Практикум з математичного аналізу

для студентів спеціальності “Інженерія програмного забезпечення”

факультету комп’ютерних наук та кібернетики

Семестр 1

Ляшко С. І., Аджубей Л. Т., Затула Д. В., Гуляницький А. Л.

Зміст

Передмова

Курс математичного аналізу є основою фундаментальної математичної підготовки для випускників природничих спеціальностей у класичних університетах.

Даний практикум з математичного аналізу призначений студентам спеціальності 121 “Інженерія програмного забезпечення” факультету комп’ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він відповідає програмі курсу, яка складається з 58 годин лекцій та 56 годин практичних занять. Практикум складається з двох частин, кожна з яких містить 14 практичних занять і відповідає матеріалу одного семестру.

Основною метою, яку переслідували автори, є забезпечення навчальним матеріалом практичних занять в рамках стислого курсу математичного аналізу. В посібнику кожна тема містить всі необхідні означення і твердження, що дозволяє розв’язувати запропоновані задачі без додаткової літератури. В якості основного теоретичного матеріалу і практичних завдань використані підручники і збірник задач з математичного аналізу авторів І. І. Ляшко, С. І. Ляшко, В. Ф. Ємельянов, О. К. Боярчук, І. М. Александрович, О. І. Молодцов, Д. А. Номіровський, Б. В. Рубльов та інші [1–3, 7].

Розділ 1. Вступ до математичного аналізу

Тема 1. Логічні символи. Множини. Відображення. Метод математичної індукції

У курсі математичного аналізу використовуються такі символи:

$\forall$ — *квантор загальності*, еквівалентний вислову "для будь-якого";

$\exists$ — *квантор існування*, еквівалент слова "існує";

$\exists!$ — еквівалентний вислову "існує єдиний";

$\Rightarrow$ — *імплікація*, визначається у записах типу $A \Rightarrow B$ як вислів "із істинності твердження A випливає твердження B";

$\Leftrightarrow$ — *символ еквівалентності*, запис типу $A \Leftrightarrow B$ означає, що одночасно виконуються імплікації $A \Rightarrow B$ та $B \Rightarrow A$, або ж "для того, щоб A було істинним, необхідно та достатньо, щоб B було істинним";

$\vee$ — *символ диз'юнкції*, запис $A \vee B$ означає виконання або A, або B;

$\wedge$ — *символ кон'юнкції*, запис $A \wedge B$ означає одночасне виконання A та B;

$\overset{def}{=}$ — "дорівнює за означенням";

$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ — "визначається за означенням",

та позначення:

- $i = \overline{n, m}$ — запис означає, що величина (індекс) i набуває почергово усіх цілих значень, починаючи з n і закінчуючи m включно;
- $\sum_{i=1}^{n} a_i \overset{def}{=} a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ — *сума* n доданків;
- $\prod_{i=1}^{n} a_i \overset{def}{=} a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ — *добуток* n множників;
- $n\,! \overset{def}{=} \prod_{k=1}^{n} k$ — *факторіал* (визначається для натуральних чисел), $0\,! \overset{def}{=} 1$;
- $(2n)!! \overset{def}{=} \prod_{k=1}^{n}(2k), \quad (2n+1)!! \overset{def}{=} \prod_{k=1}^{n}(2k+1)$ — *подвійні факторіали*;
- $C_n^k \overset{def}{=} \frac{n\,!}{k\,!(n-k)\,!}$ — *біноміальні коефіцієнти*;
- $\varnothing$ — *порожня множина*;
- $a \in A$ ($a \notin A$) — означає, що a є (не є) елементом множини A;
- $A \subset B$ — A є *підмножиною* B (в нестрогому розумінні), тобто $\forall\, a : (a \in A \Rightarrow a \in B)$;
- $A \not\subset B$ — A не є підмножиною B, тобто $\exists\, a \in A \wedge a \notin B$;

- $A = B$ — *рівність множин*, тобто $(A \subset B) \wedge (B \subset A)$;
- $B = \{a \in A \,|\, P(a)\}$ — це означає, що B складається з елементів множини A, які мають задану *властивість* P;
- $\exp M \; \left(2^M\right)$ — *універсальна множина*, тобто множина усіх підмножин множини M.

Визначимо операції над множинами, вважаючи, що усі множини є підмножинами деякої універсальної множини M, тобто вони належать $\exp M$ [1, с. 9]:

- $A \bigcap B \overset{def}{=} \{a \,|\, (a \in A) \wedge (a \in B)\}$ — *перетин* множин A і B;
- $A \bigcup B \overset{def}{=} \{a \,|\, (a \in A) \vee (a \in B)\}$ — *об'єднання* множин A і B;
- $A \backslash B \overset{def}{=} \{a \,|\, (a \in A) \wedge (a \notin B)\}$ — *різниця* множин A і B;
- $A \Delta B \overset{def}{=} (A \backslash B) \bigcup (B \backslash A)$ — *симетрична різниця* множин A і B;
- $CA \overset{def}{=} M \backslash A$ — *доповнення* множини A.

Узагальнимо поняття об'єднання та перетину для скінченної сукупності множин A_i, $i = \overline{1, n}$:

- $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \overset{def}{=} \{a \,|\, \forall\, i = \overline{1, n} \;\; a \in A_i\}$ — перетин множин;
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \overset{def}{=} \{a \,|\, \exists\, i = \overline{1, n} \;\; a \in A_i\}$ — об'єднання множин,

та для зліченної сукупності множин A_i, $i \in \mathbb{N}$:

- $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \overset{def}{=} \{a \,|\, \forall\, i \in \mathbb{N} \;\; a \in A_i\}$ — перетин множин;
- $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \overset{def}{=} \{a \,|\, \exists\, i \in \mathbb{N} \;\; a \in A_i\}$ — об'єднання множин.

Деякі основні числові множини:

$\mathbb{N}$ — *множина натуральних чисел*;
$\mathbb{Z}$ — *множина цілих чисел*;
$\mathbb{Q}$ — *множина раціональних чисел*;
$\mathbb{R}$ — *множина дійсних чисел*;
$\mathbb{C}$ — *множина комплексних чисел.*

Також, якщо до символів $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ додається індекс "+" чи "−", то це означає, що розглядається лише *невід'ємна* (*недодатна*) частина множини. Наприклад, $\mathbb{Z}^+$ — цілі невід'ємні числа, $\mathbb{R}^-$ — дійсні недодатні числа; обидві ці множини містять нуль.

Принцип двоїстості. Довільне математичне твердження можна записати за допомогою логічних символів ($\forall$, $\exists$ та деякої умови C). Заперечення сформульованого твердження (тобто протилежне твердження) отримується шляхом заміни кожного квантора на протилежний ($\exists$, $\forall$), а умови C на її заперечення.

Поняття відображення (функції)

Пара (x, y) є ***впорядкованою***, якщо вказано порядок: x — перший елемент, y — другий елемент. Аналогічно визначається *впорядкована система* із n елементів $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ [1, с. 10].

Декартовим добутком множин X та Y називається множина

$$X \times Y \overset{def}{=} \{(x, y) \,|\, x \in X \wedge y \in Y\}.$$

Аналогічно *декартовим добутком n множин* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ називається множина

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \overset{def}{=} \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \,|\, x_k \in X_k,\ k = \overline{1, n}\right\}.$$

Якщо множини X та Y співпадають (або ж $\forall i = \overline{1, n}\ X_i = X$), то їх декартів добуток позначається як $X \times X = X^2$ $(X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = X^n)$.

Множина Γ називається ***бінарним відношенням*** між елементами множин X та Y, якщо $\Gamma \subset X \times Y$.

Першою (другою) проекцією бінарного відношення $\Gamma \subset X \times Y$ називається множина $\Gamma_1 = \mathrm{pr}_1\, \Gamma = \{x \in X \,|\, \exists\, y \in Y : (x, y) \in \Gamma\}$ $\quad(\Gamma_2 = \mathrm{pr}_2\, \Gamma = \{y \in Y \,|\, \exists\, x \in X : (x, y) \in \Gamma\})$.

Множина $\Gamma_1(x) = \{y \in Y \,|\, (x, y) \in \Gamma\}$ $(\Gamma_2(y) = \{x \in X \,|\, (x, y) \in \Gamma\})$ називається ***першим (другим) перерізом*** Γ за допомогою елемента $x\,(y)$.

Для кожного бінарного відношення $\Gamma \subset X \times Y$ можна визначити ***обернене бінарне відношення*** $\Gamma^{-1} \subset Y \times X$ за правилом: $\Gamma^{-1} = \{(y, x) \,|\, (x, y) \in \Gamma\}$.

Бінарне відношення Γ називається ***функціональним***, якщо воно не містить різних упорядкованих пар з однаковими першими компонентами.

Впорядкована трійка множин (X, Y, Γ) називається ***відображенням (функцією)*** з множини X в множину Y, якщо Γ є функціональним бінарним відношенням між елементами множин X та Y, і позначається довільною літерою, наприклад, f. При цьому замість $f = (X, Y, \Gamma)$ записують $f : X \to Y$, або $y = f(x),\ x \in X$, або $x \mapsto f(x),\ x \in X$, де Γ — ***графік відображення***.

Перша проекція графіка Γ відображення f називається ***областю (множиною) визначення*** відображення f та позначається D_f. Друга проекція графіка відображення f — ***область (множина) значень***, позначається E_f.

Якщо $x \in D_f$ і пара $(x, y) \in \Gamma$, то елемент y називається ***значенням функції*** f на елементі x і позначається $f(x)$.

Якщо відома область визначення D_f і значення $f(x)$ $\forall x \in D_f$, то графік $\Gamma(f)$ відображення f будується за правилом: $\Gamma(f) = \{(x, f(x)) \,|\, x \in D_f\}$.

Нехай $f : X \to Y$. Якщо $(x, y) \in \Gamma_f$, то елемент y називається ***образом елемента*** x при відображенні f, а елемент x називається ***прообразом елемента*** y і позначається $f^{-1}(y)$. ***Образом множини*** $A \subset D_f$ є підмножина E_f, що визначається як $f(A) = \{f(x) \,|\, x \in A\}$. Аналогічно для будь-якої множини $B \subset E_f$ підмножина D_f, що визначається як $f^{-1}(B) = \{x \in D_f \,|\, \exists\, y \in B : y = f(x)\}$ називається ***прообразом множини*** B.

Нехай $f : X \to Y$ і $U \subset X$. Визначимо відображення $g : U \to Y$, поклавши $g(x) = f(x)$, $x \in U$. Тоді g називається ***звуженням*** відображення f на U, а відображення f — ***продовженням*** відображення g на X.

Нехай $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Відображення $h : X \to Z$, що визначається формулою $h(x) = g(f(x))$, $x \in X$, називається ***суперпозицією*** відображень f та g і позначається так: $h = g \circ f$ [1, с. 15].

Якщо задані відображення $T \xleftrightarrow{\varphi} X$, $T \xrightarrow{\psi} Y$, то існує відображення $X \xrightarrow{f=\psi\circ\varphi^{-1}} Y$. Це відображення називається ***параметрично заданим*** за допомогою відображень φ та ψ, а змінна t при цьому називається ***параметром***.

Розглянемо відображення $X \times Y \xrightarrow{F} G$, а також рівняння

$$F(x, y) = c, \tag{1}$$

де $c \in G$. Якщо $\forall x \in X\ \exists!\, y = f(x) \in Y$ такий, що $F(x, f(x)) = c$, тоді вважаємо, що визначено функцію $X \xrightarrow{f} Y$. При цьому f називається ***неявною функцією***, що задається рівнянням (1).

Упорядковані простори

Нехай задано множину M. Бінарне відношення $\sigma \subset M \times M$ називається ***відношенням часткового порядку*** на множині M, якщо виконуються такі умови (аксіоми) [1, с. 20]:

1. $\forall a \in M\ (a, a) \in \sigma$ (*рефлексивність*);
2. $(a, b) \in \sigma \wedge (b, a) \in \sigma \;\Rightarrow\; a = b$ (*антисиметричність*);
3. $(a, b) \in \sigma \wedge (b, c) \in \sigma \;\Rightarrow\; (a, c) \in \sigma$ (*транзитивність*).

Поряд з позначенням $(a, b) \in \sigma$ будемо також вживати позначення $a \leqslant b$ навіть якщо частковий порядок не задається умовою "менше або дорівнює".

Упорядкована пара $\Omega = (M, \sigma)$ (або $(M, \leqslant)$), яка складається з множини M (***основний простір***) та відношення часткового порядку σ на ній називається ***частково упорядкованим простором***, елементи множини M — ***точками*** цього простору. Точки x_1, x_2 називаються ***порівнюваними***, якщо $x_1 \leqslant x_2$ або $x_2 \leqslant x_1$, в протилежному випадку – ***непорівнюваними***. Якщо простір не містить непорівнюваних елементів, то він називається ***упорядкованим простором*** або ***лінійно упорядкованим простором***.

Нехай $\Omega = (M, \sigma)$ — частково упорядкований простір, X — деяка множина простору (тобто $X \subset M$). Елемент $x_{\max} \in X$ ($x_{\min} \in X$) називається ***найбільшим (найменшим) елементом*** множини X, якщо $\forall x \in X :\ x \leqslant x_{\max}$ ($x_{\min} \leqslant x$). Зрозуміло, що навіть в упорядкованому просторі не кожна множина має найбільший чи найменший елемент.

Елемент $\overline{x} \in M$ ($\underline{x} \in M$) називається ***мажорантою (мінорантою)*** множини X, якщо $\forall x \in X\ x \leqslant \overline{x}$ ($\underline{x} \leqslant x$). Якщо множина X має мажоранту (міноранту), то вона називається ***обмеженою зверху (знизу)***. Множина, що обмежена зверху і знизу, називається ***обмеженою***. Найменша мажоранта (найбільша міноранта) множини X, якщо вона існує, називається ***верхньою***

(нижньою) межею множини X, або ***супремумом (інфімумом)*** та позначається $\sup X$ $(\inf X)$.

Метод математичної індукції

Розглянемо метод доведення тверджень Блеза Паскаля (1623 – 1662). Він відомий як ***метод математичної індукції*** (***ММІ***) [1, с. 8] та базується на перевірці виконання двох лем Паскаля для тверджень $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ $(n \in \mathbb{N})$.

Лема 1. Твердження A_1 — істинне.

Лема 2. $\forall n \in \mathbb{N}$ із істинності твердження A_n випливає істинність A_{n+1}.

Тоді всі твердження $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots$ — істинні.

Множина $\mathbb{N}$ всіх натуральних чисел не обмежена зверху. У ній визначена операція додавання та мають місце такі властивості:

1. $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; (n+1) \in \mathbb{N}$;

2. $(1 \in M \wedge n \in M \;\Rightarrow\; (n+1) \in M) \;\Rightarrow\; \mathbb{N} \subset M$ (*аксіома індукції*).

Практичне заняття 1

Приклад 1. *Доведемо, що* $\forall n \in \mathbb{N}: \sum\limits_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

⌜

При $n = 1$ маємо правильну рівність $1 = \dfrac{1 \cdot 2}{2}$ (база індукції). Припустимо, що рівність правильна при $n = m$, та доведемо її при $n = m+1$ (крок індукції). Маємо:

$$\sum_{k=1}^{m+1} k = \sum_{k=1}^{m} k + (m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{(m+1)(m+2)}{2}.$$

Отже, за принципом математичної індукції, рівність вірна при всіх натуральних n.

⌟

Приклад 2. *Доведемо, що* $\forall n \in \mathbb{N}: \prod\limits_{k=1}^{n} (1 + x_k) \geqslant 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$, *де* x_k — *числа одного знаку та* $x_k \geqslant -1$, $k = \overline{1, n}$ (*нерівність Бернуллі*).

⌜

При $n = 1$ нерівність очевидна. Припустимо, що нерівність справедлива при n. Доведемо її справедливість при $n+1$:

$$\prod_{k=1}^{n+1} (1 + x_k) \geqslant \left(1 + \sum_{k=1}^{n} x_k\right)(1 + x_{n+1}) = 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k + x_{n+1} \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n+1} x_k.$$

Остання нерівність вірна, оскільки $x_{n+1} \cdot \sum\limits_{k=1}^{n} x_k \geqslant 0$ для довільних чисел x_k, $k = \overline{1, n}$, одного знаку.

⌟

Застосовуючи ММІ, доведіть рівності $\forall n \in \mathbb{N}\,(n \geqslant n_0)$:

1.1 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

1.2 $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} k\right)^2$;

1.3 $\sum\limits_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1}k^2 = (-1)^n \dfrac{(n-1)n}{2}$, $n \geqslant 2$;

1.4 $\sum\limits_{k=1}^{n} k\,k! = (n+1)! - 1$;

1.5 $\sum\limits_{k=1}^{n} k(k+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

1.6 $\sum\limits_{k=1}^{n} \operatorname{arctg} \dfrac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} \dfrac{n}{n+1}$;

1.7 $\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx = \dfrac{\sin \frac{nx}{2} \cdot \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

1.8 $\dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx = \dfrac{\sin \frac{2n+1}{2}x}{2\sin \frac{x}{2}}$, $x \neq 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$;

1.9 $\forall \{a, b\} \in \mathbb{R} : (a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}$ (*біном Ньютона*).

Застосовуючи ММІ, доведіть виконання нерівностей $\forall n \in \mathbb{N}\,(n \geqslant n_0)$:

1.10 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n+k} > \dfrac{13}{24}$, $n \geqslant 2$;

1.11 $\sqrt{n} < \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n}$, $n \geqslant 2$;

1.12 $\dfrac{\prod\limits_{k=1}^{n}(4k-1)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(4k+1)} < \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{4n+3}}$;

1.13 $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} x_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|$, $\forall x_k \in \mathbb{R}$, $k = \overline{1, n}$;

1.14 $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant 2 - \dfrac{1}{n}$;

1.15 $n^n \geqslant (2n-1)!!$;

1.16 $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$, $x \geqslant -1$;

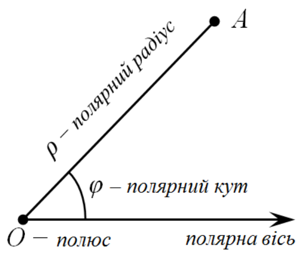
1.17 $n^{n+1} > (n+1)^n$, $n \geqslant 3$.

Практичне заняття 2

Полярна система координат. Виберемо на площині промінь (числову напівпряму $[0, \infty)$). Позначимо початок променя точкою O — ця точка називається *полюсом*, а сам промінь — *полярною віссю*. З'єднаємо полюс O з деякою точкою площини A відрізком. Величину кута між полярною віссю та відрізком AO називають *полярним кутом* і вважають першою координатою точки A (позначається φ), а довжина цього відрізка $\rho = |AO|$ називається *полярним радіусом* і є другою координатою A.

Перехід від полярних координат точки до декартових координат виконується за формулами:

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi.$$



Побудову графіка функції $\rho = f(\varphi)$ у полярній системі координат здійснюють так: будують для функції $\rho = f(\varphi)$ відповідну функцію $y = f(x)$, досліджують функцію $\rho = f(\varphi)$, порівнюючи її з відповідною функцією $y = f(x)$ з врахуванням особливостей графіка функції $\rho = f(\varphi)$. У найпростіших випадках графіки функцій будують за точками.

