

Лекція 8. Дослідження стійкості чисельних алгоритмів із змінними операторними коефіцієнтами. – 2 год. [1, 3, 5:стор100-138,

Дослідження стійкості чисельних алгоритмів із змінними операторними коефіцієнтами. Енергетичний метод.

Огляд інших умов стійкості нелінійних задач і задач із змінними коефіцієнтами.

1. Нехай розв'язком задачі є вектор функція $\vec{u}(\vec{x}, t)$, яка має неперервні похідні по \vec{x} до порядку p включно. Визначаємо норму $\|\vec{u}\|_p$ за рівністю

$$\|\vec{u}\|_p^2 = \sum_{|\vec{v}| \leq p} \left\| \partial_{x_1}^{v_1} \partial_{x_2}^{v_2} \dots \partial_{x_d}^{v_d} \vec{u} \right\|^2,$$

де $|\vec{v}| = v_1 + v_2 + \dots + v_d$ означає порядок похідної, середньоквадратична норма якої стоїть під знаком суми. $\partial_{x_k}^{v_k} \vec{u} = \partial^{v_k} \vec{u} / \partial x_k^{v_k}$. Задачу вважатимемо коректно поставленою, якщо її розв'язок і початковий елемент задовольняють умову

$$\|\vec{u}(\vec{x}, t)\| \leq \text{const} \|\vec{u}(\vec{x}, 0)\|, \quad \forall t \in [0, T]$$

для деякого фіксованого p і для щільної множини початкових елементів. Це відповідає визначенню неперервної залежності порядку p від початкових даних.

2. Умови *сильної стійкості* визначаються так:

1) при кожному фіксованому Δt оператор $H(\Delta t)$ визначений всюди і такий, що якщо позначити

$$\|\vec{u}\|_H^2 = (\vec{u}, H\vec{u}),$$

то існує додатна стала K_1 , незалежна від параметрів різницевої схеми, така що

$$K_1^{-1} \|\vec{u}\|^2 \leq \|\vec{u}\|_H^2 \leq K_1 \|\vec{u}\|^2;$$

2) розв'язок задачі задовольняє умові

$$\|\vec{u}^{n+1}\|_H \leq (1 + K_2 \Delta t) \|\vec{u}^n\|_H, \quad (7.1)$$

де K_1 і K_2 обмежені додатні сталі.

Це визначення стійкості в загальному випадку принаймні не слабкіше вище уведеного, бо якщо різницева схема сильно стійка, то при $n\Delta t \leq T$

$$\|\vec{u}^n\| \leq K_1^{1/2} \|\vec{u}^n\|_H \leq (1 + K_2 \Delta t)^n K_1^{1/2} \|\vec{u}^0\|_H \leq K_1 e^{K_2 T} \|\vec{u}^0\|_H$$

Отже для операторів з сталими коефіцієнтами воно еквівалентне до розглянутого вище.

Якщо побудована норма, в якій розв'язок задачі задовольняє умові (7.1), то при достатній гладкості її можна використати і для різницевих задач.

3. Якщо

$$G(x, \xi) = \sum_{\beta} c^{\beta}(x) e^{i\beta\xi} = 1 - a(x)\xi + O(\xi^2)$$

– локальний множник переходу різницевої схеми

$$u^{n+1}(x) = (Cu^n(x)) \equiv \sum_{\beta} c^{\beta} u^n(x + \beta\Delta x)$$

для рівняння теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

із змінним коефіцієнтом $a(x) \geq \alpha > 0$, то, як встановлено в роботі [5], різницева схема стійка при виконанні умов:

- 1) $a(x)$ задовольняє умові Ліпшиця,
- 2) $|G(x, \xi)| < 1 \quad \forall x \text{ і } \forall \xi \in [-\pi, \pi] \setminus \{0\}$,
- 3) $G(x, 0) = 1$ (умова узгодженості).

4. При розгляді гіперболічних рівнянь, різницеву схему

$$\vec{u}^{n+1} = C(\Delta T)\vec{u}^n, \quad (7.2)$$

визначимо як *дисипативну порядку $2r$* (де r натуральне число), якщо існує таке $\delta > 0$, що для всіх x і $\forall \xi$, які задовольняють умові $\max_{j=1,d} |\xi_j| \leq \pi$ та Δt менших деякого $\tau > 0$

$|\lambda_v(x, \Delta t, \xi)| \leq 1 - \delta |\xi|^{2r}$, де вектор $\xi = \Delta t \mathbf{k}$, λ_v - власні значення локальної матриці переходу G .

