\frac{n}{n+1}$ $\quad(A(n))$

◁ $n=1$: $\operatorname{arctg}\frac{1}{2} = \operatorname{arctg}\frac{1}{2}$ — виконується.

Припускаємо, що $A(m)$ — вірне.

$n=m+1$: $\sum_{k=1}^{m+1} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} = \sum_{k=1}^{m} \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(m+1)^2} =$

$$= \operatorname{arctg}\frac{m}{m+1} + \operatorname{arctg}\frac{1}{2(m+1)^2} \ominus$$

/ $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$ / $\ominus$

$$\ominus\ \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\frac{m}{m+1}+\operatorname{arctg}\frac{1}{2(m+1)^2}\right)\right) =$$

$$= \operatorname{arctg}\left(\frac{\frac{m}{m+1}+\frac{1}{2(m+1)^2}}{1-\frac{m}{m+1}\cdot\frac{1}{2(m+1)^2}}\right) = \operatorname{arctg}\frac{2(m+1)m+1}{(2(m+1)^3-m)/(m+1)} =$$

$$= \operatorname{arctg}\frac{2m^2+2m+1}{(2(m+1)^3-m)/(m+1)} = \cancel{\operatorname{arctg}\frac{(2m^2+2m+1)\cdot(m+1)}{2(m+1)^3-m}}\ \ominus$$

$$\ominus\ \operatorname{arcctg}\left(\frac{(2m^2+2m+1)(m+1)}{2(m+1)^3-m}\right)=\operatorname{arcctg}\left(\frac{2m^3+4m^2+3m+1}{2m^3+6m^2+5m+2}\right) \ominus$$

$$\begin{array}{r|l} 2m^3+4m^2+3m+1 & m+1 \\ \underline{2m^3+2m^2} & \overline{2m^2+2m+1} \\ 2m^2+3m & \\ \underline{2m^2+2m} & \\ m+1 & \\ \underline{m+1} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2m^3+6m^2+5m+2 & m+2 \\ \underline{2m^3+4m^2} & \overline{2m^2+2m+1} \\ 2m^2+5m & \\ \underline{2m^2+4m} & \\ m+2 & \\ \underline{m+2} & \\ 0 & \end{array}$$

$$\ominus\ \operatorname{arcctg}\frac{m+1}{m+2}.\ \blacktriangleright$$

$\boxed{N40\ а))}$ Довести біном Ньютона:

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k a^{n-k}b^k \quad (a\in\mathbb{R},\ b\in\mathbb{R})$$

$$C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

◄ $n=1$: $a+b=C_1^0 a^1\cdot b^0+C_1^1\cdot a^0\cdot b^1$

$a+b=a+b$ — вірно

Залишилось довести, що із припущення ~~для~~ твердження для n слідує, що

$$(a+b)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k a^{n+1-k}b^k.$$

Дійсно,

$$(a+b)^{n+1}=(a+b)^n\cdot(a+b)=(a+b)\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot a^{n-k}\cdot b^k=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot a^{n-k+1}\cdot b^k+\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot a^{n-k}\cdot b^{k+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot a^{n-k+1}\cdot b^k+\sum_{k=1}^{n+1}C_n^{k-1}\cdot a^{n-k+1}\cdot b^k=$$

$$=a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}(C_n^k+C_n^{k-1})\cdot a^{n-k+1}\cdot b^k+b^{n+1}=$$

$$\ominus\ C_n^k+C_n^{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)=\frac{n!\cdot(n+1)}{(k-1)!(n-k)!\cdot k\cdot(n-k+1)}=$$

$$=\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=C_{n+1}^k$$

$$=a^{n+1}+\sum_{n=1}^{n}C_{n+1}^k\cdot a^{n-k+1}\cdot b^k+b^{n+1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k a^{n+1-k}\cdot b^k.\ \blacktriangleright$$

N40 x) Довести нерівність Бернулі:

$$\prod_{k=1}^{n}(1+x_k) \geq 1+\sum_{k=1}^{n} x_k \quad (*)$$, де x_k – числа одного знаку та $x_k \geq -1$, $k=\overline{1,n}$.

◁ $n=1$: $1+x_1 \geq 1+x_1$ — виконується!

Припускаємо, що $(1+x_1)(1+x_2)\dots(1+x_n) \geq$
$\geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n$ для деякого n.

~~Доведемо для $n+1$~~ : що тоді буде слідувати, що викон. нерівність для $n+1$:

$$\prod_{k=1}^{n+1}(1+x_k) = \prod_{k=1}^{n}(1+x_k)\cdot(1+x_{n+1}) \geq \left(1+\sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1+x_{n+1}) =$$

$$= 1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1} + \underbrace{x_1\cdot x_{n+1}}_{\geq 0} + \underbrace{x_2\cdot x_{n+1}}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{x_n\cdot x_{n+1}}_{\geq 0} \geq$$

$$\geq 1+x_1+x_2+\dots+x_n+x_{n+1} \quad ▷$$

Якщо $x_1=x_2=\dots=x_n=x$, то із $(*)$ ⇒

N40 г) $(1+x)^n \geq 1+nx$, $x\geq -1$. $\forall n\in\mathbb{N}$.

N41 и) $$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad (*)$$

◁ $n=1$: $\frac{1!!}{2!!} \overset{?}{\leq} \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$ — вірно.

Припустивши, що нерівність $(*)$ вірна для n, доведемо, що вона вірна і для $n+1$:

$$\frac{(2(n+1)-1)!!}{(2(n+1))!!} = \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\dots(2n-1)(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\dots 2n\cdot(2n+2)} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} = \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\frac{2n+1}{2n+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2n+3}}\cdot\sqrt{\frac{4n^2+8n+3}{4n^2+8n+4}} < \frac{1}{\sqrt{2n+3}} \quad ▷$$

$\boxed{N41\ м)}$ $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n > 2$

◁ $n=3$: $3^4 \overset{?}{>} 4^3$ $81 > 64$ – вірно.

Доведемо, що якщо вірна $n^{n+1} > (n+1)^n$, то і вірна $(n+1)^{n+2} > (n+2)^{n+1}$.

Дійсно, $(n+1)^{n+2} = \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}} \cdot n^{n+1} > \frac{(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}} \cdot (n+1)^n =$

$= \frac{(n+1)^{2n+2}}{n^{n+1}} = \left(\frac{(n+1)^2}{n}\right)^{n+1} = \left(\frac{n^2+2n+1}{n}\right)^{n+1} > (n+2)^{n+1}$ ▷

N41 г) $(2n)! < 2^{2n} \cdot (n!)^2$ $\forall n \in \mathbb{N}$

◁ $n=1$ – вірно

Доведемо для $n+1$:

$(2n+2)! = (2n)! \cdot (2n+1)(2n+2) < 2^{2n}(n!)^2 \cdot (2n+1) \cdot$

$\cdot (2n+2) < 2^{2n} \cdot (n!)^2 (2n+2)^2 = 2^{2n+2}((n+1)!)^2$ ▷

Д/З. N40 а) г) ж) л)

N42

N41 м), н)