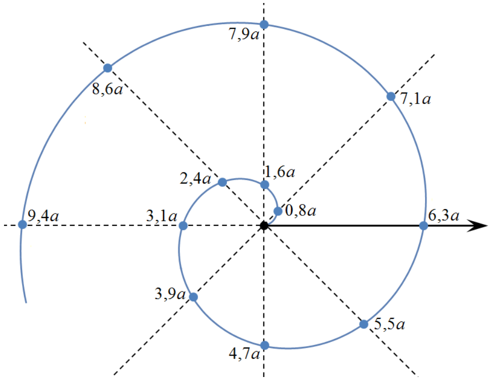
Надалі вважатимемо, що полярний кут набуває значень із множини $\mathbb{R}^+$.

Приклад 1. *Побудуємо графік у полярній системі координат: $\rho = a\varphi$, $a > 0$ (спіраль Архімеда).*

Складемо таблицю значень для $\varphi \geqslant 0$ (значення подані наближено):

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
ρ	0	$0,8a$	$1,6a$	$2,4a$	$3,1a$

φ	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
ρ	$3,9a$	$4,7a$	$6,3a$	$7,9a$	$9,4a$



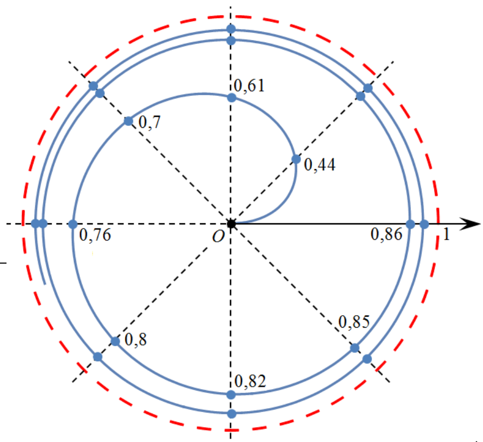
Тепер побудуємо точки на координатній площині і з'єднаємо їх плавною лінією, таким чином отримавши графік.

Приклад 2. *Побудуємо графік у полярній системі координат: $\rho = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1}$.*

Складемо таблицю значень для $\varphi \geqslant 0$ (значення подані наближено):

φ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$
ρ	0	$0,44$	$0,61$	$0,7$	$0,76$	$0,8$

φ	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
ρ	$0,82$	$0,85$	$0,86$	$0,887$	$0,904$



Побудуємо точки на координатній площині і з'єднаємо їх плавною лінією. Відзначимо, що значення дробу $\dfrac{\varphi}{\varphi+1}$ наближається до 1 зі збільшенням φ.

Побудуйте графіки дробово–лінійних функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

2.1 $f(x) = \dfrac{6+x}{x}$; **2.2** $f(x) = \dfrac{7-x}{2x}$.

Побудуйте графіки функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ методом додавання:

2.3 $f(x) = |x| + \dfrac{1}{|x|}$; **2.4** $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{|x|}$;

2.5 $f(x) = x + \sin x$; **2.6** $f(x) = x - \cos x$;

2.7 $f(x) = \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ *(синус гіперболічний)*; **2.8** $f(x) = \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ *(косинус гіперболічний)*.

Побудуйте графіки функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ методом множення:

2.9 $f(x) = x\sin x$;

2.10 $f(x) = e^x \cos x$;

2.11 $f(x) = \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ *(тангенс гіперболічний)*;

2.12 $f(x) = \operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ *(котангенс гіперболічний)*;

2.13 $f(x) = \operatorname{arctg} x \cdot \cos x$.

Побудуйте графіки функцій $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$:

2.14 $f(x) = [2^x]$;

2.15 $f(x) = [\sin x]$;

2.16 $f(x) = 2^x[x]$;

2.17 $f(x) = \sin[x]$;

2.18 $f(x) = \{x^2\}$;

2.19 $f(x) = \sqrt{\{x\}}$;

2.20 $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$;

2.21 $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$;

2.22 $f(x) = (\arccos x)^{-1}$;

2.23 $f(x) = \arccos\dfrac{1}{x}$;

2.24 $f(x) = e^{\frac{2x}{1-x^2}}$;

2.25 $f(x) = e^{\sin x}$;

2.26 $f(x) = \dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$;

2.27 $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}\right)$;

2.28 $f(x) = \ln\left(\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+3}{x+3} + \dfrac{6x-1}{2-2x}\right) + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Побудуйте графіки функцій, що задані у полярній системі координат:

2.29 $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$;

2.30 $r = \dfrac{1}{2\cos\varphi}$;

2.31 $r = 2a\cos\varphi,\ a > 0$;

2.32 $r = 1 + 2\cos\varphi$;

2.33 $r = \operatorname{tg}\varphi$;

2.34 $r^2 + \varphi^2 = 1$;

2.35 $r = 7\sin 3\varphi$;

2.36 $r = 2^{\frac{\varphi}{2\pi}}$;

2.37 $r = \dfrac{1}{\sin\varphi + \cos\varphi}$;

2.38 $r = -\dfrac{1}{\varphi - \frac{\pi}{4}}$;

2.39 $r = 2\,|\sin 4\varphi\,|$;

2.40 $r = a + b\cos\varphi$, де **1)** $a > b > 0$; **2)** $a = b > 0$; **3)** $b > a > 0$.

Практичне заняття 3

Приклад 1. *Перевіримо, чи буде функціональним бінарне відношення* Γ*, якщо* $\Gamma \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ *та* $(x,y)\in\Gamma \ \Leftrightarrow\ |x| + |y| = 3$.

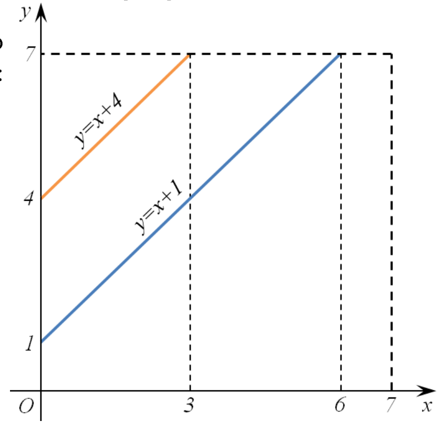
⌜

Це бінарне відношення не є функціональним: наприклад, $(1,2) \in \Gamma$ і $(1,-2)\in\Gamma$, тобто існують дві різні упорядковані пари $(x,y)\in\Gamma$ з однаковими першими компонентами.

⌟

Приклад 2. *Знайдемо першу та другу проекції, а також перерізи бінарного відношення* $\Gamma = \{(x, y) \mid x + 1 \leqslant y \leqslant x + 4\}$, $X = Y = [0, 7]$.

⌜



Зобразимо це бінарне відношення. Тепер можемо знайти усі проекції та перерізи: $\mathrm{pr}_1\,\Gamma = [0, 6]$; $\mathrm{pr}_2\,\Gamma = [1, 7]$;

$$\Gamma_1(x) = \begin{cases} [x+1, x+4], & x \in [0, 3], \\ [x+1, 7], & x \in (3, 6], \\ \varnothing, & x \in (6, 7]; \end{cases}$$

$$\Gamma_2(y) = \begin{cases} \varnothing, & y \in [0, 1), \\ [0, y-1], & y \in [1, 4], \\ [y-4, y-1], & y \in (4, 7]. \end{cases}$$

⌟

З'ясуйте, чи будуть функціональними бінарні відношення Γ, якщо:

3.1 $\Gamma \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ та $(x, y) \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; x = y^2$;

3.2 $\Gamma \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ та $(x, y) \in \Gamma \;\Leftrightarrow\; x^2 + y^2 = 25$.

Для відображень $f : X \to Y$ вкажіть області визначення та значень, якщо:

3.3 $f(x) = \cos x$, **1)** $X = Y = \mathbb{R}$; **2)** $X = \{0, \pi\}$, $Y = \mathbb{R}$; **3)** $X = [0, \pi]$, $Y = [0, 1]$;

3.4 $f(x) = [x]$, **1)** $X = Y = \mathbb{R}$; **2)** $X = \mathbb{N}$, $Y = \{1, 2, \ldots, n\}$; **3)** $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{N}$;

3.5 $f(x) = \dfrac{1}{\sin \pi x}$, **1)** $X = Y = \mathbb{R}$, **2)** $X = [-1, 1]$, $Y = \mathbb{R}$, **3)** $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{Z}$.

Знайдіть образи множин A та прообрази множин B для функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

3.6 $f(x) = 4 - x^2$, **1)** $A = \mathbb{R}$, **2)** $A = [-1, 1]$, **3)** $B = \mathbb{R}^-$, **4)** $B = [0, 2]$.

Побудуйте першу та другу проекції вказаних бінарних відношень $\Gamma \subset X \times Y$:

3.7 $\Gamma = \{(x, y) \mid x \cdot y - \text{непарне число}\}$, $X = Y = \mathbb{Z}$;

3.8 $\Gamma = \left\{(x, y) \mid x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1 \leqslant 0\right\}$, $X = Y = [0, 10]$.

Побудуйте звуження функції Діріхле ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) на вказану множину A:

3.9 $D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases}$ **1)** $A = \mathbb{Q}$, **2)** $A = [0, 1]$, **3)** $A = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, **4)** $A = \mathbb{N}$.

У частково впорядкованому просторі $(M, \leqslant)$, $\forall\, a, b \in M : a \leqslant b \Leftrightarrow a \leqslant b$ знайдіть максимальний та мінімальний елементи, мажоранту, міноранту, $\sup X$ та $\inf X$ (якщо вони існують) для множини X, якщо:

3.10 $M = [-1, 1]$, **1)** $X = \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, **2)** $X = (0, 1)$, **3)** $X = \left(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}\right) \bigcup \left\{\dfrac{1}{2}\right\}$;

3.11 $M = \mathbb{R}$, **1)** $X = \left\{\dfrac{3n}{n^3 + 3} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$, **2)** $X = \left\{\dfrac{n^5}{n^6 + 1} \,\middle|\, n \in \mathbb{Z}\right\}$.

Розділ 2. Границя числової послідовності

Тема 2. Означення та властивості границі послідовності

Надалі розглядатимемо лише упорядкований простір $(\overline{\mathbb{R}}, \leqslant)$, де $\overline{\mathbb{R}}$ — розширена числова вісь: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \bigcup \{-\infty, +\infty\}$ [1, с. 50].

Числовою послідовністю (x_n) називається відображення $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$, де $x_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, називається ***n-им членом*** послідовності. Іноді послідовності також позначають таким чином: $(x_n)_{n \in A}$ $(A \subset \mathbb{Z})$, або просто $x_1, x_2, \ldots$

Нехай x_0 — довільна точка на $\mathbb{R}$. ***ε-околом*** точки x_0 називається інтервал з центром у точці x_0 і радіусом ε:

$$S_\varepsilon(x_0) = \{x \mid |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset \mathbb{R},$$

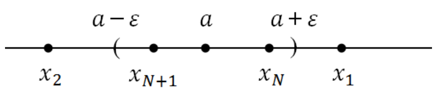
множини $S_\varepsilon(-\infty) = (-\infty, -\varepsilon)$, $S_\varepsilon(+\infty) = (\varepsilon, +\infty)$, $S_\varepsilon(\infty) = (-\infty, -\varepsilon) \bigcup (\varepsilon, +\infty)$ називаються відповідно *ε-околами* $-\infty$, $+\infty$ та просто ∞.

Точка $a \in R$ називається ***границею*** послідовності (x_n), якщо

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \Rightarrow \ |x_n - a| < \varepsilon$$

(*метричне означення границі*), при цьому будемо записувати $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$, або $x_n \to a$ при $n \to \infty$ (або просто $x_n \to a$).

За означенням, всі члени послідовності з номерами $n \geqslant N$ потрапляють у ε-окіл точки a, яким би малим цей окіл не був, а поза цим околом може залишатись лише скінченна кількість членів послідовності (x_n), не більша за $N - 1$, тобто $x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}$.



Тому, якщо використати поняття околу в упорядкованому просторі, можна дати еквівалентне *топологічне означення границі:* точка a називається ***границею*** послідовності (x_n), якщо $\forall S_\varepsilon(a) \, \exists N(\varepsilon) : \forall n \geqslant N(\varepsilon) \ \Rightarrow \ x_n \in S_\varepsilon(a)$.

Розглянемо випадок, коли послідовність має нескінченну границю. В такому разі послідовність називається ***нескінченно великою***. Нехай $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0 \, \exists N(E) : \ \forall n \geqslant N(E) \ \Rightarrow \ x_n > E;$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0 \, \exists N(E) : \ \forall n \geqslant N(E) \ \Rightarrow \ x_n < -E;$$

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \overset{def}{\Leftrightarrow} \forall E > 0 \, \exists N(E) : \ \forall n \geqslant N(E) \ \Rightarrow \ |x_n| > E.$$

Якщо $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = 0$, то послідовність (x_n) називається ***нескінченно малою***, при цьому будемо записувати $x_n = o(1)$ (***o*–*мале***). Послідовність (x_n) називається ***обмеженою***, якщо існує таке число $M \geqslant 0$, що $|x_n| \leqslant M \;\; \forall n \in \mathbb{N}$, при цьому будемо записувати $x_n = O(1)$ (***O*–*велике***). Символи $o(1)$ та $O(1)$ називаються ***символами Ландау*** [1, с. 49]. Для них справедливі такі дії:

$$O(1) + O(1) = O(1); \qquad O(1) \cdot O(1) = O(1);$$
$$o(1) + o(1) = o(1); \qquad o(1) \cdot o(1) = o(1);$$
$$O(1) + o(1) = O(1); \qquad o(1) \cdot O(1) = o(1).$$

Якщо послідовність має скінченну границю, вона називається ***збіжною***, в протилежному випадку — ***розбіжною***.

Для довільної послідовності (x_n) позначимо $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ (або $\sup x_n$) та $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ ($\inf x_n$) відповідно верхню та нижню межу множини значень послідовності $\{x_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$.

Послідовність (x_n) називається ***неспадною*** (***зростаючою***), якщо $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \leqslant x_{n+1}$ ($x_n < x_{n+1}$); послідовність (x_n) називається ***незростаючою*** (***спадною***), якщо $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n \geqslant x_{n+1}$ ($x_n > x_{n+1}$). Незростаючі та неспадні послідовності називаються ***монотонними***, а зростаючі та спадні послідовності — ***строго монотонними*** [1, с. 31].

Теорема (про арифметичні дії над збіжними послідовностями). *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}$ *та* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \in \mathbb{R}$, *то:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = x \pm y$;
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = xy$;
3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{x}{y}$, $y \neq 0 \wedge (y_n \neq 0 \; \forall n \in \mathbb{N})$;

Теорема (“про двох поліцаїв”). *Якщо для послідовностей* $(x_n), (y_n), (z_n)$ $\exists N^* : \; \forall n \geqslant N^* \; y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ *і* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, *то* $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Теорема (Вейєрштрасса). *Кожна монотонна і обмежена послідовність має скінченну границю* [1, с. 31].

Практичне заняття 4

Приклад 1. *Доведемо, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-3}{4n+5} = \dfrac{1}{2}$.

⌜

Для довільного $\varepsilon > 0$ маємо:

$$\left| \frac{2n-3}{4n+5} - \frac{1}{2} \right| < \varepsilon \;\; \Leftarrow \;\; \frac{11}{8n+10} < \frac{11}{8n} < \varepsilon \;\; \Leftrightarrow \;\; n > \frac{11}{8\varepsilon}.$$

Отже, обираючи в якості $N(\varepsilon) = \left[\dfrac{11}{8\varepsilon} \right] + 1$, отримаємо вірне твердження за означенням.

⌟

Приклад 2. *Знайдемо границю послідовності* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2}$.

⌜

Спростимо суму:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k-1)^2(2k+1)^2} = \frac{1}{8}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(2k-1)^2} - \frac{1}{(2k+1)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{9} - \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{49} + \dots + \frac{1}{(2n-1)^2} - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{8}\left(1 - \frac{1}{(2n+1)^2}\right) \to \frac{1}{8},\ n \to \infty.$$

⌟

Приклад 3. *Знайдемо* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \operatorname{arctg} n}{n^2+3}$.

⌜

Оскільки $\operatorname{arctg} n = O(1)$ та $\dfrac{n}{n^2+3} = o(1)$, то згідно із операціями над символами Ландау:

$$\frac{n \operatorname{arctg} n}{n^2+3} = o(1)\cdot O(1) = o(1) \to 0,\ n \to \infty.$$

⌟

Приклад 4. *Знайдемо* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n + 3\cdot 2^n + \ln n}{n^2 - 2^n - \ln n}$.

⌜

Головним членом чисельника дробу є 2^n, знаменника — також 2^n. Тому достатньо розглянути лише границю відношення між ними:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + 3\cdot 2^n + \ln n}{n^2 - 2^n - \ln n} = -\lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot 2^n}{2^n} = -3.$$

⌟

Використовуючи означення границі послідовності, знайдіть границі:

4.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n}{n^3+2}$;

4.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2-1}{5n^2+1}$;

4.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^3+2n^2+1}{n^4+2n-2}$;

4.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[3]{4n-11}}$;

4.5 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$;

4.6 $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{\sqrt[3]{n}}$;

4.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(1+n^2)}{2^n}$;

4.8 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n}$.

Доведіть за означенням, що число a не є границею послідовності (x_n), якщо:

4.9 $x_n = \dfrac{n}{n+2}, \quad a = 0$;

4.10 $x_n = \dfrac{n^2}{2n+3}, \quad a = 1$.

З'ясуйте, чи є послідовності обмеженими, чи нескінченно великими. Вкажіть на множині $\mathbb{R}$ найбільший та найменший члени послідовності, якщо такі існують:

4.11 $x_n = (2n+1)\sin n\pi$;

4.12 $x_n = n \sin \dfrac{n\pi}{2}$.

Знайдіть границі послідовностей (x_n):

4.13 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)}$;

4.14 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$;

4.15 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k^3+6k^2+11k+5}{(k+3)!}$;

4.16 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k}{(k+1)!}$;

4.17 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2k+1}{(2k+2)!!}$;

4.18 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \cos\dfrac{2k+1}{k^2+k} \sin\dfrac{1}{k^2+k}$.

Знайдіть границі, користуючись теоремами про збіжні послідовності:

4.19 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=0}^{m} a_k n^k}{\sum\limits_{k=0}^{l} b_k n^k}$ $\big(a_k \in \mathbb{R}\ (k=\overline{0,m}),\ b_k \in \mathbb{R}\ (k=\overline{0,l}),\ a_m \cdot b_l \neq 0\big)$;

4.20 $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\big)$;

4.21 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n+\sqrt{n}}} - \sqrt{n}\right)$;

4.22 $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\sqrt[3]{n^2-n^3}+n\big)$;

4.23 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}$;

4.24 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2n}\sin n^3 - \dfrac{3n}{6n+1}\right)$;

4.25 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg}\dfrac{n^3}{2n+1} + \dfrac{\sin n - n}{1-4n}\right)$;

4.26 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt{n}-\sqrt[3]{n}} + \dfrac{\left\{n^3-\frac{2}{3}n\right\}}{\ln n} + 1\right)$;

4.27 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n}{2n^2-1} \cdot \cos\dfrac{n+1}{2n-1} - \dfrac{n}{1-2n} \cdot \dfrac{n\cdot(-1)^n}{n^2+1}\right)$;

4.28 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n} - \ln(n^9-n) + \ln(n\cdot 3^n)}{\log_3(n^{17}+2)+3\sqrt[3]{n}+\cos n}$;

4.29 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{11}-e^n+n\,!-\ln(n+1)}{6^n-36^n+n^7-1}$.