Теорема. [13] Якщо різницева схема (7.2) апроксимує диференціальне рівняння

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^d A_j(\vec{x}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}; \quad -\infty < x_j < \infty; \quad 0 \leq t \leq 1,$$

де $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ – вектор розмірності p , $A_j(\vec{x})$ – $p \times p$ ермітові матриці гладко залежні від \vec{x} , але незалежні від t , рівномірно обмежені та рівномірно задовольняють умові Ліпшиця по \vec{x} , схема (7.2) дисипативна порядку $2r$ і має порядок точності $2r - 1$, то вона стійка.

5. Нехай $\Delta x_j = q_j(\Delta t)$, тоді різницева схема

$$\vec{u}^{n+1} = C(\Delta t)\vec{u}^n = \left[\sum_{\beta} c^{\beta}(\vec{x}) \Gamma^{\beta} \right] \vec{u}^n \quad (7.3)$$

стійка, якщо [13]:

- 1) матриці $c^{\beta}(\vec{x})$ ермітові, не залежать від Δt і задовольняють умові Ліпшиця по компонентам вектора \vec{x} ;
- 2) $c^{\beta}(\vec{x}) \geq 0$.

Теорема 1. Якщо $c^{\beta}(\vec{x})$ – дійсні симетричні матриці, їх коефіцієнти не залежать від Δt і мають обмежені другі похідні по \vec{x} , а умова

$$\|G(\vec{x}, \xi)\| = \left\| \sum_{\beta} c^{\beta}(\vec{x}) e^{i\beta\xi} \right\| \leq 1 \quad \forall \vec{x} \text{ i } \xi \quad (7.4)$$

виконується всюди, то для дійсних векторних функцій \vec{u}^n різницева схема (7.3) стійка [13].

В роботах Лакса та Ніренберга встановлено умову, яка визначає прямий зв'язок між локальною стійкістю (7.4) та стійкістю в цілому.

Теорема 2. Нехай дійсні симетричні матричні коефіцієнти $c^{\beta}(\vec{x})$ не залежать від Δt і мають обмежені другі похідні по \vec{x} , а умова (7.4) виконується всюди. Тоді для дійсних векторних функцій \vec{u}^n різницева схема (7.3) стійка, тобто

$$\|C(\Delta t)\| \leq 1 + O(\Delta t).$$

6. Для нелінійних задач до сьогодні ще не створено ефективних методів дослідження достатньо широких класів різницевої схем. Мало досліджені і різницеві схеми, які апроксимують розривні розв'язки. Тут найбільш розповсюджені методи лінеаризації та використання першої варіації розв'язку [5].

Так нехай маємо задачу Коші для системи гіперболічних рівнянь

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \sum_{j=1}^d A_j(\vec{u}, \vec{x}) \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j}; \quad -\infty < x_j < \infty; \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (7.5)$$

з початковими умовами

$$\vec{u}(\vec{x}, 0) = \vec{u}_0(\vec{x}).$$

Різницеву схему, яка апроксимує цю задачу, запишемо у вигляді

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{\phi}(\vec{u}^n, \vec{x}, \Delta t), \quad (7.6)$$

де права частина є нелінійною функцією від \vec{u}^n , заданою в скінченному числі точок шаблону оператора. Нехай оператор $\vec{\phi}$ з рівняння (7.6) є погодженим в розумінні апроксимації і його перша варіація (лінійний різницевий оператор $C^n = c(n\Delta t, \Delta t)$, що відповідає коефіцієнтам c^{β} , обчисленим в точці $\mathbf{u}(\mathbf{x}, n\Delta t)$) стійка в L_2 .

Тоді в наслідок узгодженості для будь-якої гладкої функції \vec{v}

$$\vec{\phi}(\vec{v}, \mathbf{x}, \Delta t) = \vec{v} + \Delta t \sum_{j=1}^d A_j(\vec{v}, \vec{x}) \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_j} + o(\Delta t).$$

Нехай $\vec{U}(\vec{x}, t, \Delta t) = \vec{u}(\vec{x}, t) + \sum_m (\Delta t)^m \vec{U}_m(\vec{x}, t)$ задовольняє (7.6).