Доведіть рівності:

4.30 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\alpha}{a^n} = 0$ $(\alpha\in\mathbb{R},\ a>1)$;

4.31 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n\,!} = 0$ $(a>0)$;

4.32 $\lim\limits_{n\to\infty} n a^n = 0$ $(|a|<1)$;

4.33 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$;

4.34 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a>0)$;

4.35 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Тема 3. Фундаментальні послідовності. Підпослідовності

Послідовність (x_n) називається ***фундаментальною***, якщо $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, N(\varepsilon)$: $\forall\, (n \geqslant N(\varepsilon),\, p \in \mathbb{N}) \ \Rightarrow\ |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

Нехай (x_n) — деяка послідовність, (n_k) — зростаюча послідовність натуральних чисел. Тоді послідовність $(y_k) = (x_{n_k})$ називається ***підпослідовністю*** послідовності (x_n).

Точка a називається ***частковою границею послідовності*** (x_n), якщо існує підпослідовність (x_{n_k}), границя якої дорівнює a.

Нехай послідовність (x_n) з $\mathbb{R}$ є обмеженою, тоді $\forall\, n \in \mathbb{N}$ множина $A_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$ — обмежена, та внаслідок повноти $\mathbb{R}$ існує число $\overline{x_n} = \sup A_n = \sup\limits_{k \geqslant n} x_k$. Згідно із властивістю верхньої межі ($A_{n+1} \subset A_n$), послідовність $(\overline{x_n})$ — монотонно незростаюча, і крім того є обмеженою. Тому за теоремою Вейєрштрасса має границю, яка називається ***верхньою границею послідовності*** (x_n) і позначається $\varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n$, тобто $\varlimsup\limits_{n \to \infty} x_n \stackrel{def}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_{k \geqslant n} x_k$. Аналогічно визначається ***нижня границя послідовності***: $\varliminf\limits_{n \to \infty} x_n \stackrel{def}{=} \lim\limits_{n \to \infty} \inf\limits_{k \geqslant n} x_k$.

Теорема (Больцано–Вейєрштрасса). *З кожної обмеженої послідовності (x_n) можна виділити збіжну підпослідовність* [1, с. 35].

Критерій Коші. *Послідовність (x_n) дійсних чисел збігається тоді і тільки тоді, коли вона є фундаментальною* [1, с. 52].

Наведемо теореми, які використовуються при знаходженні границь послідовностей [1, с. 53–55].

Теорема (Коші). *Якщо існує $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{\sum_{k=1}^{n} a_k}{n} = l$.*

Теорема (Штольца). *Якщо послідовність (y_n) монотонно прямує до $+\infty$ та $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{y_n} = l$.*

Теорема. *Якщо для послідовності додатних чисел (x_n) $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{x_n}{x_{n-1}} = l \in \overline{\mathbb{R}}$, то $\exists \lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{x_n} = l$.*

Число *e*. Розглянемо послідовність $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$. За теоремою Вейєрштрасса існує границя послідовності (x_n), яку позначають літерою $\boldsymbol{e}$: $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = e \approx 2,718281...$ [1, с. 56].

Практичне заняття 5

Приклад 1. *Дослідимо на збіжність послідовність $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$.*

⌜

Покажемо, що послідовність є фундаментальною, а тому збігається за критерієм Коші. Оберемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді:

$$|x_{n+p} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k^2-k} = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} =$$
$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, обираючи в якості $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, фундаментальність послідовності доведена.

Методом математичної індукції можна довести нерівність 1.14 з практичного заняття 1. При $n \to \infty$ отримаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. ⌟

Приклад 2. *Дослідимо на збіжність послідовність* $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$.

⌜

Покажемо спочатку, що послідовність (x_n) є монотонно спадною:

$$x_{n+1} - x_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 0,$$

оскільки $\forall n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність:

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Крім того, згідно із нерівністю (2) послідовність (x_n) є обмеженою знизу:

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n > \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \ln n = \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k} - \ln n =$$
$$= \ln \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \ln \frac{n+1}{n} > 0.$$

Отже, за теоремою Вейєрштрасса послідовність (x_n) є збіжною, її границя називається *сталою Ейлера*. Будемо позначати $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \gamma$. Також відповідно до отриманого результату справедливою є така рівність: $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. ⌟

Приклад 3. *Знайдемо границю послідовності* $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

⌜

Скористаємося теоремою Штольца, обираючи $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$, $b_n = \sqrt{n}$. Одержимо:

$$\frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n})^2 - (\sqrt{n-1})^2} = \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}}{\sqrt{n}} \to 2,\ n \to \infty.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 2$. $\lrcorner$

Користуючись критерієм Коші дослідіть на збіжність послідовності:

5.1 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos k}{2^k}$;

5.2 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\,!)}{k(k+1)}$;

5.3 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$;

5.4 $x_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{\ln k}$;

5.5 (x_n) — послідовність обмеженої варіації, тобто $\exists\, c \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_{k+1} - x_k| < c.$$

Доведіть твердження:

5.6 послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, — монотонно зростаюча і обмежена;

5.7 послідовність $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, — монотонно спадна, обмежена і $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = e$;

5.8 $\forall n \in \mathbb{N}: \ \frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

Доведіть збіжність на $\mathbb{R}$ таких послідовностей:

5.9 $x_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{2^k}\right)$;

5.10 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$;

5.11 $x_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$;

5.12 $x_n = \left(1 + \frac{m}{n}\right)^n, \ m \in \mathbb{R}$.

Знайдіть границю послідовності (x_n), якщо:

5.13 $x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2n + 2k - 1}$;

5.14 $x_n = \frac{1}{\ln n} \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k}$;

5.15 $x_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{2^n} \frac{1}{k}$;

5.16 $x_n = \frac{1}{n^3} \sum\limits_{k=1}^{n} k^2$;

5.17 $x_n = \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}$;

5.18 $x_n = \frac{n}{a^n} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a^{k-1}}{k}, \ a > 1$;

5.19 $x_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}}{\sqrt{n} + (-1)^n}$;

5.20 $x_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n\sqrt{n} + (-1)^n n}$.

Практичне заняття 6

Приклад 1. *Знайдемо* $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ *та* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ *на* $\overline{\mathbb{R}}$ *для послідовності* $x_n = (-1)^n \frac{n+1}{n+2} + \sin\frac{n\pi}{2}$.

Виділимо 4 підпослідовності із x_n, враховуючи, що період функції $\sin\dfrac{n\pi}{2}$ дорівнює 4: $x_{4k-3} = -\dfrac{4k-2}{4k-1} + 1$, $x_{4k-2} = \dfrac{4k-1}{4k}$, $x_{4k-1} = -\dfrac{4k}{4k+1} - 1$ та $x_{4k} = \dfrac{4k+1}{4k+2}$ $(k \in \mathbb{N})$. Знайдемо границі кожної з підпослідовностей, а також інфімум та супремум їх значень:

	$\lim\limits_{m\to\infty} x_m$	$\inf\limits_{m\in\mathbb{N}} x_m$	$\sup\limits_{m\in\mathbb{N}} x_m$
$m = 4k$	1	$4/5$	1
$m = 4k-1$	-2	-2	$-9/5$
$m = 4k-2$	1	$3/4$	1
$m = 4k-3$	0	0	$1/3$

Таким чином, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n = -2$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

Приклад 2. *Нехай* $x_1 = \sqrt{3}$, $x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}$, $n \in \mathbb{N}$. *Дослідимо послідовність* (x_n) *на збіжність та знайдемо її границю.*

Припустимо, що $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$. Тоді можна перейти до границі при $n \to \infty$ в рекурентному співвідношенні $x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n}$:

$$\alpha = \sqrt{3+2\alpha} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha^2 - 2\alpha - 3 = 0.$$

Корені цього рівняння — числа $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -1$. Таким чином, якщо послідовність (x_n) — збіжна, то вона збігається або до α_1, або до α_2.

Доведемо обмеженість зверху послідовності (x_n) методом математичної індукції. При $n = 1:\ x_1 = \sqrt{3} \leqslant 3$. Припустимо, що для деякого $n \in \mathbb{N} : x_n \leqslant 3$. Тоді $x_{n+1} = \sqrt{3+2x_n} \leqslant \sqrt{3+2\cdot 3} = 3$, тобто обмеженість зверху доведена. Тому послідовність (x_n) є обмеженою (обмеженість знизу очевидна).

Дослідимо на монотонність: $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 3 + 2x_n - x_n^2 = -(x_n-3)(x_n+1) \geqslant 0$ при $x_n \in [-1, 3]$. Тому (x_n) — неспадна послідовність, а за теоремою Вейєрштрасса є збіжною. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$.

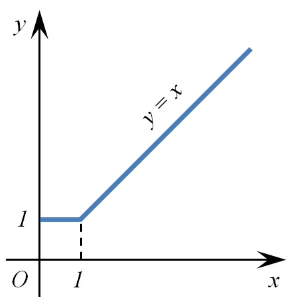
Приклад 3. *Побудуємо графік функції* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n},\ x \geqslant 0.$$

Знайдемо границю послідовності в залежності від x:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1+x^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x^n\left(\frac{1}{x^n}+1\right)} = \begin{cases} x, & x > 1; \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$



Для послідовності (x_n) знайдіть $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ та $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$ на $\overline{\mathbb{R}}$, якщо:

6.1 $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\sin\dfrac{n\pi}{2}$;

6.2 $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$;

6.3 $x_n = 1 - n\cos\dfrac{n\pi}{2}$;

6.4 $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

Дослідіть на збіжність послідовності, що задані рекурентно:

6.5 $x_1 = 5$, $x_{n+1} = \sqrt{5+x_n}$, $n \geqslant 1$;

6.6 $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{5} + 2x_n^2$, $n \geqslant 1$;

6.7 $x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + 2$, $n \geqslant 1, x_1 \in (1,2)$;

6.8 $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_{n+1}^2 = 3x_n - 2$, $n \geqslant 2, x_n \geqslant 0$.

Побудуйте графіки функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, де:

6.9 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{2+x^n},\ x \geqslant 0$;

6.10 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^x - n^{-x}}{n^x + n^{-x}}$;

6.11 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n + x^{-n}}{x^n - x^{-n}},\ x \neq 0$;

6.12 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(x^n + 3^n)}{n},\ x \geqslant 0$;

6.13 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + x^n + \left(\dfrac{x^2}{2}\right)^n},\ x \geqslant 0$.

Розділ 3. Границя та неперервність функції

Тема 4. Границя функції в точці. Порівняння функцій в околі граничної точки

Нехай $X \subset \mathbb{R}$, точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ називається ***граничною точкою*** множини X, якщо $\forall\, \varepsilon > 0 : S_\varepsilon(x_0) \bigcap (X \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Точка множини X, яка не є граничною, називається ***ізольованою*** ($\exists\, \varepsilon > 0 :\ S_\varepsilon(x_0) \bigcap (X \setminus \{x_0\}) = \emptyset$) [1, с. 386].

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і x_0 — гранична точка множини D_f. Число $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ називається ***частковою границею функції*** f ***в точці*** x_0, якщо $\exists\,(x_n) \subset D_f$: $(x_n \to x_0) \wedge (\forall n \in \mathbb{N}\, x_n \neq x_0) \wedge (f(x_n) \to \alpha)$ при $n \to \infty$. Множину всіх часткових границь функції f у точці x_0 позначимо $E_f(x_0)$.

Аналогічно послідовностям, визначимо ***верхню*** та ***нижню границі функції*** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ***в точці*** x_0, граничній для D_f, за формулами:

$$\overline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \overset{def}{=} \sup E_f(x_0); \qquad \underline{\lim_{x \to x_0}} f(x) \overset{def}{=} \inf E_f(x_0).$$

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і x_0 — гранична точка множини D_f. Якщо множина $E_f(x_0)$ складається з одного числа $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, то воно називається ***границею функції*** f ***в точці*** x_0 і позначається $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ (***границя за Гейне***).

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 — гранична точка D_f. Число α називається ***границею функції*** f ***в точці*** x_0 (при $x \to x_0$), якщо $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$: $\forall x \in D_f$: $0 < |x - x_0| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - \alpha| < \varepsilon$ (***границя за Коші***).

Нехай $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ і x_0 — гранична точка множини $D_f \bigcap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < x_0\}$ ($D_f \bigcap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > x_0\}$). Покладемо

$$f(x_0 - 0) \overset{def}{=} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \qquad \left(f(x_0 + 0) \overset{def}{=} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x) \right),$$

якщо ця границя існує. Числа $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ називаються відповідно ***лівою*** та ***правою границями функції*** f ***в точці*** x_0. Якщо $f(x_0 - 0) = \pm\infty$ або $f(x_0 + 0) = \pm\infty$, то відповідні границі називається ***нескінченними***.

Критерій існування границі функції в точці. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має границю в точці x_0, граничній для множин $D_f \bigcap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < x_0\}$ та $D_f \bigcap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > x_0\}$ тоді і тільки тоді, коли одночасно існують і рівні між собою односторонні границі $f(x_0 - 0)$ і $f(x_0 + 0)$.

Зауважимо, що у випадках $x_0 = \pm\infty$ мова йде лише про односторонні границі, які ми будемо позначати відповідно $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Для вивчення поведінки функції в околі деякої точки та порівняння різних функцій в околі точки корисно запровадити ***символи Ландау*** O (***O-велике***) і o (***o-мале***) аналогічно тому, як вони були визначені для послідовностей.

Вираз $f = O(1)$ при $x \to x_0$ означає, що функція f — ***обмежена в точці*** x_0. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$, то функція f — ***нескінченно мала в точці*** x_0, позначення: $f = o(1)$.

Нехай функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 — гранична точка множини $X = D_f = D_g$. Тоді:

1) якщо існує $M > 0$ і окіл $S_\delta(x_0)$ точки x_0, такі що $\forall x \in S_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}$ виконується нерівність: $|g(x)| \leqslant M|f(x)|$, то записуємо $g = O(f)$ (O-*велике*);
2) якщо одночасно $g = O(f) \wedge f = O(g)$, то кажуть, що f і g — ***функції одного порядку***;
3) якщо $\forall \varepsilon > 0$ існує окіл $S_\delta(x_0)$ такий, що $\forall x \in S_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}$ виконується нерівність: $|g(x)| \leq \varepsilon |f(x)|$, то записуємо $g = o(f)$ (o-*мале*);
4) якщо $f - g = o(g)$, то функції f і g називаються ***еквівалентними***, при цьому записують $f \sim g$.

Умова функцій одного порядку та критерій еквівалентності функцій. Функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в точці x_0 — граничній для множини $D_f = D_g$, тоді:

1) якщо $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in S_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\}$ $g(x) \neq 0$ і $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = c \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$ то функції f і g одного порядку в околі точки x_0;
2) якщо $\exists \varepsilon > 0 : \forall x \in S_\varepsilon(x_0) \backslash \{x_0\}$ $g(x) > 0$, то $f \sim g$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Властивості символів Ландау:

1. $O(f) = O(O(f))$;
2. $O(f) \cdot O(g) = O(fg)$;
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\} : O(\lambda f) = O(f)$;
4. $O(f) + O(f) = O(f)$;
5. $o(o(f)) = o(f)$;
6. $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$;
7. $o(f) + o(f) = o(f)$;
8. $O(f) + o(f) = O(f)$;
9. $o(O(f)) = o(f)$.

Властивості o-малих функцій в околі точки 0:

1. $x^m = o(x^n)$, $m > n$, $m, n \in \mathbb{R}^+$;
2. $o(cx^n) = c \cdot o(x^n) = o(x^n)$, $c \neq 0$;
3. $o(x^n) + o(x^m) = o(x^n)$, $m > n$;
4. $x^n \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$;
5. $o(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$;
6. $O(x^n) \cdot o(x^m) = o(x^{n+m})$.

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***обмеженою*** на множині $X \subset D_f$, якщо множина $f(X)$ — обмежена.

Якщо $f(x) = ag(x) + o(g(x))$ $(a \neq 0)$ в деякому околі $S_\varepsilon(x_0)\backslash\{x_0\}$, то $f \sim ag$, при цьому функція $x \mapsto ag(x), x \in S_\varepsilon(x_0)\backslash\{x_0\}$ називається ***головною частиною функції*** f ***при*** $x \to x_0$.

При знаходженні границь можливі такі типи невизначеностей:

1. $\dfrac{0_1}{0_2}$; **2.** $\dfrac{\infty_1}{\infty_2} = \dfrac{\frac{1}{\infty_2}}{\frac{1}{\infty_1}} \to \dfrac{0_2}{0_1}$; **3.** $0_1 \cdot \infty = \dfrac{0_1}{\frac{1}{\infty}} = \dfrac{0_1}{0_2}$;

4. $\infty_1 - \infty_2 = \infty_1\left(1 - \dfrac{\infty_2}{\infty_1}\right) = \begin{cases} \infty_1 \cdot 0, & \text{якщо } \left(1 - \dfrac{\infty_2}{\infty_1}\right) \to 0, \\ \text{немає невизначеності}, & \text{якщо } \left(1 - \dfrac{\infty_2}{\infty_1}\right) \not\to 0; \end{cases}$

5. $1^\infty = e^{\infty \ln 1} \to e^{\infty \cdot 0}$; **6.** $\infty^0 = e^{0 \ln \infty} \to e^{0 \cdot \infty}$; **7.** $0_1^{0_2} = e^{0_1 \ln 0_2} \to e^{0_1 \cdot \infty}$.

Використаємо відомі границі $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ для одержання так званих асимптотичних формул:

1. $\dfrac{\sin x}{x} = 1 + o(1)$, $x \to 0 \;\Rightarrow\; \sin x = x + o(x) = o(1)$;

2. $\cos x = 1 - 2\sin^2 \dfrac{x}{2} = 1 - 2\left(\dfrac{x}{2} + o\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^2 = 1 - 2 \cdot \dfrac{x^2}{4} + o\left(x^2\right) =$

$= 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right) \;\Rightarrow\; \cos x = 1 + o(1) = 1 + o(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$;

3. $\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \ln e = 1$, $x \to 0 \;\Rightarrow\; \ln(1+x) = x + o(x) = o(1)$;

4. $\dfrac{e^x - 1}{x} = \left| \begin{array}{c} e^x - 1 = t \\ x = \ln(1+t) \end{array} \right| = \dfrac{t}{\ln(1+t)} \to 1$, $x \to 0 \;\Rightarrow\; e^x = 1 + x + o(x) = 1 + o(1)$;

5. $a^x = e^{x \ln a} = 1 + o(1) = 1 + x\ln a + o(x)$, $x \to 0$;

6. $\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \dfrac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{x} = \dfrac{e^{\alpha\ln(1+x)}}{\alpha \ln(1+x)}\alpha \cdot \dfrac{\ln(1+x)}{x} \to \alpha$, $x \to 0 \;\Rightarrow$

$(1+x)^\alpha = 1 + o(1) = 1 + \alpha x + o(x)$, $x \to 0$.

Практичне заняття 7

Приклад 1. *Користуючись означенням Коші, для функції* $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *запишемо таке твердження:* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

⌜

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 : \; \forall x \in (a - \delta, a) \;\Rightarrow\; |f(x) - b| < \varepsilon.$ ⌟

Приклад 2. *Користуючись означенням Коші, для функції* $x \mapsto y(x)$ *запишемо таке твердження:* $y \to b - 0$ *при* $x \to a$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$.

⌜

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon, a) > 0 : \; \forall x : 0 < |x - a| < \delta \;\Rightarrow\; b - \varepsilon < f(x) < b.$ ⌟

Приклад 3. *Користуючись означенням Коші границі функції в точці, доведемо рівність:* $\lim\limits_{x \to 2} x^3 = 8$.

⌜

Нехай $\varepsilon > 0$ — довільне. Для зручності розглянемо $1 < x < 3$, тобто $|x-2| < 1$. Тоді

$$|x^3 - 8| = |x-2| \cdot |x^2 + 2x + 4| < 19 \cdot |x-2| < \varepsilon, \text{ якщо } |x-2| < \frac{\varepsilon}{19}.$$

Отже, досить покласти $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{19}, 1\right\} > 0$ і за означенням рівність є справедливою.

⌟

Приклад 4. *Нехай функція f визначена в деякому околі $S_\varepsilon(x_0)$ точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Доведемо, що $O(f) + O(f) = O(f)$ при $x \to x_0$.*

⌜

Позначимо $u = O(f)$. Це означає, що $\exists\, M_1 > 0$ та окіл $S_{\varepsilon_1}(x_0)$:

$$\forall x \in S_{\varepsilon_1}(x_0)\backslash\{x_0\} \;\Rightarrow\; |u| \leqslant M_1|f|.$$

Також для $v = O(f)$ існує $M_2 > 0$ та окіл $S_{\varepsilon_2}(x_0)$:

$$\forall x \in S_{\varepsilon_2}(x_0)\backslash\{x_0\} \;\Rightarrow\; |v| \leqslant M_2|f|.$$

Тоді для $\forall x \in S_\varepsilon(x_0)\backslash\{x_0\},\ \varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\} \;\Rightarrow$

$$|u+v| \leqslant |u| + |v| \leqslant M_1|f| + M_2|f| = (M_1 + M_2)|f|,$$

тобто $u + v = O(f)$.

⌟

Приклад 5. *Доведемо, що $x^m = o(x^n)$, $m > n$ при $x \to 0$ (в околі точки 0).*

⌜

За означенням, $\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\, S_\delta(0)$:

$$\forall x \in S_\delta(0)\backslash\{0\} \;\Rightarrow\; |x^m| < \varepsilon|x^n| \;\Leftrightarrow\; |x^{m-n}| < \varepsilon \;\Leftrightarrow\; |x| < \varepsilon^{\frac{1}{m-n}}.$$

Отже, обираючи $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{m-n}}$, маємо, що $x^m = o(x^n)$, $m > n$. З іншого боку, справедливою є рівність $x^{m-n} = o(1)$, $x \to 0$, тобто $\lim\limits_{x\to 0} x^{m-n} = 0$, $m > n$. Аналогічно для довільних функцій f та g, визначених в околі точки x_0, умова $f = o(g)$, $x \to x_0 \;\Leftrightarrow\; \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

⌟

Приклад 6. *Зробимо спрощення виразу $(x - x^2 + x^3 + o(x^4))(1 - 2x + 2x^3 + o(x^4))$ при $x \to 0$ (в околі точки 0).*

⌜

$$\left(x - x^2 + x^3 + o(x^4)\right)\left(1 - 2x + 2x^3 + o(x^4)\right) = x - 3x^2 - x^3 - 2x^5 + 2x^6 + o(x^4) -$$
$$- x \cdot o(x^4) - x^2 \cdot o(x^4) + 3x^3 \cdot o(x^4) + o(x^4) \cdot o(x^4) =$$
$$= x - 3x^2 - x^3 + o(x^4) = x - 3x^2 + o(x^2) = x + o(x).$$

⌟

Приклад 7. *Знайдемо границю виразу* $\dfrac{x^3 - 2x^2 + o(x^3)}{x^4 + 4x^2 + o(x^3)}$ *при $x \to 0$.*

⌜

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3 - 2x^2 + o(x^3)}{x^4 + 4x^2 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{-2x^2 + o(x^2)}{4x^2 + o(x^2)} = -\frac{1}{2}.$$

⌟

Користуючись означенням Коші, для функції $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, запишіть такі твердження:

7.1 $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$;

7.2 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$;

7.3 $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty;$

7.4 $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = b;$

7.5 $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = +\infty;$

7.6 $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \infty.$

Користуючись означенням Коші, для функції $x \mapsto y(x)$, $\{a, b\} \subset \mathbb{R}$, запишіть такі твердження:

7.7 $y \to b - 0$ при $x \to a + 0;$

7.8 $y \to b - 0$ при $x \to -\infty;$

7.9 $y \to b + 0$ при $x \to a - 0;$

7.10 $y \to b + 0$ при $x \to \infty.$

Користуючись означенням Коші границі функції в точці, доведіть рівності:

7.11 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+1}{x^2-1} = \dfrac{5}{3};$

7.12 $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2(x-1)}{x+1} = 1;$

7.13 $\lim\limits_{x\to \pi} \sin x = 0;$

7.14 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x = 1;$

7.15 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x^2-5}{x^2+5} = 2;$

7.16 $\lim\limits_{x\to 0{,}001} \operatorname{sgn} x = 1.$

Нехай функції f та g визначені в деякому околі $S_\varepsilon(x_0)$ точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$. Доведіть, що при $x \to x_0$ справедливі такі твердження:

7.17 $o(f) + o(f) = o(f);$

7.18 $o(f) + O(f) = O(f);$

7.19 $o(f) \cdot o(f) = o(f);$

7.20 $O(f) \cdot O(f) = O(f);$

7.21 $o(f) \cdot O(f) = o(f);$

7.22 $O(o(f)) = o(f);$

7.23 $o(O(f)) = o(f);$

7.24 $o(f + o(f)) = o(f);$

7.25 $o(f^n) = (o(f))^n,\ n > 0;$

7.26 $O(f) \cdot O(g) = O(fg);$

7.27 $o(f) \cdot o(g) = o(fg);$

7.28 $O(f) \cdot o(g) = o(f) \cdot O(g) = o(fg).$

Доведіть справедливість таких рівностей при $x \to 0$ (в околі точки 0):

7.29 $o(x^m) = o(x^n)$, $m > n;$

7.30 $o(o(x^n)) = o(x^n);$

7.31 $o(x^m) + o(x^n) = o(x^n)$, $m > n;$

7.32 $c \cdot o(x^n) = o(x^n)$, $c \neq 0;$

7.33 $o(cx^n) = o(x^n)$, $c \neq 0;$

7.34 $O(x^m) = O(x^n)$, $m > n;$

7.35 $O(x^m) + O(x^n) = O(x^n)$, $m > n;$

7.36 $x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n});$

7.37 $O(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n});$

7.38 $o(x^m) \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}).$

Зробіть спрощення виразів при $x \to 0$ до поліному степеня $\leqslant k$ із додаванням o-малого відповідного степеня x:

7.39 $\left(x + x^2 + o(x^3)\right)\left(2 + 3x^2 + 4x^4 + o(x^5)\right)$, $k = 3;$

7.40 $\left(1 - x^2 + o(x^4)\right)\left(2 + x^2 + o(x^4)\right) - \left(1 - x^3\right)\left(3 + x^2 + o(x^5)\right)$, $k = 4;$

7.41 $\left(5x + 4x^2 - 3x^3 + o(x^3)\right)\left(1 + x^2 + 2x^3 + o(x^5)\right)$, $k = 3;$

7.42 $\left(x + x^2 + x^3 + o(x^3)\right)\left(1 - x + x^2 - x^3 + o(x^4)\right) + 3x^2 - 5x$, $k = 2;$

7.43 $\left(x + 2x^2 + 3x^3 + o(x^5)\right)\left(1 - x - 2x^2 + o(x^4)\right) - 2x + 4x^3 + o(x^4)$, $k = 4.$

Знайдіть, де це можливо, границі таких виразів при $x \to 0$:

7.44 $\dfrac{x^2 - x^3 + o(x^3)}{4x^4 + 2x^2 + o(x^2)};$

7.45 $\dfrac{5x - x^2 + o(x^3)}{3x^3 - 2x + o(x^2)};$

7.46 $\dfrac{-x^3+o(x^3)}{x^2+o(x^2)}$; **7.47** $\dfrac{x^3+o(x)}{x^4+o(x^2)}$;

7.48 $\dfrac{o(x^2)}{o(x)}$; **7.49** $\dfrac{2x^3+o(x)}{x^2+o(x)}$;

7.50 $\dfrac{3x^4-5x^3+o(x^4)}{x^3+4x^4+o(x^3)}$; **7.51** $\dfrac{x^2-x^3+x^4+o(x^4)}{x^3-x^2+2x+o(x^3)}$.

Практичне заняття 8

Приклад 1. *Знайдемо границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^4-(1+4x)}{2x^2+x^4}$.

⌜

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^4-(1+4x)}{2x^2+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{1+4x+6x^2+o(x^2)-1-4x}{2x^2+o(x^2)}=3.$$

⌟

Приклад 2. *Знайдемо границю* $\lim\limits_{x\to x_0}(u(x))^{v(x)}$, *де* $x_0=2$, $u(x)=\dfrac{-2+x+2x^2}{2-x+x^2}$, $v(x)=\dfrac{1-x}{1+x^2}$.

⌜

Оскільки $\lim\limits_{x\to 2}u(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{-2+x+2x^2}{2-x+x^2}=2$ та $\lim\limits_{x\to 2}v(x)=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1-x}{1+x^2}=-\dfrac{1}{5}$, то

$$\lim_{x\to 2}(u(x))^{v(x)}=\left(\lim_{x\to 2}u(x)\right)^{\lim\limits_{x\to 2}v(x)}=2^{-\frac{1}{5}}.$$

⌟

Приклад 3. *Знайдемо границю* $\lim\limits_{x\to\infty}(u(x))^{v(x)}$, *де* $u(x)=\dfrac{11+x}{6+x}$, $v(x)=\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}$.

⌜

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}u(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11+x}{6+x}=1$ та $\lim\limits_{x\to\infty}v(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x}{1+\sqrt{x}}=\infty$, то позбудемося невизначеності $[1^\infty]$ таким чином:

$$\lim_{x\to\infty}(u(x))^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}v(x)(u(x)-1)}=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\cdot\frac{5}{6+x}\right)\right)=e^0=1.$$

⌟

Приклад 4. *Для функції* $f(x)=\left(x+3^{\frac{1}{3-x}}\right)^{-1}$ *знайдемо односторонні границі при* $x\to x_0+0$ *та* $x\to x_0-0$ *для випадків:* ***1)*** $x_0=0$, ***2)*** $x_0=3$.

⌜

У випадку $x_0=0$: $\lim\limits_{x\to 0+0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Якщо ж $x_0=3$, то

$$\lim_{x\to 3+0}f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\frac{1}{x+3^{\frac{1}{3-x}}}=\frac{1}{3+3^{\frac{1}{0-}}}=\frac{1}{3+3^{-\infty}}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to 3-0}f(x)=\lim_{\substack{x\to 3\\ x<3}}\frac{1}{x+3^{\frac{1}{3-x}}}=\frac{1}{3+3^{\frac{1}{0+}}}=\frac{1}{3+3^{+\infty}}=\frac{1}{+\infty}=0.$$

⌟

Приклад 5. *Порівняємо функції* $f(x)=\cos x$ *та* $g(x)=\dfrac{\operatorname{ch}x-1}{x^2}$ *при* $x\to 0$.

⌜

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$ та $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{f(x)} = \dfrac{1}{2}$, тобто $f = O(g) \wedge g = O(f)$ при $x \to 0$.

⌟

Приклад 6. *Визначимо порядок відносно шкали x^n функції $f(x) = x\sin\sqrt{x}$ при $x \to 0$.*

⌜

Оскільки при $x \to 0:\ f(x) = x\cdot(\sqrt{x}+o(\sqrt{x})) = x^{3/2}+o\left(x^{3/2}\right)$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^m} = \lim_{x\to 0}\frac{x^{3/2}+o\left(x^{3/2}\right)}{x^m} = 1 \ \Leftrightarrow\ m = \frac{3}{2}.$$

⌟

Знайдіть границі:

8.1 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$;

8.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x-x^3}$;

8.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^m-1}{x^k-1},\ m,k\in\mathbb{N}$;

8.4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+mx)^k-(1+kx)^m}{x^2}$;

8.5 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$;

8.6 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7+x^3}-\sqrt{3+x^2}}{1-x}$;

8.7 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

8.8 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

8.9 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{\frac{1+\sqrt{x}}{1-x}}$;

8.10 $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2+x}{3-x}\right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1-x}}$;

8.11 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+2}{x^2-2}\right)^{x^2}$;

8.12 $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin^3 x}}$;

8.13 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

8.14 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$;

8.15 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{3x^2+x-1}{2x^2-x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$;

8.16 $\lim\limits_{x\to \infty}\left(\dfrac{x^2+3x-2}{2x^2-x-2}\right)^{\frac{1}{x}}$;

8.17 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\sin x}$;

8.18 $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+\operatorname{sh} x}{x-\operatorname{sh} x}$;

8.19 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^a)}{\sin(\pi x^b)}$;

8.20 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sh} x - x}{x^3}$;

8.21 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{ch} x-\operatorname{ch} a}{x-a}$;

8.22 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh} a}{x-a}$;

8.23 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{th} x-\operatorname{th} a}{x-a}$;

8.24 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{e^x-e^a}{x-a}$;

8.25 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln x-\ln a}{x-a}$;

8.26 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{th} x}{x}$;

8.27 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

8.28 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos\sqrt{x}}$;

8.29 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\pi}{\cos x}-2x\operatorname{tg}x\right);$

8.30 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\sin(1-2x)}{4x^2-1};$

8.31 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2^x-x^2}{2-x};$

8.32 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[4]{16-x}-e^x}{\ln\left(1+e^x-\cos x\right)};$

8.33 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\cos x}-e^{1+\ln(1+x)}}{\sqrt{9+2x}-3};$

8.34 $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\ln\cos\dfrac{\pi}{x};$

8.35 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx};$

8.36 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\left(xe^x\right)-\cos\left(xe^{-x}\right)}{x^3};$

8.37 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x\cos 2x}-(x^2-1)^2}{e^{\operatorname{tg}x^2}-\cos x}.$

Для функції $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ знайдіть односторонні границі при $x\to x_0+0$ та $x\to x_0-0$. Чи існує у кожному випадку $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$?

8.38 $f(x)=[x]$, **1)** $x_0=1$, **2)** $x_0=\sqrt{3}$, **3)** $x_0=0,999$;

8.39 $f(x)=\{x\}$, **1)** $x_0=0$, **2)** $x_0=\sqrt{2}$, **3)** $x_0=\dfrac{1}{3}$;

8.40 $f(x)=\operatorname{sgn}\,x$, **1)** $x_0=0$, **2)** $x_0=e$;

8.41 $f(x)=\dfrac{1}{e^{\{x\}}-1}$, **1)** $x_0=0$, **2)** $x_0=\dfrac{1}{3}$, **3)** $x_0=-\dfrac{17}{8}$;

8.42 $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$, **1)** $x_0=0$, **2)** $x_0=2$, **3)** $x_0=\pi$;

8.43 $f(x)=\dfrac{1}{1-2^{\frac{x}{1-x}}}$, **1)** $x_0=-1$, **2)** $x_0=0$, **3)** $x_0=1$;

8.44 $f(x)=\operatorname{sgn}\,(\cos\pi x)$, **1)** $x_0=0$, **2)** $x_0=\dfrac{1}{2}$, **3)** $x_0=1$.

Порівняйте функції f та g при $x\to 0$ $(x\to 0+)$, тобто вкажіть, які з умов $f=O(g)$, $g=O(f)$, $f=o(g)$, $g=o(f)$, $f\sim g$ виконуються:

8.45 $f(x)=\dfrac{\cos x-1}{x}$, $g(x)=\operatorname{tg}x$;

8.46 $f(x)=[x]$, $g(x)=\{x\}$;

8.47 $f(x)=\{x\}$, $g(x)=e^x-1$;

8.48 $f(x)=\cos x-1$, $g(x)=\operatorname{ch}x-1$;

8.49 $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\dfrac{1}{x^2}$;

8.50 $f(x)=1-\cos x$, $g(x)=x^{\frac{3}{2}}$;

8.51 $f(x)=x^x$, $g(x)=1$;

8.52 $f(x)=\sin x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\operatorname{tg}x$;

8.53 $f(x)=x\cos\dfrac{1}{x}$, $g(x)=x$;

8.54 $f(x)=x^{x^x}$, $g(x)=\sin x$.

Визначте порядок відносно шкали x^n функції $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ при $x\to 0$ $(x\to 0+)$:

8.55 $f(x)=e^{\sin x}-1$;

8.56 $f(x)=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$;

8.57 $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$;

8.58 $f(x)=\sqrt{1+x}-1$;

8.59 $f(x) = \ln \cos \sqrt{x}$;

8.60 $f(x) = 1 - \cos(\sin x) - e^{x^2}$.

При яких значеннях параметрів α та β справджується рівність $f(x) = o(1)$ при $x \to x_0$ $(x \to x_0 + 0)$, якщо:

8.61 $f(x) = \dfrac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}$, $x_0 = 0$;

8.62 $f(x) = x^\alpha \sin \dfrac{1}{x^\beta}$, $x_0 = 0$;

8.63 $f(x) = \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} x}{1 + x} - \alpha x^3 - \beta$, $x_0 = 0$;

8.64 $f(x) = \ln\left(1 + e^{3x}\right) - \alpha x - \beta$, **1)** $x_0 = 0$, **2)** $x_0 = +\infty$;

8.65 $f(x) = \dfrac{xe^x}{1 + x} - \alpha x - \beta$, **1)** $x_0 = -\infty$, **2)** $x_0 = +\infty$;

8.66 $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1} + \dfrac{\alpha}{x} + \beta$, $x_0 = +\infty$.

Тема 5. Неперервність функції

З поняттям границі функції тісно пов'язане поняття неперервності функції.