Тоді $\vec{U}_m(\vec{x}, t)$ задовольняють лінійним рівнянням

$$\frac{\partial \vec{U}_m}{\partial t} = \sum_{j=1}^d A_j(\vec{u}, \vec{x}) \frac{\partial \vec{U}_m}{\partial x_j} + \alpha(\vec{x}, t) \vec{U}_m + \beta_m(\vec{x}, t), \quad \vec{U}_m(\vec{x}, 0) = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.7)$$

Тут α залежить від перших похідних \vec{u} та перших похідних A_j по \vec{u} . Розв'язки (7.7) існують і неперервно залежать від неоднорідних членів β_m та їх похідних до деякого порядку r_0 . Якщо, крім того, \vec{u} , A_j , $\vec{\phi}$ мають

неперервні похідні до порядку $\left[(d+1)/2 \right] + r_0 + 2$, то при $\Delta t \rightarrow 0$ різницева апроксимація \vec{u}^{n+1} збігається до розв'язку задачі (7.5) [5].

Для багатьох задач жодна з цих умов не виконується і виникає необхідність шукати більш досконалі критерії стійкості. Аналіз інших відомих методів можна знайти в монографіях [1,7-9] та ін.

Дослідження стійкості різницевих схем за допомогою енергетичного методу

1. Аналіз стійкості одного різницевого рівняння.

Проілюструємо ідею методу на прикладі розв'язку задачі Коші для модельного рівняння конвективного переносу [12]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad k = \text{const} > 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \quad (10.1)$$

який задовольняє початковій умові

$$u(x) = \phi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Будемо вважати, що функція $\phi(x) \in \text{фінітною}$, тобто вона перетворюється в нуль поза межами деякого скінченного проміжку: $\phi(x) = 0$ при $|x| \geq l$. Тоді розв'язок задачі $u(x, t)$ в довільний момент часу t_1 також перетворюється в нуль при достатньо великому значенню $|x| \geq l(t_1)$. На сітковій множині $\varpi_{h\tau} = \{x_i, t_n \mid x_i = ih, i = 0, 1, 2, \dots, t_n = n\tau, \quad n = 0, 1, 2, \dots, h = \text{const} > 0, \tau = \text{const} > 0\}$ функції $u(x, t)$ буде відповідати сіткова функція $u_i^n = u(ih, n\tau)$, причому $u_i^n = 0$ при $|i| > N_n$. У такому разі для фінітних функцій скалярний добуток

$$(u, v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} u_i^n v_i^n h$$

запишеться так

$$(u, v) = \sum_{i=-N_n}^{N_n} u_i^n v_i^n h.$$

У просторі сіткових функцій уведемо різницеві оператори

$$L_h u_i^n = k \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}, \quad \text{та} \quad L_\tau u_i^n = \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau},$$

$$i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots,$$

кожен з яких є також сітковою функцією того ж простору.

Використовуючи формулу підсумування за частинами [3, стор. 98], легко переконатися, що на скінченному інтервалі $|i| < N$ вірна формула

$$\sum_{i=-N-l}^{N+l} v_i^n \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = y_{N+l}^n v_{N+l}^n - y_{-N-l-1}^n v_{-N-l-1}^n -$$

$$- \sum_{i=-N-l-1}^{N+l-1} y_{i-1}^n \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h}.$$

Звідки, враховуючи фінітність функцій y_i^n та v_i^n , маємо

$$\sum_{i=-N-l}^{N+l} v_i^n \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = - \sum_{i=-N-l-1}^{N+l-1} y_{i-1}^n \frac{v_{i+1}^n - v_i^n}{h}.$$

Виходячи з визначення спряженого оператора

$$(L_h u, v) = (u, L_h^* v)$$

встановлюємо, що $L_h^* u = -k \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}$. Причому $L_h^* \neq L_h$.

Запишемо ще одну очевидну рівність

$$y_i^n \frac{y_i^n - y_{i-1}^n}{h} = \frac{(y_i^n)^2 - (y_{i-1}^n)^2}{2h} + \frac{(y_i^n - y_{i-1}^n)^2}{2h} = \frac{1}{2} [L_h(y^2) + h(L_h y)^2].$$

Звідси після підсумування та врахування фінітності функцій випливає, що

$$(L_h y, y) = h \|L_h y\|^2 / (2k).$$

Різницеве рівняння

$$L_\tau u + L_h u = 0 \quad (10.3)$$

помножимо на $u_i^{n+0.5}$ і підсумуємо за усіма точками просторової сітки. У результаті одержимо

$$0,5L_\tau \|u^n\|^2 = -(L_h u^n, u^{n+0.5}).$$

Оскільки

$$u_i^{n+0.5} = u_i^n + \tau \frac{u_i^{n+0.5} - u_i^n}{\tau / 2} = u_i^n - \frac{\tau}{2} L_h u_i^n,$$

то

$$0,5L_\tau \|u^n\|^2 = -(L_h u^n, u^n) + \frac{1}{2} \tau \|L_h u^n\|^2.$$

Або

$$0,5L_\tau \|u^n\|^2 = \frac{1}{2} \left(\tau - \frac{h}{k} \right) \|L_h u^n\|^2. \quad (10.4)$$

Отже, якщо права частина рівності (10.4) не додатна, тобто $\tau \leq h/|k|$, то

$$L_\tau \|u^n\|^2 \leq 0$$

і, отже

$$\|u^{n+1}\| \leq \|u^n\|. \quad (10.5)$$

Нерівність (10.5), яка вірна при $\tau \leq h/|k|$, свідчить про рівномірну стійкість різницевого рівняння (10.3) за початковими даними.

Енергетичний метод встановлює достатні умови стійкості.

Відзначимо, що енергетичний метод дозволяє отримати більшу ніж в методі фон Неймана інформацію про різницеву схему. Так відомо, що центрально різницева апроксимація рівняння конвективного переносу безумовно нестійка. Тобто для довільного вибору кроків сітки модуль множника переходу більший від одиниці. Проаналізуємо тепер цю схему за допомогою енергетичного методу. Для цього уведемо оператор

$$L_h^0 u_i^n = k \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Очевидно, що

$$L_h^0 u_i^n = \frac{1}{2} (L_h u_i^n - L_h^* u_i^n),$$

а отже, в силу визначення спряженого оператора

$$(L_h^0 u, u) = \frac{1}{2} [(L_h u, u) - (L_h^* u, u)] = 0.$$

Запишемо різницеве рівняння

$$L_{\tau} u_i^n + k L_h^0 u_i^n = 0, \quad (10.6)$$

помножимо його на $u_i^{n+0.5}$ і підсумуємо за усіма індексами просторових точок сітки та, скориставшись апроксимуючим різницеvim рівнянням, одержимо

$$\frac{1}{2} L_{\tau} (\|u^n\|^2) = -(L_h^0 u^n, u^{n+0.5}) = -(L_h^0 u^n, u^n) + \frac{\tau}{2} \|L_h^0 u^n\|^2.$$

Враховавши, що $(L_h^0 u, u) = 0$, маємо

$$L_{\tau} (\|u^n\|^2) = \tau \|L_h^0 u^n\|^2 \geq 0$$

Отже, норма сіткового розв'язку при переході на наступний часовий шар не може спадати. Проте її зростання обмежене. Дійсно

$$\begin{aligned} \|L_h^0 u^n\|^2 &= k^2 \sum_i (L_h^0 u_i^n)^2 h = \frac{k^2}{4h^2} \sum_i (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)^2 h \leq \\ &\leq \frac{k^2}{2h^2} \sum_i ((u_{i+1}^n)^2 + (u_{i-1}^n)^2) h \leq \frac{k^2}{h^2} \|u^n\|^2. \end{aligned}$$

Звідки випливає, що

$$L_{\tau} (\|u^n\|^2) \leq \frac{k^2}{h^2} \|u^n\|^2,$$

або

$$\|u^{n+1}\|^2 \leq [1 + (k^2 \tau / h^2) \tau] \|u^n\|^2$$

Нехай $d_0 \geq (k^2 \tau / h^2) \tau$. Тоді вірна мажорантна оцінка

$$1 + (k^2 \tau / h^2) \tau \leq \exp(d_0 \tau),$$

з якої випливає

$$\|u^{n+1}\| \leq \exp(0,5 d_0 \tau) \|u^n\|.$$

Ця нерівність приводить до умови стійкості за початковими даними такого виду

$$\|u^{n+1}\| \leq \exp(0,5 d_0 T) \|u^0\|.$$

Тут T граничне значення інтервалу часу, на якому розглядається розв'язок задачі.