Нехай x_0 — гранична точка множини D_f і при цьому $x_0 \in D_f$. Функція f є ***неперервною в точці*** x_0, якщо виконується одна із еквівалентних умов:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$;
2) $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon, x_0) : \forall x \in D_f \;\; |x - x_0| < \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (*означення неперервної функції в точці за Коші*);
3) $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : (x_n) \in D_f \wedge (x_n) \to x_0$ при $n \to \infty \;\Rightarrow\; f(x_n) \to f(x_0)$, $n \to \infty$ (*означення неперервної функції в точці за Гейне*);
4) $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) \to 0$ при $\Delta x = x - x_0 \to 0$.

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, яка не є неперервною в точці $x_0 \in D_f$, називається ***розривною*** в цій точці.

Теорема (про арифметичні дії з неперервними функціями). Нехай функції f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервні в точці $x_0 \in D_f = D_g$. Тоді неперервні в цій точці також і функції $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ та $\dfrac{f}{g}$ (якщо $g(x_0) \neq 0$) [1, с. 136].

Теорема (про неперервність суперпозиції функцій). Нехай f неперервна в точці $x_0 \in D_f$, а g неперервна в точці $\xi_0 \in D_g$. Якщо $g(\xi_0) = x_0$, то суперпозиція $f \circ g$ неперервна в точці ξ_0 [1, с. 137].

Теорема (про границю неперервної суперпозиції). Нехай ξ_0 — гранична точка множини $D_{f \circ g}$. Якщо $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} g(\xi) = x_0$ і $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — неперервна в точці x_0, то $\lim\limits_{\xi \to \xi_0} f\left(g(\xi)\right) = f(x_0)$ [1, с. 138].

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***неперервною зліва*** (***справа***) ***в точці*** $x_0 \in D_f$, граничній для множини D_f, якщо $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ $\left(f(x_0 + 0) = f(x_0)\right)$.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 — гранична точка множини D_f. Якщо $x_0 \notin D_f$, то точка x_0 називається ***особливою*** для функції f. Зокрема, якщо $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$, то точка x_0 називається ***усувною особливою***, а якщо $\nexists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, то точка x_0 називається ***істотно особливою*** [1, с. 142].

Класифікація точок розриву функції

Точки розриву та особливі точки функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, які є граничними одночасно для обох множин $D_f \bigcap (x_0, +\infty)$ та $D_f \bigcap (-\infty, x_0)$, поділяються на такі типи:

1) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \in \mathbb{R}$ і $f(x_0)$ або не існує, або $f(x_0) \neq \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; тоді точка x_0 називається ***точкою усувного розриву***;

2) $\exists f(x_0 - 0) \in \mathbb{R}$, $\exists f(x_0 + 0) \in \mathbb{R}$ і $f(x_0 + 0) \neq f(x_0 - 0)$ називається ***точкою розриву першого роду***; число $\eta = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ називається ***стрибком функції*** f у точці x_0;

3) якщо односторонні границі в точці x_0 або не існують, або хоча б одна з них — нескінченна, то точка x_0 називається ***точкою розриву другого роду***;

4) якщо $\exists\, f(x_0+0) \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists\, f(x_0-0) \in \overline{\mathbb{R}}$ і хоча б одна з них — нескінченна, то точка розриву II роду x_0 називається ***полюсом*** [1, с. 141].

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***неперервною на множині*** $X \subset D_f$, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини. Клас усіх функцій, неперервних на X, позначають символом $C(X)$ [1, с. 141].

Властивість. Всі елементарні функції є неперервними на своїх областях визначення.

Функція $f : X \to \mathbb{R}$ називається ***кусково-неперервною***, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках множини X, за виключенням скінченної множини точок, які є точками розриву I роду або точками усувного розриву функції f [1, с. 142].

Зокрема, якщо $X = [a, b]$, то функція f називається *кусково-неперервною*, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках сегмента $[a, b]$, за винятком скінченної множини точок, в кожній з яких має скінченні лівосторонню та правосторонню границі, і крім того має скінченні значення $f(a+0)$ та $f(b-0)$.

Теорема (Вейєрштрасса). Нехай $f \in C\,[a, b]$. Тоді функція f — обмежена та $\exists\,\{x_*, x^*\} \subset [a, b] : \;\; f(x_*) = \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x), \;\; f(x^*) = \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ [8, с. 70].

Теорема (Коші про проміжне значення). Нехай $f \in C\,[a, b]$. Тоді для будь-якого числа L з відрізка із кінцями у точках $f(a)$ і $f(b)$ існує $c \in [a, b]$: $f(c) = L$ [8, с. 70].

Практичне заняття 9

Приклад 1. *Доведемо неперервність функції* $f(x) = \cos x$ *на множині* $\mathbb{R}$.

⌜

Оскільки для довільної точки $x_0 \in \mathbb{R}$ та $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2\sin\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2} \right| \leqslant 2\left|\frac{x-x_0}{2}\right| < \varepsilon,$$

то за означенням Коші f є неперервною на $\mathbb{R}$ за умови, що $|x - x_0| < \delta = \varepsilon$. ⌟

Приклад 2. *Дослідимо на неперервність функцію* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1}, & x \neq 1, \\ 4, & x = 1. \end{cases}$$

⌜

При $x \neq 1$ функцію можна переписати у вигляді $f(x) = x^2 + x + 1$, а тому $f \in C(\mathbb{R}\backslash\{1\})$. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 1+0} f(x) = 3 \neq f(1)$, то $x = 1$ є точкою усувного розриву.

⌟

Приклад 3. *Дослідимо на неперервність функцію* $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$ *на* $\mathbb{R}$.

$\ulcorner$

На $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ функція є неперервною за теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = -\dfrac{\pi}{2}$ та $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \dfrac{\pi}{2}$, то $x = 0$ є точкою розриву I роду.

$\lrcorner$

Приклад 4. *Дослідимо на неперервність функцію* $f(x) = e^{x+\frac{1}{x}}$, $x \in \mathbb{R}$.

$\ulcorner$

На $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ функція є неперервною за теоремою про неперервність суперпозиції неперервних функцій. Оскільки $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0$ та $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \infty$, то $x = 0$ є точкою розриву II роду типу полюс.

$\lrcorner$

Приклад 5. *Дослідимо на неперервність функцію* $f(x) = x[x]$, $x \in \mathbb{R}$.

$\ulcorner$

Функція f є неперервною на множині $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$. Перевіримо точки $n \in \mathbb{Z}$:

$$\lim_{x\to n-0} f(x) = n\cdot(n-1) = n^2 - n, \qquad \lim_{x\to n+0} f(x) = n\cdot n = n^2.$$

Отже, у точках $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ функція f має розриви I роду, а у точці 0 функція f — неперервна.

$\lrcorner$

Доведіть неперервність функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на D_f за означенням Коші, якщо:

9.1 $f(x) = \sin x$;

9.2 $f(x) = \operatorname{tg} x$;

9.3 $f(x) = \operatorname{ctg} x$;

9.4 $f(x) = \arcsin x$;

9.5 $f(x) = \operatorname{sh} x$;

9.6 $f(x) = \operatorname{ch} x$;

9.7 $f(x) = \sqrt{x}$;

9.8 $f(x) = x^3$;

9.9 $f(x) = e^x$;

9.10 $f(x) = \ln x$.

Дослідіть на неперервність і встановіть характер точок розриву функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, а також побудуйте її графік, якщо:

9.11 $f(x) = \begin{cases} 2 - x, & x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{x-2}, & x > 2; \end{cases}$

9.12 $f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

9.13 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sin x}, & x < 0, \\ \ln x + \dfrac{\pi}{4}, & 0 \leqslant x < 1, \\ \operatorname{arctg} x, & x \geqslant 1; \end{cases}$

9.14 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leqslant -\dfrac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x, & -\dfrac{\pi}{4} < x < 0, \\ e^x - 1, & x \geqslant 0; \end{cases}$

9.15 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{|x|}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

9.16 $f(x) = \begin{cases} \left|\dfrac{\sin x}{x}\right|, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$

9.17 $f(x) = [x] \sin \pi x$;

9.18 $f(x) = 2^{-2^{\frac{1}{1-x}}}$;

9.19 $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x}\right)$;

9.20 $f(x) = \dfrac{1}{\ln |x|}$;

9.21 $f(x) = \dfrac{[x]}{\pi}\left([x] - (-1)^{[x]}\cos \pi x\right)$; **9.22** $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{2}{3}\operatorname{sgn} x, & |x| > 1; \end{cases}$

9.23 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x^2-1}{x\sqrt{3}} + \dfrac{\pi}{2\sqrt{3}}\operatorname{sgn} x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

9.24 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\dfrac{3\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\dfrac{x+\pi}{2\pi}\right], & x \neq (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}, \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{5}}\left(n + \dfrac{1}{2}\right), & x = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Підберіть значення параметрів α та β, щоб функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ була неперервною на $\mathbb{R}$:

9.25 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x^3-8} + \dfrac{\sin x}{2x}, & x \notin \{0, 2\}, \\ \alpha, & x = 0, \\ \beta, & x = 2; \end{cases}$

9.26 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{27+x} - \sqrt[3]{27-x} + x^2}{x + 2\sqrt[3]{x^4}}, & x \neq 0, \\ \alpha, & x = 0. \end{cases}$

Дослідіть на неперервність зліва та справа функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в усіх точках множини D_f, якщо:

9.27 $f(x) = [x^2]$; **9.28** $f(x) = [2x] - [3x]$;

9.29 $f(x) = \dfrac{2x+1}{6 - 2^{\frac{x+1}{x}}}$, $x \neq 0$ та: **1)** $f(0) = 0$, **2)** $f(0) = \dfrac{1}{6}$;

9.30 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, $x \neq 0$ та: **1)** $f(0) = 1$, **2)** $f(0) = 0$, **3)** $f(0) = e$.

Тема 6. Рівномірно неперервні функції

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***рівномірно неперервною на множині*** $X \subset D_f$, якщо $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; \forall \, (\{x_1, x_2\} \subset X)$: $|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Множина $X \subset \mathbb{R}$ називається ***компактною в собі*** або ***компактом***, якщо з будь-якої послідовності точок $(x_n) \subset X$ можна виділити підпослідовність (x_{n_k}), збіжну до деякої точки $x_0 \in X$ [1, с. 145].

Теорема (критерій компактності). Множина $X \subset \mathbb{R}$ є компактом тоді і тільки тоді, коли вона одночасно замкнена і обмежена [1, с. 146].

Теорема (Кантора). Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна на множині $X \subset D_f$. Якщо X — компакт, то f є рівномірно неперервною на X [1, с. 157].

При дослідженні функцій на рівномірну неперервність можна використовувати властивості 1–3 і твердження 4–6.

1. Якщо $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ рівномірно неперервна на $X \subset D_f$, то $\forall Y \subset X$ звуження f також є рівномірно неперервним на Y (*рівномірна неперервність звуження*).

2. Якщо функція f є рівномірно неперервною на множинах $[a, b]$ та $[b, c]$, то вона є рівномірно неперервною на $[a, c]$ $\big(\{a, c\} \subset \overline{\mathbb{R}}\big)$ (*рівномірна неперервність на об'єднанні*).

3. Якщо f, g — рівномірно неперервні на X функції, то $\forall \{\alpha, \beta\} \subset \mathbb{R}$ функція $(\alpha f + \beta g)$ є рівномірно неперервною на X (*лінійність рівномірної неперервності*).

4. Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ є рівномірно неперервною на X тоді і тільки тоді, коли $\forall \, (x_n), (y_n) \subset X$ з умови $x_n - y_n \to 0, \; n \to \infty$ випливає: $f(x_n) - f(y_n) \to 0$, $n \to \infty$ (*рівномірна неперервність в термінах послідовностей*).

5. Якщо $f \in C[a, +\infty)$ ($f \in C(-\infty, a]$) і має скінченну границю $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b\right)$, $b \in \mathbb{R}$, то f є рівномірно неперервною на $[a, +\infty)$ ($(-\infty, a]$) (*рівномірна неперервність на нескінченності*).

6. Нехай $f \in C(a, b)$. Якщо $\exists \lim\limits_{x \to a+0} f(x) = A \in \mathbb{R}$, $\exists \lim\limits_{x \to b-0} f(x) = B \in \mathbb{R}$, то f — рівномірно неперервна на (a, b), інакше f не є рівномірно неперервною на (a, b) (*рівномірна неперервність на інтервалі*).

Практичне заняття 10

Приклад 1. *Дослідимо на рівномірну неперервність функцію $f(x) = \sin x$ на множині $\mathbb{R}$.*

Оскільки $\forall \, x', x'' \in \mathbb{R}$:

$$|\sin x' - \sin x''| = \left| 2 \sin \frac{x' - x''}{2} \cos \frac{x' + x''}{2} \right| \leqslant |x' - x''| < \varepsilon,$$

то за означенням функція f є рівномірно неперервною на $\mathbb{R}$ за умови, що

$|x' - x''| < \delta = \varepsilon$.

$\lrcorner$

Приклад 2. *Дослідимо на рівномірну неперервність функцію* $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ *на множинах* $X_1 = (2,3)$, $X_2 = (2,+\infty)$ *та* $X_3 = (1,2]$.

$\ulcorner$

1. Функція f є неперервною на компактній множині $[2,3]$. Тому f — рівномірно неперервна на $[2,3]$ за теоремою Кантора. Оскільки $X_1 \subset [2,3]$, то за властивістю 1 функція f є рівномірно неперервною на множині X_1.

2. Оскільки $f \in C\left([2,+\infty)\right)$ та $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то за твердженням 5 функція f є рівномірно неперервною на множині X_2.

3. Покажемо, що $\nexists \lim\limits_{x\to 1+0} f(x)$. Нехай $x_n = 1+\dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ та $y_n = 1+\dfrac{1}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$|\, x_n - y_n| = \frac{1}{n(n+1)} \to 0,\ n \to \infty.$$

З іншого боку, $|f(x_n) - f(y_n)| = |\, n - (n+1)| = 1 \not\to 0,\ n \to \infty$. Отже, згідно із твердженням 6 функція f не є рівномірно неперервною на множині X_3.

$\lrcorner$

Приклад 3. *Дослідимо на рівномірну неперервність функцію* $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ *на множині* $(0,1)$.

$\ulcorner$

Покажемо, що $\nexists \lim\limits_{x\to 0+0} f(x)$. Нехай $x_n = \dfrac{1}{2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$ та $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$|\, x_n - y_n| = \frac{\pi}{4\pi n\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)} \to 0,\ n \to \infty.$$

З іншого боку, $|f(x_n) - f(y_n)| = |\,0 - 1| = 1 \not\to 0,\ n \to \infty$. Отже, функція f не є рівномірно неперервною на інтервалі $(0,1)$ згідно із твердженням 4.

$\lrcorner$

Дослідіть функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на рівномірну неперервність на множині X, якщо:

10.1 $f(x) = \operatorname{tg} x$, **1)** $X = \left(0, \dfrac{\pi}{4}\right)$, **2)** $X = \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$;

10.2 $f(x) = \dfrac{1}{x}$, **1)** $X = \left(\dfrac{1}{100}, 100\right)$, **2)** $X = (0,1)$, **3)** $X = (2,+\infty)$;

10.3 $f(x) = \ln x$, **1)** $X = (0,1)$, **2)** $X = (1,e)$, **3)** $X = (e,+\infty)$;

10.4 $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$, **1)** $X = (0,\pi)$, **2)** $X = (1,+\infty)$;

10.5 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|\sin x|}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ **1)** $X = [0,1)$, **2)** $X = [-1,1]$;

10.6 $f(x) = e^{-\arcsin x}$, **1)** $X = (-1,1)$, **2)** $X = [-1,1]$;

10.7 $f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} x}$, **1)** $X = (-1,0)$, **2)** $X = (0,+\infty)$;

10.8 $f(x) = \sqrt{x}$, **1)** $X = (0,2)$, **2)** $X = (2,+\infty)$;

10.9 $f(x) = \cos x^2, \ \ X = \mathbb{R};$

10.10 $f(x) = x + \sin x, \ \ X = \mathbb{R};$

10.11 $f(x) = \operatorname{arctg} x, \ \ X = \mathbb{R};$

10.12 $f(x) = \operatorname{arcctg} x, \ \ X = \mathbb{R}.$

Розділ 4. Диференційне числення

Тема 7. Похідна та диференціал функції

Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$. Функція f називається ***диференційовною в точці*** x_0, якщо існує така неперервна в точці x_0 функція $D_f \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}$, що $\forall x \in D_f$ виконується рівність: $f(x) - f(x_0) = (x - x_0)\,\varphi(x)$.

Якщо x_0 — гранична точка множини D_f, то число $\varphi(x_0)$ називається ***похідною функції f в точці*** x_0 і позначається символом $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$ та є граничною точкою D_f. Якщо f диференційовна в точці x_0, то

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Правила диференціювання [1, с. 177–179].

Нехай функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовні в точці x_0, граничній для множини $D_f = D_g$.

1. *Лінійність диференціювання*: $\forall \{\lambda, \mu\} \subset \mathbb{R}$ функція $\lambda f + \mu g$ диференційовна в точці x_0 і виконується рівність:

$$(\lambda f + \mu g)'(x_0) = \lambda f'(x_0) + \mu g'(x_0).$$

2. *Диференціювання добутку функцій*: функція $(f \cdot g)$ диференційовна в точці x_0 та виконується рівність:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)\,g(x_0) + g'(x_0)\,f(x_0).$$

3. *Похідна частки*: якщо $g(x_0) \neq 0$, то функція $\dfrac{f}{g}$ — диференційовна в точці x_0 і виконується рівність:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)\,g(x_0) - f(x_0)\,g'(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Теорема (похідна суперпозиції функцій). Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовна в точці x_0, граничній для D_f, а функція $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовна в точці ξ_0. Якщо $x_0 = g(\xi_0)$ та ξ_0 — гранична точка множини $D_{f \circ g}$, тоді суперпозиція $f \circ g$ диференційовна в точці ξ_0 і справджується рівність:

$$(f \circ g)'(\xi_0) = f'(x_0)g'(\xi_0).$$

Теорема (похідна оберненої функції). Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — оборотна, $x_0 \in D_f$, x_0 є граничною точкою множини D_f та $y_0 = f(x_0)$. Якщо існує $f'(x_0) \neq 0$ і обернена функція $f^{(-1)}$ неперервна в точці y_0, то вона диференційовна в цій точці. Якщо, крім того, y_0 — гранична точка множини $E_f = D_{f^{(-1)}}$, то $\left(f^{(-1)}\right)'(y_0) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ [1, с. 179].

Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Якщо x_0 — гранична точка множини $D_f \bigcap (-\infty, x_0)$ $(D_f \bigcap (x_0, +\infty))$, то $f'_{\Lambda}(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ $\left(f'_{\Pi}(x_0) \stackrel{def}{=} \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$. Числа $f'_{\Lambda}(x_0)$ та $f'_{\Pi}(x_0)$, якщо вони існують, називаються відповідно ***лівою*** та ***правою похідними функції f у точці*** x_0.

Теорема (критерій диференційовності функції). Для того, щоб неперервна функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ була диференційовною в точці $x_0 \in D_f$, граничній для множин $D_f \bigcap (-\infty, x_0)$ та $D_f \bigcap (x_0, +\infty)$, необхідно й достатньо, щоб вона мала в цій точці скінченні ліву та праву похідні, і при цьому $f'_{\Lambda}(x_0) = f'_{\Pi}(x_0)$.