Відзначимо, що умова стійкості $\tau \leq d_0 h^2 / k^2$ не є природною для рівнянь гіперболічного типу. Вона більш притаманною для параболічних рівнянь.

2. Застосування енергетичного методу до системи різницевих рівнянь.

В області $-\infty < x < \infty$, $t > 0$ розглянемо задачу Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial u}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial v}{\partial x}, \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0$$

при заданих початкових умовах

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad -\infty < x < \infty.$$

Вважаємо, що функції u та v є фінітними. Помножимо перше рівняння системи на v , а друге на u і складемо результати

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (u^2 + v^2) = k \frac{\partial}{\partial x} (uv).$$

Проінтегрувавши останню рівність по x одержимо

$$\frac{\partial E}{\partial t} = 0,$$

$$\text{де } E(t) = 0,5 \int_{-\infty}^{\infty} (u^2 + v^2) dx$$

З останньої диференціальної рівності випливає енергетична тотожність

$$E(t) = E(0),$$

яка виражає закон збереження енергії.

Перейдемо далі до дослідження різницевої схеми. Диференціальній задачі поставимо у відповідність сімейство різницевих схем

$$\begin{cases} L_{\tau} v_i^n = k L_h u_i^{(\alpha)}, & i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \\ L_{\tau} u_i^n = k L_h^* v_i^{(\beta)}, & \\ v_i^0 = v_0(x_i), \quad u_i^0 = u_0(x_i), & \\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, & \end{cases}$$

де $u_i^{(\alpha)} = \alpha u_i^{n+1} + (1 - \alpha) u_i^n$; $v_i^{(\beta)} = \beta v_i^{n+1} + (1 - \beta) v_i^n$; α та β – вільні параметри.

Помножимо перше рівняння системи на $v_i^{\beta} = v_i^{n+0,5} + (\beta - 0,5)\tau L_{\tau} v_i^n$, а друге на $u_i^{\alpha} = u_i^{n+0,5} + (\alpha - 0,5)\tau L_{\tau} u_i^n$ і підсумуємо одержані співвідношення за індексами просторових точок

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} L_{\tau} \|v^n\|^2 + (\beta - 0,5)\tau \|L_{\tau} v^n\|^2 &= (L_h u^{\alpha}, v^{\beta}), \\ \frac{1}{2} L_{\tau} \|u^n\|^2 + (\alpha - 0,5)\tau \|L_{\tau} u^n\|^2 &= (L_h^* v^{\beta}, u^{\alpha}). \end{aligned}$$

Склавши ці рівняння, після простих перетворень [12], маємо

$$L_{\tau} J = Q,$$

або

$$J^{n+1} = J^n + \tau Q,$$

де

$$J = 0,5(\|u^n\|^2 + \|v^n\|^2), \quad Q = -\tau[(\alpha - 0,5)\|L_\tau u^n\|^2 + (\beta - 0,5)\|L_\tau v^n\|^2].$$

Якщо для якоїсь з конкретних схем (тобто при конкретно заданих значеннях параметрах α та β) може бути встановлено умову

$$Q \leq 0,$$

то ця умова є достатньою умовою стійкості у енергетичній нормі. Тобто

$$J^{n+1} \leq J^n.$$

Так, якщо в системі різницевих рівнянь покласти $\beta = 0,5$, залишивши α вільним параметром, то $Q = -\tau(\alpha - 0,5)\|L_\tau u^n\|^2$, а отже для виконання нерівності $Q \leq 0$, яка забезпечує стійкість схеми достатньо вимагати $\alpha \geq 0,5$.

Наприкінці відзначимо, що при $\alpha = 0,5$ апроксимація є стійкою і $Q = 0$. Остання рівність означає виконання на сітковій множині закону збереження кількості енергії, який в цьому разі має вигляд

$$\|u^{n+1}\|^2 + \|v^{n+1}\|^2 = \|u^0\|^2 + \|v^0\|^2.$$

Якщо ж $0,5 < \alpha \leq 1$, то $Q \leq 0$ і енергія в різницевій схемі спадає внаслідок дії дисипативних властивостей притаманних самій різницевій схемі. Швидкість спадання енергій різницевої схеми є величиною порядку $O(\tau)$.

Завдання для самостійної роботи. (2 год.)

Принцип заморожених коефіцієнтів. Ознака Бабенка – Гельфонда. [7]

Принцип заморожених коефіцієнтів та ознака Бабенка і Гельфонда.

При дослідженні стійкості різницевих рівнянь з змінними коефіцієнтами важливе місце займає принцип заморожених коефіцієнтів [7].

В області визначення розв'язку вибирається довільна точка (\tilde{x}, \tilde{t}) . Значення коефіцієнтів різницевого рівняння, визначеного на шаблоні цієї точки, фіксуються (заморожуються) і вважається, що в усіх точках області розв'язуються різницеві рівняння з цими сталими коефіцієнтами. За допомогою спектральної ознаки встановлюються умови стійкості одержаної різницевої задачі з сталими коефіцієнтами. Дослідивши побудовані, таким чином, різницеві задачі в усіх точках сіткової області, за необхідну умову стійкості задачі вибираємо найбільш жорстку умову.

Тобто [7], має місце

Принцип заморожених коефіцієнтів. Для стійкості лінійної різницевої задачі з змінними коефіцієнтами необхідно, щоб кожна задача Коші для різницевого рівняння з сталими замороженими коефіцієнтами задовольняла необхідній спектральній ознаці стійкості фон Неймана.

Така ознака стійкості є необхідною умовою і має назву ознаки локальної стійкості.

Розглянемо, наприклад, різницеву схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a(x_m, t_n) \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad i = \overline{1, M}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.1)$$

$$u_i^0 = \phi_i, \quad i = \overline{1, M}$$

$$l_1 u_0^n = 0, \quad l_2 u_M^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

де l_1 та l_2 – різницеві оператори граничних умов. В довільній точці сіткової області (\tilde{x}, \tilde{t}) зафіксуємо значення коефіцієнта $a(x, t) = a(\tilde{x}, \tilde{t})$ і дослідимо одержану різницеву схему з сталим коефіцієнтом

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a(\tilde{x}, \tilde{t}) \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}$$

у всіх внутрішніх точках сіткової області.

Як встановлено вище, умовою стійкості такого різницевого рівняння є виконання нерівності

$$\tau \leq \frac{h^2}{2a(\tilde{x}, \tilde{t})}.$$

Оскільки в силу принципу заморожених коефіцієнтів для стійкості різницевої задачі ця умова повинна виконуватись для всіх точок (\tilde{x}, \tilde{t}) з області визначення розв'язку, то умовою локальної стійкості для рівняння з змінним коефіцієнтом є умова

$$\tau \leq \frac{h^2}{2 \max_{\tilde{x}, \tilde{t}} a(\tilde{x}, \tilde{t})}.$$

Принцип заморожених коефіцієнтів ґрунтується на евристичному рівні строгості і при дослідженні нелінійних задач. Так [7], для нелінійної задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (1 + u^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t < T,$$

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad 0 < x < 1.$$

$$u(0, t) = \varphi_1(t), \quad u(1, t) = \varphi_2(t), \quad 0 < t < T,$$

використаємо різницеву схему

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau_n} = (1 + (u_i^n)^2) \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad i = \overline{1, M}, \quad n = 1, 2, \dots, [T / \tau] - 1,$$

$$u_i^0 = \phi_i, \quad i = \overline{0, M},$$

$$u_0^n = \varphi_1(t_n + \tau_n), \quad u_M^n = \varphi_2(t_n + \tau_n), \quad n = 1, 2, \dots, [T / \tau] - 1.$$

В цій різницевій схемі крок за часом може змінюватись при переході від одного

часового шару до іншого. Нехай якимось чином ми дійшли до часового шару t_p . Виникає природне питання яким вибрати наступний крок τ_{p+1} , щоб одержана різницева схема була стійкою? Прогнозувати оцінку цього параметра дозволяє принцип заморожених коефіцієнтів, виходячи з встановленої вище оцінки

$$\tau_{p+1} \leq \frac{h^2}{2 \max_i |1 + (u_i^n)^2|}.$$

Багатоваріантні чисельні експерименти на ЕОМ підтверджують вірність цього евристичного твердження [7].