Функція (відображення) $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***лінійною***, якщо для довільних $\{x_1, x_2, \lambda\} \subset \mathbb{R}$ виконуються умови:

1. $L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)$ (*адитивність*);
2. $L(\lambda x_1) = \lambda L(x_1)$ (*однорідність*).

За означенням, $L(0) = 0$ та $\forall x \in \mathbb{R}: \ L(x) = ax, \ a = L(1) = \text{const}$.

Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диференційовна в точці $x_0 \in D_f$, граничній для множини D_f, тобто має в цій точці похідну:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f\,(x_0, \Delta x)}{\Delta x}.$$

Тоді за означенням границі функції маємо, що

$$\frac{\Delta f\,(x_0, \Delta x)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad \text{де } \alpha(\Delta x) \to 0 \text{ при } \Delta x \to 0,$$

звідки

$$\Delta f\,(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Перший доданок $f'(x_0) \cdot \Delta x$ є лінійною функцією відносно Δx і є функцією одного порядку із Δx при $\Delta x \to 0$ за умови, що $f'(x_0) \neq 0$. Другий доданок $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж Δx при $\Delta x \to 0$, тому не є лінійною функцією відносно Δx.

Якщо функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ диференційовна в точці $x_0 \in D_f$, граничній для множини D_f, то ***диференціалом функції f у точці*** x_0 називається головна частина приросту функції $f(x)$ у цій точці, лінійна відносно Δx, і позначається символом $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$. Оскільки диференціал незалежної змінної x збігається з її приростом, то $df(x_0) = f'(x_0)\, dx$.

Нехай визначені функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такі, що $g(t_0) = x_0$, точка $t_0 \in D_{f \circ g}$ є граничною для цієї множини і суперпозиція $f \circ g$ диференційовна в точці t_0. Тоді її похідна записується у вигляді: $(f \circ g)'(t_0) = f'(x_0) \cdot g'(t_0)$, а диференціал набуває вигляду: $d(f \circ g)(t_0) = f'(x_0)\, g'(t_0) dt = f'(x_0) dx$, де $dt \in \mathbb{R}$, $dx = g'(t_0) dt$. З останнього співвідношення, а саме $d(f \circ g)(t_0) = df(x_0)$, маємо, що форма диференціала така ж сама, як і для випадку незалежної змінної x. Ця властивість називається ***інваріантністю першого диференціалу***.

Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ задана параметрично рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in (a, b)$. Припустимо, що $\forall t \in (a, b)$ існують похідні $\varphi'(t) \neq 0$ та

$\psi'(t)$. Тоді функція $\varphi(t)$ строго монотонна на інтервалі (a,b) та існує обернена функція $\varphi^{(-1)}: E_\varphi \to (a,b)$, яка має похідну $t'(x) = \left(\varphi^{(-1)}\right)'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(t)}$. Суперпозиція $f = \psi \circ \varphi^{(-1)}$ має похідну $\forall t \in (a,b)$, яка обчислюється за формулою:

$$f'(x) = \psi'\left(\varphi^{(-1)}(x)\right) \cdot \left(\varphi^{(-1)}\right)'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \quad x = \varphi(t).$$

Практичне заняття 11

Приклад 1. *Дослідимо на диференційовність функцію* $f(x) = |\operatorname{tg} x|$ *на множині* D_f.

⌜

Оскільки $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ та $f(x)$ є диференційовною на множині $D_f \backslash \{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ як елементарна, то залишається перевірити точки $\{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$:

$$\lim_{x \to k\pi - 0} \frac{-\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(k\pi)}{x - k\pi} = \lim_{x \to k\pi - 0} -\frac{\operatorname{tg}(x - k\pi)}{x - k\pi} = -1,$$

$$\lim_{x \to k\pi + 0} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg}(k\pi)}{x - k\pi} = \lim_{x \to k\pi + 0} \frac{\operatorname{tg}(x - k\pi)}{x - k\pi} = 1.$$

Отже, границя $\lim\limits_{x \to k\pi} \dfrac{f(x) - f(k\pi)}{x - k\pi}$ не існує $\forall\, k \in \mathbb{Z}$, тому функція f є диференційовною лише на множині $D_f \backslash \{\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

⌟

Приклад 2. *Знайдемо похідну функції* $f(x) = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$.

⌜

Позначимо $f(t) = \operatorname{arctg} t$, $t(x) = \dfrac{1}{x}$. За правилом диференціювання складної функції $f'_x = f'_t \cdot t'_x$, тобто

$$f'(x) = (\operatorname{arctg} t)'_t \cdot t'_x = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

⌟

Приклад 3. *Знайдемо похідну функції* $f(x) = \arccos x^2$ *за правилом диференціювання оберненої функції на множині* $(-1, 0)$ *та у точці* $x_0 = -\dfrac{1}{2}$.

⌜

Спочатку знайдемо обернену функцію до функції f:

$$y = \arccos x^2,\ x \in (-1, 0) \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt{\cos y},\ y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Тому $f^{(-1)}(y) = \sqrt{\cos y}$. За теоремою про диференціювання оберненої функції знайдемо похідну від оберненої функції до функції $f^{(-1)}(y)$:

$$f'(x) = \frac{1}{\left(f^{(-1)}\right)'(y)} = -\frac{2\sqrt{\cos y}}{\sin y} = \frac{-2x}{\sin(\arccos x^2)} =$$

$$= \frac{-2x}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x^2)}} = \frac{-2x}{\sqrt{1 - x^4}},\ x \in (-1, 0).$$

Відповідне значення похідної у точці $x_0 = -\dfrac{1}{2}$: $f'(x_0) = \dfrac{4}{\sqrt{15}}$. $\lrcorner$

Приклад 4. *Вважаючи функції φ та ψ диференційовними на $\mathbb{R}$, знайдемо похідну показниково-степеневої функції $f(x) = (\varphi(x))^{\psi(x)}$ на множині D_f.*

$\ulcorner$

Оскільки функцію f можна представити у вигляді $f(x) = e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}$, то множина визначення функції f співпадає з множиною $A = \{x : \varphi(x) > 0\}$. Знайдемо похідну функції f на множині A:

$$f'(x) = \left(e^{\psi(x)\ln\varphi(x)}\right)' = (\varphi(x))^{\psi(x)} \cdot \left(\psi'(x)\ln\varphi(x) + \psi(x)\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\right).$$

$\lrcorner$

Приклад 5. *Знайдемо похідну неявно заданої функції $y^3 - x^2 = y^2 + x$ на множині її визначення та у точці $P(-1,1)$.*

$\ulcorner$

Похідну функції $y(x)$ можемо отримати, диференціюючи рівняння, що задає функцію: $3y^2(x)\cdot y'(x) - 2x = 2y(x)\cdot y'(x) + 1$. Звідси:

$$y'(x) = \frac{2x+1}{y(x)\cdot(3y(x)-2)}.$$

Відповідно похідна визначена на множині $D_y \setminus \left\{x : y(x) = 0 \vee y(x) = \dfrac{2}{3}\right\}$, а у заданій точці $P(-1,1)$ дорівнює $y'(-1,1) = -1$. $\lrcorner$

Приклад 6. *Вважаючи відомими диференціали функцій u та v, знайдемо диференціали функцій $f_1 = \sin(u+v)$ та $f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.*

$\ulcorner$

1. Нехай $t = u + v$. Тоді $dt = du + dv$ та за властивістю інваріантності форми першого диференціалу маємо:

$$df_1 = d(\sin t) = \cos t\, dt = \cos(u+v)\cdot(du+dv).$$

2. Нехай $t = \sqrt{u^2+v^2}$. Тоді $dt = d\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) = \dfrac{d(u^2+v^2)}{2\sqrt{u^2+v^2}}$ та

$$df_2 = d\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{u^2+v^2}\cdot\frac{d(u^2+v^2)}{2\sqrt{u^2+v^2}} = -\frac{udu+vdv}{(u^2+v^2)^{3/2}}.$$

$\lrcorner$

Знайдіть похідні функцій $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, заданих явно, на області їх визначення:

11.1 $f(x) = 3^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$;

11.2 $f(x) = \sin(\operatorname{tg}(\cos^2 x)$;

11.3 $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$;

11.4 $f(x) = \dfrac{1}{\cos^n x}$;

11.5 $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$;

11.6 $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$;

11.7 $f(x) = a^{a^x} + a^{x^a} + x^{a^a} + a^{x^x} + x^{x^x}$;

11.8 $f(x) = 10^{\frac{x}{\log_x 3}}$;

11.9 $f(x) = x^{\frac{25}{\ln x}}$;

11.10 $f(x) = \left(\sin x^{\frac{3}{2}}\right)^{\sqrt{\cos x}}$;

11.11 $f(x) = \ln\left|\dfrac{x^2-5x}{x^2-5x+1}\right|$;

Обчисліть похідну функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у точці x_0, якщо:

11.12 $f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$, **1)** $x_0 = 0$, **2)** $x_0 = 1$, **3)** $x_0 = 2$;

11.13 $f(x) = 2^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$, $x_0 = \dfrac{1}{\pi}$.

Знайдіть ліву та праву похідні функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ у точці x_0 та зробіть висновок щодо її диференційовності у заданій точці:

11.14 $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $x_0 = 0$;

11.15 $f(x) = \min\{x, \sin x\}$, **1)** $x_0 = -\pi$, **2)** $x_0 = 0$;

11.16 $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ **1)** $x_0 = 0$, **2)** $x_0 = \dfrac{1}{2}$, **3)** $x_0 = 2$;

Дослідіть функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на диференційовність, якщо:

11.17 $f(x) = |x|$;

11.18 $f(x) = x \cdot |x|$;

11.19 $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

11.20 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0, \\ x^2, & x \geqslant 0; \end{cases}$

11.21 $f(x) = [x] \sin \pi x$;

11.22 $f(x) = [x] \sin^2 \pi x$;

11.23 $f(x) = |x|^3$;

11.24 $f(x) = \min\{x, \sin x\}$;

11.25 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 1, \\ x^2-1, & x \geqslant 1; \end{cases}$

Підберіть значення параметрів α і β так, щоб функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ була диференційовною на $\mathbb{R}$:

11.26 $f(x) = \begin{cases} xe^{-\alpha x}, & x < 0, \\ \alpha x^2 - \beta x + 2, & x \geqslant 0; \end{cases}$

11.27 $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \alpha x, & x \leqslant 1, \\ \beta \operatorname{sgn}(x-3), & x > 1; \end{cases}$

11.28 $f(x) = \begin{cases} \alpha \cos x + \beta \sin x, & x \leqslant 0, \\ \alpha x + \beta, & x > 0; \end{cases}$

11.29 $f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

Підберіть значення параметрів α і β так, щоб функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ була диференційовною у точці x_0, якщо:

11.30 $f(x) = \begin{cases} \sin \alpha x, & x < 0, \\ \sin \beta x, & x \geqslant 0, \end{cases}$ **1)** $x_0 = 0$, **2)** $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

11.31 $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + x + \beta, & x \leqslant 0, \\ 1, & x > 0, \end{cases}$ **1)** $x_0 = 0$, **2)** $x_0 = 1$.

За правилом диференціювання оберненої функції знайдіть похідну функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ на D_f та у точці x_0, якщо:

11.32 $f(x) = \arcsin x,\ x_0 = 0;$

11.33 $f(x) = \operatorname{arctg} x,\ x_0 = 1;$

11.34 $f(x) = e^{\arcsin x},\ x_0 = 0;$

11.35 $f(x) = \arcsin \sqrt{x},\ x_0 = \dfrac{1}{2};$

11.36 $f(x) = \sqrt[n]{x},\ n \in \mathbb{N},\ x_0 = 1;$

11.37 $f(x) = \log_2 x,\ x_0 = 2.$

Знайдіть диференціал функції $y : x \mapsto f(x)$ (параметрично чи неявно заданої) на області визначення та у заданій точці $P(x_0, y_0)$:

11.38 $x = t^4 + 1,\ y = t^3 + t,\ P(2, 1);$

11.39 $x = \cos t,\ y = \sin t,\ P(1, 0);$

11.40 $x^4 + x = y^5 + y^2,\ P(1, 1);$

11.41 $e^y + y = \ln x + x,\ P(1, 0);$

11.42 $y^5 + y^3 + y + x = 0,\ P(-3, 1);$

11.43 $2y \ln y = x,\ P(2e, e);$

11.44 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ P(a, 0);$

11.45 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1,\ P(1, 0).$

Знайдіть похідну функції, заданої параметрично, на області визначення, у заданій точці $P(x_0, y_0)$ та при заданому значенні параметра, якщо:

11.46 $x = t^4 + 1,\ y = t^3 + t,\ P(2, 1);$

11.47 $x = \cos t,\ y = \sin t,\ P(1, 0);$

11.48 $x(t) = t \operatorname{sh} t,\ y(t) = t \operatorname{ch} t,\ t_0 = \ln 2,\ P(0, 0);$

11.49 $x(t) = 2^{\sin^2 t},\ y(t) = 2^{\cos^2 t},\ t_0 = \dfrac{\pi}{2},\ P(1, 2);$

11.50 $x(t) = \dfrac{t^3 + 1}{t^2 - 1},\ y(t) = \dfrac{t}{t^2 - 1},\ t_0 = 0,\ P\left(3, \dfrac{2}{3}\right).$

Вважаючи відомими диференціали функцій u та v, знайдіть диференціал функції f, якщо:

11.51 $f = \ln(uv);$

11.52 $f = e^{uv};$

11.53 $f = u^v;$

11.54 $f = e^{u+v};$

11.55 $f = \operatorname{arctg} \dfrac{u}{v};$

11.56 $f = \ln \operatorname{tg} \dfrac{u}{v}.$

Тема 8. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай область визначення функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ не має ізольованих точок та для всіх $x \in D_f$ існує $f'(x)$ — *похідна першого порядку* функції f, яка ще позначається як $f^{(1)}$, саму ж функцію тоді можна позначити як $f = f^{(0)}$. Також можна визначити функцію $g : D_f \to \mathbb{R}$ за формулою: $g(x) = f'(x)$, $x \in D_f$. Якщо в точці $x_0 \in D_f$ існує похідна $g'(x_0)$ функції g, то ця похідна називається ***похідною другого порядку*** функції f у точці x_0 і позначається як $f''(x_0)$ або $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$. Якщо функція $g^{(n-1)}(x) = f^{(n)}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, — диференційовна в точці $x_0 \in D_{f^{(n-1)}}$, то її похідна $\left(g^{(n-1)}\right)'(x_0) = \left(f^{(n)}\right)'(x_0)$ називається $(n+1)$***-ою похідною*** функції f у точці x_0 і позначається $f^{(n+1)}(x_0)$, а сама функція f — $(n+1)$***-диференційовною***.

Якщо функція має n-ту похідну в кожній точці $X \subset D_f$, то кажуть, що вона n***-диференційовна на множині*** X. Якщо при цьому $f^{(n)} \in C(X)$, то пишуть, що $f \in C^{(n)}(X)$ (n разів неперервно–диференційовна на множині X) і кажуть, що функція f з класу $C^{(n)}$ (на множині X). Якщо $\forall n \in \mathbb{N}$ функція має похідну $f^{(n)}$ в точці x_0, то вона називається ***нескінченно диференційовною***, якщо $\forall x \in X \subset D_f\ \forall n \in \mathbb{N}\ \exists f^{(n)}(x)$, то функція називається ***нескінченно диференційовною на множині*** X і позначається $f \in C^{\infty}(X)$, і про неї кажуть, що вона належить класу C^{∞}.

Теорема (лінійність n-ої похідної). Якщо функції f та g мають n-ту похідну в точці $x_0 \in D_f = D_g$, то і функція $(\alpha f + \beta g)$ також n-диференційовна в точці x_0 і має місце рівність: $(\alpha f + \beta g)^{(n)}(x_0) = \alpha f^{(n)}(x_0) + \beta g^{(n)}(x_0)$.

Теорема (Лейбніца). Якщо функції f та g мають n-ту похідну в точці $x_0 \in D_f = D_g$, то і функція $(f \cdot g)$ теж n-диференційовна в цій точці та має місце ***формула Лейбніца***:

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k f^{(k)}(x_0) g^{(n-k)}(x_0).$$

Припустимо, що функція $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ має похідну $f'(x)$, $x \in (a,b) \subset D_f$. Якщо існує диференціал цієї функції $d(df(x_0)) = d(f'(x_0)dx) = f''(x_0)\,(dx)^2$ для всіх $x_0 \in (a,b)$, то він називається ***другим диференціалом*** функції f у точці x_0 і позначається як

$$d^2 f(x_0) = f''(x_0)\,dx^2.$$

Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n-диференційовна $\forall x \in (a,b) \subset D_f$. Тоді існують та неперервні похідні функції f до $(n-1)$-го порядку включно для всіх $x \in (a,b)$. Якщо існує диференціал $d\left(d^{n-1} f(x_0)\right) = d\left(f^{(n-1)}(x_0) dx^{n-1}\right) = f^{(n)}(x_0)(dx)^n$ для всіх $x_0 \in (a,b)$, то він називається ***диференціалом n-го порядку*** функції f у точці x_0 і позначається як

$$d^n f(x_0) = f^{(n)}(x_0)\,dx^n.$$

Властивості диференціалів вищих порядків:

1. $d^m(d^n f) = d^{m+n} f$;

2. $d^n(f+g) = d^n f + d^n g$;

3. $d^n(\alpha f) = \alpha d^n f$, де $\alpha \in \mathbb{R}$.

Властивість інваріантності диференціалів вищих порядків функції f має місце тільки у випадку, якщо $f = g(h(x))$, де h — лінійна функція незалежної змінної x.

Знайдемо другу похідну для параметрично заданої функції. Нехай відображення $x \mapsto y(x)$ задане рівняннями $x = \varphi(t)$ та $y = \psi(t)$, $\{\varphi, \psi\} \subset C^1(X)$. Оскільки $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ як похідна від складної функції $y(t(x)) = y\left(\varphi^{(-1)}(x)\right)$, то

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{\varphi'(t)} = \frac{\psi''(t)\varphi'(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

Також знайдемо похідну другого порядку від оберненої функції. Нехай $y = f(x)$ — двічі диференційовна функція $\forall x \in X$, неперервна і строго монотонна на множині X та $f'(x) \neq 0$, $x \in X$. Тоді функція f — оборотна $\forall x \in X$ і, враховуючи формулу похідної від оберненої функції: $\dfrac{df^{(-1)}(y)}{dy} = \dfrac{1}{f'(x)}$, маємо:

$$\frac{d^2 f^{(-1)}(y)}{dy^2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{df^{(-1)}(y)}{dy}\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{f'(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{f'(x)}\right)}{\frac{dy}{dx}} = \frac{-\frac{f''(x)}{(f'(x))^2}}{f'(x)} = \frac{-f''(x)}{(f'(x))^3}.$$

Аналогічно знаходяться похідні порядків $n \geqslant 3$.

Практичне заняття 12

Приклад 1. *Знайдемо похідну n-го порядку для функції $f(x) = \sin(ax+b)$, $\{x, a, b\} \subset \mathbb{R}$.*

$\ulcorner$

Знайдемо першу похідну функції та представимо її у такому вигляді: $f'(x) = a\cos(ax+b) = a\sin\left(ax+b+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Другу похідну функції також можна представити у схожому вигляді: $f''(x) = -a^2\sin(ax+b) = a^2\sin(ax+b+\pi)$. Відповідно третя похідна $f'''(x) = -a^3\cos(ax+b) = a^3\sin\left(ax+b+\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Узагальнюючи отримане, маємо:

$$(\sin(ax+b))^{(n)} = a^n \sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right).$$

$\lrcorner$

Приклад 2. *Знайдемо похідну n-го порядку для $f(x) = \cos(ax+b)$, $\{x, a, b\} \subset \mathbb{R}$.*

$\ulcorner$

Знайдемо першу похідну функції та представимо її у такому вигляді: $f'(x) = -a\sin(ax+b) = a\cos\left(ax+b+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Другу похідну функції також можна представити у схожому вигляді: $f''(x) = -a^2 \cos(ax+b) = a^2 \cos(ax+b+\pi)$. Відповідно третя похідна $f'''(x) = a^3 \sin(ax+b) = a^3 \cos\left(ax+b+\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Узагальнюючи отримане, маємо:

$$(\cos(ax+b))^{(n)} = a^n \cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right).$$

┘

Приклад 3. *Знайдемо похідну n-го порядку для $f(x) = e^{ax+b}$, $\{x,a,b\} \subset \mathbb{R}$.*

┌

Знайдемо першу похідну функції: $f'(x) = a\, e^{ax+b}$. Похідні другого та третього порядку: $f''(x) = a^2\, e^{ax+b}$, $f'''(x) = a^3\, e^{ax+b}$. За індукцією маємо:

$$\left(e^{ax+b}\right)^{(n)} = a^n\, e^{ax+b}.$$

┘

Приклад 4. *Знайдемо похідну n-го порядку для $f(x) = \dfrac{1}{ax+b}$, $\{x,a,b\} \subset \mathbb{R}$.*

┌

Знайдемо першу похідну функції: $f'(x) = \dfrac{-a}{(ax+b)^2}$. Похідні другого та третього порядку: $f''(x) = \dfrac{2!\cdot a^2}{(ax+b)^3}$, $f'''(x) = \dfrac{3!\cdot(-a)^3}{(ax+b)^4}$. За індукцією маємо:

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)} = (-1)^n \frac{n!\cdot a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

┘

Приклад 5. *Знайдемо похідну n-го порядку для $f(x) = \ln(ax+b)$, $\{x,a,b\} \subset \mathbb{R}$.*

┌

Оскільки перша похідна функції $f'(x) = \dfrac{a}{ax+b}$, то згідно із попереднім прикладом,

$$(\ln(ax+b))^{(n)} = \frac{(n-1)!\cdot(-1)^{n-1}a^n}{(ax+b)^n}.$$

┘

Приклад 6. *Знайдемо похідну n-го порядку для функції $f(x) = (ax+b)^\alpha$, $\{x,a,b,\alpha\} \subset \mathbb{R}$.*

┌

Знайдемо першу похідну функції: $f'(x) = \alpha a \cdot (ax+b)^{\alpha-1}$. Похідні другого та третього порядку:

$$f''(x) = \alpha(\alpha-1)a^2 \cdot (ax+b)^{\alpha-2}, \quad f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)a^3 \cdot (ax+b)^{\alpha-3}.$$

За індукцією маємо:

$$((ax+b)^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)a^n \cdot (ax+b)^{\alpha-n},\ \alpha \neq n,\ n \in \mathbb{N},$$

та $((ax+b)^\alpha)^{(n)} = n!$, якщо $\alpha = n \in \mathbb{N}$.

┘

Приклад 7. *Знайдемо $f^{(n)}(0)$ для функції $f(x) = \arcsin x$.*

┌

Знайдемо першу та другу похідні функції: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $f''(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$, $x \in (-1,1)$. Помножимо другу похідну на $1-x^2$ та отримаємо рівняння:

$$(1-x^2)\cdot f''(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=x\cdot f'(x).$$

Застосуємо до нього правило Лейбніца, беручи похідну $(n-2)$-го порядку від його лівої та правої частин:

$$(1-x^2)\cdot f^{(n)}(x)+C^1_{n-2}\cdot(-2x)\cdot f^{(n-1)}(x)-2C^2_{n-2}\cdot f^{(n-2)}(x)=$$
$$=x\cdot f^{(n-1)}(x)+C^1_{n-2}\cdot f^{(n-2)}(x).$$

Покладемо $x=0$: $f^{(n)}(0)=(n-2)^2\cdot f^{(n-2)}(0)$. Оскільки $f(0)=0$ та $f'(0)=1$, то $f^{(2k)}(0)=0,\ k\in\mathbb{N}$ та $f^{(2k+1)}(0)=((2k-1)!!)^2,\ k\in\mathbb{N}$. ⌟

Приклад 8. *Знайдемо d^2f для функції $f=\sin u$, де $u=u(x)$ — довільна функція від незалежної x, диференційовна достатню кількість разів.*
⌜
Оскільки $df=d(\sin u)=\cos u\,du$, то

$$d^2f=d(\cos u\,du)=-\sin u\,du^2+\cos u\,d^2u.$$ ⌟

Для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ знайдіть похідну n-го порядку на множині D_f:

12.1 $f(x)=x^2e^{3x},\ n=20$;

12.2 $f(x)=x\ln x,\ n=6$;

12.3 $f(x)=\dfrac{e^x}{x},\ n=10$;

12.4 $f(x)=e^x\sin x,\ n=5$;

12.5 $f(x)=\ln(x^2+x-2)$;

12.6 $f(x)=\ln\dfrac{x^2-1}{x^2-4x+4}$;

12.7 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d},\ \{a,b,c,d\}\subset\mathbb{R}$;

12.8 $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$;

12.9 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-3x+2}$;

12.10 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

12.11 $f(x)=\sin^2x$;

12.12 $f(x)=\cos^2x$.

Для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ знайдіть $f^{(n)}(0)$, якщо:

12.13 $f(x)=\mathrm{arctg}\,x$;

12.14 $f(x)=(\arcsin x)^2$.

Знайдіть перші два диференціала функції f через диференціали функцій u,v та w, вважаючи відомими перші два диференціали цих функцій, якщо:

12.15 $f=u^3$;

12.16 $f=e^{uv}$;

12.17 $f=u^v$;

12.18 $f=\dfrac{u}{v}$;

12.19 $f=uvw$;

12.20 $f=u\ln v$.

Тема 9. Формула Тейлора

Теорема (локальна формула Тейлора). Нехай $f : S_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$, $(n-1)$ разів неперервно-диференційовна в цьому околі і має скінченну похідну n-го порядку в точці x_0. Тоді має місце формула:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right). \tag{3}$$

Доданок $R_{n+1}(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ називається ***залишковим членом в формі Пеано***, а формула (3) називається ***формулою Тейлора із залишковим членом в формі Пеано***.

З локальності цієї формули її називають асимптотичним представленням функції f в околі точки x_0. Вона дуже ефективна при знаходженні границь. Якщо $x_0 = 0$, то формулу (3) називають ***формулою Маклорена***.

Теорема (формула Тейлора). Нехай $f \in C^n(a,b)$ і має $(n+1)$ похідну в кожній точці (a,b), можливо за виключенням точки $x_0 \in (a,b)$. Тоді $\forall x \in (a,b)$ $\exists\, \xi$ між точками x_0 і x така, що

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + R_{n+1}(x), \tag{4}$$

де

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \;\; \xi = x_0 + \theta(x-x_0),\, \theta \in (0,1). \tag{5}$$

Доданок $R_{n+1}(x)$, що визначається формулою (5), називається ***залишковим членом у формі Лагранжа***, а сама формула (4) називається ***формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа***. За допомогою цих формул можна оцінити похибку наближення відповідних функцій многочленами.

Випишемо п'ять основних розкладів Маклорена, для кожного з яких візьмемо залишковий член у формі Пеано:

1. $e^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{x^k}{k!} + o(x^n)$;

2. $\ln(1+x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^k}{k} + o(x^n)$;

3. $\sin x = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \dfrac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + o(x^{2n-1})$;

4. $\cos x = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k} \dfrac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$;

5. $(1+x)^\alpha = 1 + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n)$.

Ці формули використовуються при знаходженні границь функцій.

Практичне заняття 13

Приклад 1. *Запишемо формулу Маклорена для функції* $f(x) = \operatorname{tg} x$ *із залишковим членом у формі Пеано з точністю до* x^5*.*

$\ulcorner$

Враховуючи непарність функції $\operatorname{tg} x$, в її розкладі в околі нуля можуть бути лише непарні степені аргумента: $\operatorname{tg} x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^5),\ x \to 0$. Знайдемо коефіцієнти A, B та C, використовуючи формули Маклорена для функцій $\sin x$ та $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^5);$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = \big(Ax + Bx^3 + Cx^5 + o(x^5)\big) \cdot \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^5)\right);$$

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5) = Ax + \left(B - \frac{A}{2!}\right)x^3 + \left(C + \frac{A}{4!} - \frac{B}{2!}\right)x^5 + o(x^5);$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, отримуємо: $A = 1$, $B = \dfrac{1}{3}$, $C = \dfrac{2}{15}$. Таким чином,

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5),\ x \to 0.$$

$\lrcorner$

Приклад 2. *Запишемо формулу Маклорена для функції* $f(x) = e^{\sin x}$ *із залишковим членом у формі Пеано з точністю до* x^3*.*

$\ulcorner$

Спочатку запишемо формулу Маклорена для функції $g(x) = \sin x$ з точністю до x^3: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$. Оскільки $g(x) \to 0$ при $x \to 0$, то можемо записати формулу Маклорена для функції $f(x) = e^{g(x)}$:

$$\begin{aligned} e^{\sin x} &= 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2!} + \frac{\sin^3 x}{3!} + o(x^3) = \\ &= 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) + \left(\frac{x^3}{6} + o(x^3)\right) + o(x^3) = \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2). \end{aligned}$$

$\lrcorner$

Приклад 3. *Запишемо формулу Маклорена для функції* $f(x) = \ln\cos x$ *із залишковим членом у формі Пеано з точністю до* x^6*.*

$\ulcorner$

Представимо функцію f у такому вигляді: $f(x) = \ln\left(1 + (\cos x - 1)\right)$. Можемо записати формулу Маклорена для функції $g(x) = \cos x - 1$ із точністю до x^6:

$$\cos x - 1 = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6).$$

Оскільки $g(x) \to 0$ при $x \to 0$, то можемо записати формулу Маклорена для функції $f(x)$:

$$\ln\cos x = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{x^6}{720}-\frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{24}+o(x^6)\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{x^6}{8}+o(x^6)\right)+o(x^6)=$$
$$= -\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{12}-\frac{x^6}{45}+o(x^6).$$
⌟

Приклад 4. *Запишемо формулу Маклорена для функції $f(x)=(\cos x)^{\sin x}$ із залишковим членом у формі Пеано з точністю до x^5.*
⌜

Можемо використати формули Маклорена функцій $\sin x$ та $\cos x$, представляючи функцію f у такому вигляді:

$$(\cos x)^{\sin x} = e^{(\sin x)\cdot\ln\cos x} =$$
$$= \exp\left\{\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\ln\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)\right)\right\}=$$
$$= \exp\left\{\left(x-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+o(x^5)\right)\cdot\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right)\right\}=$$
$$= e^{-\frac{x^3}{2}+0x^5+o(x^5)} = 1-\frac{x^3}{2}+o(x^5) = 1-\frac{x^3}{2}+o(x^3),\ x\to 0.$$
⌟

Приклад 5. *Запишемо формулу Маклорена для неявно заданої функції $x^4+y^4+\sin xy-1=0$ з точністю до x^2.*
⌜

Згідно із формулою Маклорена із залишковим членом у формі Пеано, $f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{1}{2}f''(0)\cdot x^2+o(x^2)$ при $x\to 0$.

Продиференціюємо задану функцію $y=y(x)$ враховуючи, що $y(0)=1$:

$$4x^3+4y^3\cdot y'+\cos xy\cdot(y+xy')=0.$$

Звідси маємо, що $y'(0)=-\frac{1}{4}$. Другу похідну знайдемо, диференціюючи отримане рівняння із першою похідною y':

$$12x^2+12y^2\cdot(y')^2+4y^3\cdot y''+\cos xy\cdot(y'+y'+xy'')-\sin xy\cdot(y+xy')^2=0.$$

Маємо, що $y''(0)=-\frac{1}{16}$. Отже, $f(x)=1-\frac{1}{4}x-\frac{1}{32}x^2+o(x^2)$.
⌟

Для функції $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ запишіть формулу Маклорена із залишковим членом у формі Пеано з точністю до x^n, якщо:

13.1 $f(x)=\sqrt[3]{1+x},\ n=5;$

13.2 $f(x)=\ln(1-x),\ n=5;$

13.3 $f(x)=\frac{1}{1+x},\ n=5;$

13.4 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}},\ n=5;$

13.5 $f(x)=\operatorname{ch}x,\ n=5;$

13.6 $f(x)=\operatorname{sh}x,\ n=5;$

13.7 $f(x)=\arcsin x,\ n=5;$

13.8 $f(x)=\operatorname{arctg}x,\ n=5;$

13.9 $f(x)=e^{2x-x^2},\ n=5;$

13.10 $f(x)=\sin\sin x,\ n=5;$

13.11 $f(x)=\sqrt{1-2x+x^3}-\sqrt[3]{1-3x+x^2},\ n=4;$

13.12 $f(x)=\sin\cos x,\ n=5;$

13.13 $f(x)=\ln(1+\cos x),\ n=5;$

13.14 $f(x)=\sin e^x,\ n=5;$

13.15 $f(x)=e^{\cos(1+x)},\ n=5;$

13.16 $f(x)=\ln(\ln(4-x)),\ n=3;$

13.17 $f(x)=\ln(1+e^x),\ n=5.$

Знайдіть границі, застосовуючи відповідні формули Маклорена:

13.18 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[7]{x^7+x^6}-\sqrt[7]{x^7-x^6}\right);$

13.18 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(1+x)}{3x^3};$

13.20 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right);$

13.21 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right);$

13.22 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\operatorname{th} x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}}{x};$

13.23 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\sin x-\cos x}{2x^4}.$

Тема 10. Дослідження функцій за допомогою похідної

Наведемо теореми про функції, що мають похідну.

Теорема (Ролля). Нехай $f \in C([a,b])$, диференційовна в кожній точці (a,b). Якщо $f(a) = f(b)$, то $\exists\, \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = 0$.

Теорема (Лагранжа). Нехай функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ неперервна на $[a,b]$ та диференційовна в кожній точці (a,b). Тоді $\exists\, \xi \in (a,b)$: $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

Наслідок (двобічна оцінка приросту функції). Нехай $f \in C([a,b])$ і має скінчену похідну f'_{Π} в кожній точці $[a,b)$, за винятком, можливо, деякої зліченної її підмножини X. Тоді виконуються нерівності: $m \leqslant \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M$, де $m = \inf\limits_{x \in [a,b) \setminus X} f'_{\Pi}(x)$, $M = \sup\limits_{x \in [a,b) \setminus X} f'_{\Pi}(x)$.

Теорема (Коші). Нехай функції f і g неперервні на $[a,b]$ та диференційовні на (a,b). Тоді $\exists\, \xi \in (a,b)$: $(f(b) - f(a))\, g'(\xi) = (g(b) - g(a))\, f'(\xi)$.

Наступні твердження використовуються для дослідження монотонності функцій та доведення деяких нерівностей.

Функція $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ ***зростає*** (***спадає***) ***в точці*** $x_0 \in (a,b)$, якщо $\exists\, S_\delta(x_0) \subset (a,b) : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)\ f(x) < f(x_0)\ (f(x) > f(x_0)) \wedge \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $f(x) > f(x_0)\ (f(x) < f(x_0))$.

Теорема (достатня умова зростання функції в точці). Для того, щоб функція $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, яка диференційовна в точці $x_0 \in (a,b)$, зростала (спадала) в цій точці, достатньо, щоб $f'(x_0) > 0$ $(f'(x_0) < 0)$.

Ця умова використовується для доведення наступного твердження.

Доведення нерівностей. Нехай функції $\varphi, \psi : (a,b) \to \mathbb{R}$ задовольняють таким умовам:

1. $\exists\, \varphi^{(n)}(x)$ та $\exists\, \psi^{(n)}(x)$ для всіх $x > x_0$, де $x_0 \in (a,b)$;

2. $\exists\, \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0),\ k = \overline{0, n-1}$;

3. $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ для всіх $x > x_0$.

Тоді $\forall x > x_0 :\ \varphi(x) > \psi(x)$.

Якщо ж функції $\varphi, \psi : (a,b) \to \mathbb{R}$ задовольняють умовам:

1. $\exists\, \varphi^{(n)}(x)$ та $\exists\, \psi^{(n)}(x)$ для всіх $x < x_0$, де $x_0 \in (a,b)$;

2. $\exists\, \varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0),\ k = \overline{0, n-1}$;

3. $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ для всіх $x < x_0$,

то $\forall x < x_0 :\ \varphi(x) > \psi(x)\ (\varphi(x) < \psi(x))$ при парному (непарному) n.

Розглянемо необхідні та достатні умови екстремумів функцій.

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ має в точці $x_0 \in D_f$ ***локальний максимум*** (***мінімум***), якщо $\exists\, S_\varepsilon(x_0)$: $\forall x \in D_f \bigcap S_\varepsilon(x_0)\ f(x) \leqslant f(x_0)\ \ (f(x) \geqslant f(x_0))$. Якщо при цьому

$\forall x \neq x_0$ виконується нерівність $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), то ***максимум*** (***мінімум***) називається ***строгим***, інакше — ***нестрогим***. Локальні максимуми та мінімуми називаються ***екстремумами*** функції.

Теорема (Ферма). Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ і x_0 — внутрішня точка множини D_f. Якщо функція f набуває в точці x_0 найбільшого або найменшого значення і диференційовна в ній, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема (перша достатня умова екстремуму). Нехай $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ диференційовна на $S_\delta(x_0) \subset (a, b)$, можливо за виключенням самої точки x_0. Якщо f' при переході через x_0 ***змінює знак***, тобто на проміжках $(x_0 - \delta, x_0)$ та $(x_0, x_0+\delta)$ функція має значення різних знаків, то в цій точці f має локальний екстремум. Якщо знак змінюється з "$+$" на "$-$", то x_0 — точка максимуму, інакше — точка мінімуму.

Теорема (друга достатня умова екстремуму). Нехай $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, x_0 — внутрішня точка множини D_f. Якщо функція f має n похідних у точці x_0 і $f^{(k)}(x_0) = 0$, $k = \overline{1, n-1}$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, то при парному n функція f має локальний екстремум (максимум, якщо $f^{(n)}(x_0) \leqslant 0$; мінімум, якщо $f^{(n)}(x_0) \geqslant 0$), інакше екстремум відсутній (при непарному n).