Якщо необхідну умову стійкості для задачі Коші з замороженими коефіцієнтами у якійсь точці буде порушено, то не можна чекати стійкості розв'язку крайової задачі ні при яких крайових умовах.

Принцип заморожених коефіцієнтів не враховує вплив граничних умов. Локальна стійкість може мати місце при одних і не мати місця при інших граничних умовах. Однією з причин цього є локальна некоректність постановки різницевої задачі. Відомі приклади Крайса [5,12], де в одному з них для коректно поставленої крайової задачі для рівняння з змінними коефіцієнтами, всі задачі з відповідними замороженими коефіцієнтами некоректні, а в другому – всі задачі з сталими коефіцієнтами коректні, в той час як задача з змінними коефіцієнтами такою не є.

Стренг довів [5], що для коректно поставленої задачі для рівняння $\partial u / \partial t = Au$, після заміни оператора A його головною частиною (тобто сумою членів, які містять похідні найвищого порядку) всі задачі з сталими коефіцієнтами є коректно поставленими. Тому всі задачі для систем рівнянь першого порядку є локально коректні. Для симетричних гіперболічних систем вищих порядків коректність постановки лінійних задач із змінними коефіцієнтами забезпечується теоремами чисто локального характеру.

При дослідженні стійкості різницевих початково–крайових задач з змінними коефіцієнтами і врахуванні впливу можливих збурень в крайових умовах використовується ознака Бабенка – Гельфанда. Вона вимагає одночасного дослідження трьох різницевих задач:

1) задачі Коші з збуренням в точці, яка лежить всередині області

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a(\tilde{x}, \tilde{t}) \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}$$

без урахування граничних умов (задача Коші);

2) дослідження різницевої задачі у всіх точках справа від лівої граничної точки $x = x_0$ з врахуванням тільки граничної умови в цій точці з замороженими в ній коефіцієнтом

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a(0, \tilde{t}) \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad i = 1, 2, \dots, n = 1, 2, \dots, [T/\tau] - 1,$$

$$l_1 u_0^{n+1} = 0,$$

віднісши при цьому праву границю в нескінченно віддалену точку (це можливо тільки для тих розв'язків, для яких $u_i^n \rightarrow 0$ при $i \rightarrow \infty$);

3) розглянути задачу з врахуванням тільки правої граничної умови, з замороженими в ній коефіцієнтами і дослідити її стійкості в області зліва від даної точки границі

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a(1, \tilde{t}) \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad i = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, M - 1, \quad n = 1, 2, \dots, [T/\tau] - 1,$$

$$l_2 u_M^{n+1} = 0,$$

віднісши ліву границю в $-\infty$ (це можливо тільки для тих розв'язків, для яких $u_i^n \rightarrow 0$ при $i \rightarrow -\infty$).

Останні дві задачі є значно простішими від першої задачі, оскільки при фіксованому відношенні кроків $r = \tau / h^2$ вони не залежать від h і є задачами з сталими коефіцієнтами.

Отже, потрібно скласти три незалежні від h різницевої задачі і для кожної з (попередньо поклавши $r = \tau / h^2$) знайти усі ті власні числа оператора переходу (з часового шару n на шар $n + 1$) при яких існує обмежений при прямуванні x до $+\infty$ чи $-\infty$ розв'язок виду

$$u_i^n = \lambda^n u_i^0 \quad (6.2)$$

при виконанні вказаних у цих задачах граничних умов.

Для стійкості початково-крайової задачі з змінними коефіцієнтами спектри операторів переходу кожної з трьох наведених задач повинні лежати в крузі одиничного радіуса.

Методику визначення відповідних власних чисел λ оператора переходу проілюструємо модельному прикладі. Для спрощення викладок покладемо $a(x, t) \equiv 1$ і обчислимо спектри всіх трьох задач при різних крайових умовах $l_1 u_0^{n+1} = 0$ та $l_2 u_M^{n+1} = 0$.