Абсолютним, або ***глобальним максимумом*** (***мінімумом***) функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається найбільше (найменше) значення $f(x)$ при $x \in D_f$, якщо воно існує.

За теоремою Вейєрштрасса для $f \in C([a, b])$ існують абсолютний максимум та мінімум, що досягаються або в точках локальних екстремумів, або на краях відрізку $[a, b]$. Для цього потрібно знайти множину всіх ***стаціонарних*** точок ($f'(x) = 0$) та множину ***критичних*** точок ($f'(x)$ — не існує), додати до цих множин кінці відрізку $[a, b]$ і серед цих значень шукати глобальні екстремуми.

Для дослідження опуклості функцій наведемо кілька допоміжних означень та тверджень.

Нехай $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ — дві точки на декартовій площині. ***Відрізком*** P_1P_2 називається множина точок

$$\{P(x, y) \,|\, x = tx_1 + (1-t)x_2 \,\wedge\, y = ty_1 + (1-t)y_2,\ t \in [0, 1]\}\,.$$

Множина $M \subset \mathbb{R}^2$ називається ***опуклою***, якщо $\forall P_1, P_2 \in M \;\Rightarrow\; P_1P_2 \subset M$.

Нехай $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in D_f\}$ — графік функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. ***Надграфіком*** (***підграфіком***) цієї функції називається множина $\{(x, y) \,|\, x \in D_f \,\wedge\, y \geqslant f(x)\}$ ($\{(x, y) \,|\, x \in D_f \,\wedge\, y \leqslant f(x)\}$). Будемо казати, що точка (x, y) ***лежить вище*** (***нижче***) графіка, якщо вона належить надграфіку (підграфіку) цієї функції.

Функція $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ називається ***опуклою*** (***угнутою***), якщо її надграфік (підграфік) є опуклою множиною.

Теорема (критерій опуклості функції). Для того, щоб функція $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ була опуклою, необхідно і достатньо, щоб $\forall x \in (a, b)$ існувала похідна $f'(x)$ і щоб ця похідна була неспадною на (a, b) функцією.

Наслідок (критерій опуклості двічі диференційовної функції). Якщо функція $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ має другу похідну $\forall x\in(a,b)$, то для опуклості f необхідно і достатньо, щоб $\forall x\in(a,b):\ f''(x)\geqslant 0$.

Теорема (еквівалентний критерій опуклості функції). Функція $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ опукла тоді і тільки тоді, коли $\forall\lambda\in[0,1]\ \forall x_1,x_2\in(a,b)$ виконується нерівність:

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\leqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Відповідно функція $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ є угнутою, якщо функція $(-f)$ — опукла, тобто $\forall\lambda\in[0,1]\ \forall x_1,x_2\in(a,b)$ виконується нерівність:

$$f\left(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\right)\geqslant\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2).$$

Теорема (нерівність Ієнсена). Нехай функція $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ — опукла. Тоді $\forall\left(n\geq 1,\ x_k\in(a,b),\ \lambda_k\geq 0,\ k=\overline{1,n},\ \sum_{k=1}^{n}\lambda_k=1\right)$ виконується ***нерівність Ієнсена***:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\lambda_k f(x_k).$$

Якщо функція $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференційовна в точці $x_0\in(a,b)$ і при переході через точку $M_0(x_0,f(x_0))$ змінює характер опуклості, то M_0 називається ***точкою перегину графіка*** функції f.

Теорема (необхідна умова перегину). Нехай функція $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ диференційовна на (a,b), і в точці $x_0\in(a,b)$ існує $f''(x_0)$. Якщо $M_0(x_0,f(x_0))$ — точка перегину графіка $\Gamma(f)$, то $f''(x_0)=0$.

Теорема (достатня умова перегину). Нехай функція $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ має n похідних у точці $x_0\in(a,b)$ і $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=\overline{2,n-1}$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Якщо n — непарне число, то $M_0(x_0,f(x_0))$ — точка перегину $\Gamma(f)$, якщо n — парне, то M_0 не є точкою перегину.

Побудова графіків функцій

Нехай функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ задана параметрично за допомогою рівнянь $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $t\in D_\varphi=D_\psi=T$, де T — скінченний чи нескінченний проміжок числової прямої. У цьому випадку графіком функції f є множина точок $\Gamma(f)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x=\varphi(t),\ y=\psi(t),\ t\in T\right\}$.

На площині $\mathbb{R}^2$ довільна пряма l задається рівнянням $Ax+By+C=0$. Тоді, як відомо з аналітичної геометрії, відстань від точки $(\varphi(t),\psi(t))\in\Gamma(f)$ $(t\in T)$ до прямої l обчислюється за формулою:

$$d(t)=\frac{|A\varphi(t)+B\psi(t)+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Пряма l, задана рівнянням $Ax+By+C=0$, називається ***асимптотою графіка*** $\Gamma(f)$ при $t\to t_0$ (або $t\to t_0+0$, $t\to t_0-0$, $t_0\in\overline{\mathbb{R}}$), якщо виконуються дві умови: **1)** $d(t)\to 0$ при $t\to t_0$; **2)** $\varphi^2(t)+\psi^2(t)\to+\infty$ при $t\to t_0$.

Розглянемо можливі випадки.

1) $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=a\in\mathbb{R}\ \wedge\ \lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=\infty\ \Rightarrow\ d(t)\to 0\ \Leftrightarrow\ A\varphi(t)+B\psi(t)+C\to 0$ $\Leftrightarrow B=0,\ a=-\dfrac{C}{A}$. У такому разі пряма $x=a$ називається ***вертикальною асимптотою графіка*** $\Gamma(f)$.

2) $\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=b\in\mathbb{R}\ \wedge\ \lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=\infty\ \Rightarrow\ d(t)\to 0\ \Leftrightarrow\ A\varphi(t)+B\psi(t)+C\to 0$ $\Leftrightarrow A=0,\ b=-\dfrac{C}{B}$. У такому разі пряма $y=a$ називається ***горизонтальною асимптотою графіка*** $\Gamma(f)$.

3) $\lim\limits_{t\to t_0}\varphi(t)=\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=\infty\ \Rightarrow\ d(t)\to 0\ \Leftrightarrow\ A\varphi(t)+B\psi(t)+C\to 0\ \Leftrightarrow$ $\varphi(t)\left(\dfrac{A}{B}+\dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}\right)\to-\dfrac{C}{B}\ \Leftrightarrow\ \lim\limits_{t\to t_0}\dfrac{\psi(t)}{\varphi(t)}=-\dfrac{A}{B}=k\wedge\lim\limits_{t\to t_0}(\psi(t)-k\varphi(t))=-\dfrac{C}{B}=b.$ Рівняння асимптоти набуває вигляду $y=kx+b$ — така пряма називається ***похилою асимптотою графіка*** $\Gamma(f)$.

Явно задана функція $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ є частинним випадком параметрично заданої функції при $\varphi(t)=t$, її графіком є множина $\Gamma(f)=\{(x,y)\,|\,y=f(x),\ x\in D_f\}$. Три типи *асимптот* визначаються умовами:

1) пряма $x=x_0$ є ***вертикальною асимптотою графіка*** $\Gamma(f)$ при $x\to x_0-0$ $(x\to x_0+0)$, якщо $f(x_0-0)=\infty$ $(f(x_0+0)=\infty)$;

2) пряма $y=b$ є ***горизонтальною асимптотою графіка*** $\Gamma(f)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$ $\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b\right)$;

3) пряма $y=kx+b$ $(k\neq 0)$ є ***похилою асимптотою графіка*** $\Gamma(f)$ при $x\to+\infty$ $(x\to-\infty)$, якщо $\lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}\dfrac{f(x)}{x}=k\ \wedge\ \lim\limits_{x\to+\infty(-\infty)}(f(x)-kx)=b\in\mathbb{R}$.

План дослідження функції із побудовою її графіка:

1. визначити D_f, E_f та можливі точки розриву;
2. перевірити на парність/непарність, періодичність;
3. визначити точки перетину графіка із координатними осями (якщо такі є);
4. визначити асимптоти графіка, якщо такі існують;
5. знайти проміжки монотонності функції та дослідити її на екстремуми;
6. визначити проміжки опуклості (угнутості) графіка $\Gamma(f)$ та знайти точки перегину, якщо такі існують;
7. побудувати графік $\Gamma(f)$.

Практичне заняття 14

Приклад 1. *Доведемо нерівність:* $|\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y|>\dfrac{4}{3}(y-x)$, *де* $\dfrac{\pi}{6}<x<y<\dfrac{\pi}{3}$.
⌜

Розглянемо функцію $f(t)=\operatorname{ctg}t,\ t\in[y,x]$, яка задовольняє умови теореми Лагранжа. Згідно із цією теоремою, існує таке число $\xi\in(y,x)$, що:

$$\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y=-\frac{1}{\sin^2\xi}\cdot(x-y)=\frac{1}{\sin^2\xi}(y-x).$$

Оскільки $\operatorname{ctg} x > \operatorname{ctg} y$ при $\dfrac{\pi}{6} < x < y < \dfrac{\pi}{3}$, то ліва частина останньої рівності є невід'ємною. Також за даних обмежень на числа x та y маємо, що

$$\frac{1}{4} < \sin^2 \xi < \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin^2 \xi} > \frac{4}{3},$$

звідки і отримуємо шукану нерівність. ⌟

Приклад 2. *Доведемо нерівність:* $\operatorname{ch} x > 1 + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$, $x > 0$.

⌜

Розглянемо функції $\varphi(t) = \operatorname{ch} t$, $t > 0$, та $\psi(t) = 1 + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{t^4}{24}$, $t > 0$. Очевидно, що $\varphi(0) = \psi(0) = 1$. Знайдемо похідні цих функцій до того порядку, поки не отримаємо нерівність вигляду $\varphi^{(n)}(t) > \psi^{(n)}(t)$, $t > 0$. Оскільки

$$\begin{aligned}
&\varphi'(t) = \operatorname{sh} t, \;\; \psi'(t) = t + \frac{t^3}{6}, \;\; \varphi'(0) = \psi'(0) = 0;\\
&\varphi''(t) = \operatorname{ch} t, \;\; \psi''(t) = 1 + \frac{t^2}{2}, \;\; \varphi''(0) = \psi''(0) = 1;\\
&\varphi'''(t) = \operatorname{sh} t, \;\; \psi'''(t) = t, \;\; \varphi'''(0) = \psi'''(0) = 0;\\
&\varphi^{(4)}(t) = \operatorname{ch} t, \;\; \psi^{(4)}(t) = 1, \;\; \operatorname{ch} t > 1 \text{ при } t > 0,
\end{aligned}$$

то маємо, що $\varphi(t) > \psi(t)$ $\forall t > 0$. ⌟

Приклад 3. *Проведемо дослідження функції* $f(x) = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ *та побудуємо її графік.*

⌜

1. Область визначення функції $D_f = \mathbb{R} \backslash \{-1\}$, а у точці $x = -1$ функція f має розрив II роду:

$$\lim_{x \to -1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \lim_{x \to -1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \frac{-1}{2 \cdot 0} = -\infty.$$

2. Функція загального вигляду, бо $f(-x) \neq \pm f(x)$, та неперіодична.

3. Функція має один нуль у точці $M(0;0)$ — єдиній точці перетину графіка $\Gamma(f)$ із координатними осями.

4. Оскільки у точці $x = -1$ функція f має розрив II роду типу полюс, то пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою графіка $\Gamma(f)$. Горизонтальних асимптот немає тому, що

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty; \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty.$$

З'ясуємо, чи є похила асимптота:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2} = k \in \mathbb{R};$$

$$b = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \to \infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} = -1.$$

Отже, на графіку $\Gamma(f)$ є похила асимптота, що задається рівнянням $y = \dfrac{x}{2} - 1$.

5. Знайдемо похідну функції f: $f'(x) = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$, $x \in D_f$. Маємо дві стаціонарні точки $x = 0$ та $x = -3$, тобто $f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \in \{-3, 0\}$. Знайдемо проміжки монотонності функції f.

x		-3		-1		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-27/8$	$\searrow$		$\nearrow$	0	$\nearrow$

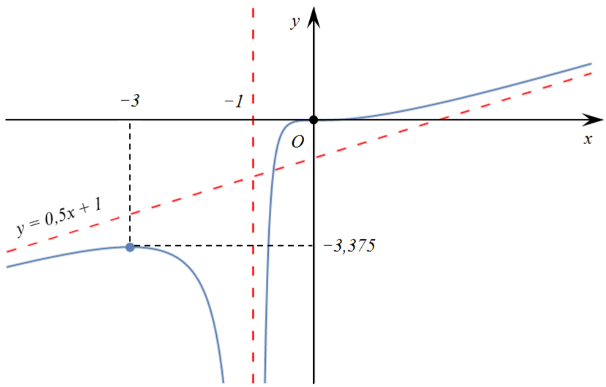
У точці $x = -3$ виконується перша достатня умова екстремуму та визначений локальний максимум функції: $f(-3) = f_{\max} = -\dfrac{27}{8}$, а у точці $x = 0$ екстремума немає.

6. Знайдемо другу похідну: $f''(x) = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$, $x \in D_f$, і отримаємо таблицю проміжків опуклості/угнутості графіка $\Gamma(f)$.

x		-1		0	
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cap$		$\cap$	0	$\cup$

Оскільки $f''(x) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$, та друга похідна змінює знак при переході через точку $x = 0$, то графік $\Gamma(f)$ має перегин у цій точці.

7. Тепер можемо побудувати графік $\Gamma(f)$, враховуючи результати проведеного дослідження функції f.



Доведіть нерівності:

14.1 $|\sin x - \sin y| \leqslant |x - y|$;

14.2 $|\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y| \leqslant |x - y|$;

14.3 $\sin x \leqslant \sin y + (x - y)\cos y$, $\{x, y\} \subset [0, \pi]$;

14.4 $\dfrac{x - y}{\cos^2 y} \leqslant \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y \leqslant \dfrac{x - y}{\cos^2 x}$, якщо $0 < y \leqslant x < \dfrac{\pi}{2}$;

14.5 $(x - y)e^y < e^x - e^y < (x - y)e^x$, якщо $y < x$;

14.6 $(x - y) \cdot 2^{y-1} < 2^x - 2^y < (x - y) \cdot 2^x$, якщо $y < x$;

14.7 $py^{p-1}(x - y) \leqslant x^p - y^p \leqslant px^{p-1}(x - y)$, якщо $0 < y < x$, $p > 1$;

14.8 $e^x > ex$, якщо $x > 1$;

14.9 $e^x > 1 + x + \dfrac{x^2}{2}$, $x \neq 0$;

14.10 $x - \dfrac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$, $x > 0$;

14.11 $\operatorname{tg} x > x + \dfrac{x^3}{3}$, $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$;

14.12 $\operatorname{sh} x > x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120}$, $x > 0$;

14.13 $e^x < 1 + x + \dfrac{x^2 e^x}{2}$, $x > 0$;

14.14 $x - \dfrac{x^3}{6} < \sin x < x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120},\ x > 0;$

14.15 $x^3 + 3x + 6x\ln x + 2 > 6x^2,\ x > 1;$

14.16 $x^4 + 8x + 12x^2 \ln x > 8x^3 + 1,\ x > 1;$

14.17 $\dfrac{e^x + e^y}{2} \geqslant e^{\frac{x+y}{2}};$

14.18 $x\ln x + y\ln y \geqslant (x+y)\ln\dfrac{x+y}{2},\ x > 0,\ y > 0;$

14.19 $(x+y)\operatorname{arctg}\dfrac{2}{x+y} \leqslant x\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x} + y\operatorname{arctg}\dfrac{1}{y},\ x > 0,\ y > 0;$

14.20 $\sqrt{\sin\dfrac{x+y}{2}} \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{\sin x} + \sqrt{\sin y}\right),\ \{x, y\} \subset [0, \pi];$

14.21 $\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^2 \geqslant \dfrac{1}{2}\left(\cos x^2 + \cos y^2\right),\ \{x, y\} \subset \left[0, \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\right];$

14.22 $\dfrac{x^n + y^n + z^n}{3} > \left(\dfrac{x+y+z}{3}\right)^n,\ x > 0,\ y > 0,\ z > 0,\ n > 1,$
$x \neq y,\ y \neq z,\ z \neq x;$

14.23 $\left(\dfrac{x + 2y + 3z}{6}\right)^4 \leqslant \dfrac{x^4 + 2y^4 + 3z^4}{6}.$

Дослідіть функцію $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ та побудуйте її графік, якщо:

14.24 $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x};$

14.25 $f(x) = x^3 - 5x^2 + 6x;$

14.26 $f(x) = \dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2};$

14.27 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + x}};$

14.28 $f(x) = \ln(x^2 - 1);$

14.29 $f(x) = \ln\dfrac{x+1}{x+2};$

14.30 $f(x) = e^x + e^{-x};$

14.31 $f(x) = x\ln|x|;$

14.32 $f(x) = x + \operatorname{arctg} x;$

14.33 $f(x) = x^x.$

Дослідіть функцію $x \mapsto y(x)$, задану параметрично чи неявно, та побудуйте її графік, якщо:

14.34 $x = 2t - t^2,\ y = 3t - t^3;$

14.35 $x^3 + y^3 = 3axy;$

14.36 $x = t + e^{-t},\ y = 2t + e^{-2t};$

14.37 $x = te^t,\ y = te^{-t};$

14.38 $x = \dfrac{t^2}{t-1},\ y = \dfrac{t}{t^2-1};$

14.39 $x = \dfrac{t^2}{t+1},\ y = \dfrac{1}{t(t+1)};$

14.40 $x^2y^2 = x^3 - y^3;$

14.41 $\left(x^2 + y^2\right)^3 = 4a^2x^2y^2.$

Рекомендовані джерела

[1] Ляшко І. І., Ємельянов В. Ф., Боярчук О. К. *Математичний аналіз. Частина 1.* — К: Вища школа, 1992. — 495 с.

[2] Ляшко И. И., Боярчук А. К., Гай Я. Г. и др. *Справочное пособие по математическому анализу. Часть 1. Введение в анализ, производная, интеграл.* — К.: Вища школа, 1978. — 696 с.

[3] Ляшко С. И., Боярчук А. К. и др. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — Москва–Санкт-Петербург–Киев: Диалектика, 2001. — 432 с.

[4] Дороговцев А. Я. *Математический анализ. Краткий курс в современном изложении.* — К.: Факт, 2004. — 560 с.

[5] Фихтенгольц Г. М. *Основы математического анализа. Том 1.* — М.: Наука, 1968. — 440 с.

[6] Демидович Б. П. *Сборник задач и упражнений по математическому анализу.* — М.: Наука, 1977. — 528 с.

[7] Рубльов Б. В. *Математичний аналіз. Теорія послідовностей.* — К.: КНУ, 2010. — 95 с.

[8] Денисьєвський М. О., Курченко О. О., Нагорний В. Н., Нестеренко О. Н., Петрова Т. О., Чайковський А. В. *Збірник задач з математичного аналізу. Частина І. Функції однієї змінної.* — К.: ВПЦ “Київський університет”, 2005. — 257 с.