Після підстановки розв'язку задачі у вигляді (6.2) у різницеве рівняння, (6.1), одержимо

$$(1 - \lambda) u_i^0 = r (u_{i-1}^0 - 2u_i^0 + u_{i+1}^0) = 0, \quad r = \tau / h^2,$$

або

$$u_{i+1}^0 - \left(\frac{-2r + 1 - \lambda}{r} \right) u_i^0 + u_{i-1}^0 = 0.$$

Характеристичним рівнянням цього різницевого рівняння є квадратне рівняння [5]

$$q^2 + \left(\frac{-2r + 1 - \lambda}{r} \right) q + 1 = 0. \quad (6.3)$$

Якщо q є коренем рівняння (6.3), то сіткова функція

$$u_i^n = \lambda^n q^i$$

є одним з розв'язків різницевого рівняння

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}. \quad (6.4)$$

При $|q|=1$, тобто $q = \exp(I\alpha)$ ($I^2 = -1$), обмеженим при $i \rightarrow \infty$ та $i \rightarrow -\infty$ розв'язком є сіткова функція [5]

$$u_i^n = \lambda^n \exp(I\alpha i). \quad (6.5)$$

Після підстановки (6.5) у (6.4), маємо

$$\lambda = 1 + r(e^{-I\alpha} - 2 + e^{I\alpha}),$$

або, врахувавши, що $(e^{-I\alpha} + e^{I\alpha}) = 2 \cos \alpha$, знаходимо

$$\lambda = 1 - 4r \sin^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi.$$

Ці значення $\lambda = \lambda(\alpha)$ заповнюють відрізок $1 - 4r \leq \lambda \leq 1$, який є спектром розглянутої задачі. Поза цим відрізком власних чисел не існує, оскільки у випадку відсутності у характеристичного рівняння кореня q рівного за модулем одиниці різницева задача не має обмежених при $i \rightarrow \pm\infty$ розв'язків.

Якщо λ не лежить на відрізку $1 - 4r \leq \lambda \leq 1$, то модулі обох коренів характеристичного рівняння відмінні від одиниці, але їх добуток рівний вільному члену, тобто одиниці.

Нехай для визначеності $|q_1| < 1$ а $|q_2| > 1$. Тоді загальний розв'язок різницевого рівняння, модуль якого спадає при $i \rightarrow \infty$, має вигляд

$$u_i = (q_1(\lambda))^i C,$$

а загальний розв'язок різницевого, яке прямує до нуля при $i \rightarrow -\infty$, має вигляд

$$u_i = (q_2(\lambda))^i C.$$

Для визначення власних значень другої різницевої задачі потрібно підставити $u_i = (q_1(\lambda))^i C$ у ліве граничне значення $l_1 u_0 = 0$ і знайти ті значення λ при яких воно виконується. Тобто, множина Це будуть усі власні значення другої різницевої задачі.

Так при $l_1 u_0 \equiv u_0 = 0$, умова $C q_1^0 = 0$ не виконується ні при яких $C \neq 0$, отже власних значень на границі не існує і множина $\lambda = 1 - 4r \sin^2 \frac{\alpha}{2}$, $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ містить усі власні числа.

Умова $l_1 u_0 \equiv u_1 - u_0 = 0$ приводить до рівняння

$$C q_1^1 - C q_1^0 = C(q_1 - 1) = 0.$$

Оскільки $q_1 \neq 1$, то при $C \neq 0$ власних чисел немає.

Якщо ж, наприклад, $l_1 u_0 \equiv 2u_1 - u_0 = 0$, то умова

$$2C q_1^1 - C q_1^0 = C(2q_1 - 1) = 0$$

виконується при $q_1 = 1/2$. Використовуючи рівняння

$$q^2 + \left(\frac{-2r + 1 - \lambda}{r} \right) q + 1 = 0,$$

знаходимо

$$\lambda = 1 + r(q_1 - 2 + 1/q_1) = 1 + r/2.$$

Це і є єдине власне значення різницевої задачі. Воно лежить поза одиничним кругом.

Аналогічно, використовуючи граничну умову

$$l_2 u_M = 0 \text{ при } u_i = Cq_2^i(\lambda),$$

знаходимо власні значення третьої різницевої задачі.

Рекомендована література

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М. "Мир" 1980. с-616.
2. Андерсон Д., Танненхилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. т 1, т 2, М. "Мир" ,1990
3. Самарський А.А. Теория разностных схем. М.: "Наука" –1983 –616с.
4. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Методи Фур'є та першого диференціального наближення в теорії різницевих схем. – ВПЦ "Київський університет", 2005 –84 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. –М.: "Мир" 1972 – 418 с.
6. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – "Мир"
7. Годунов С.К., Рябенский В.С. Разностные схемы.– М.: "Наука" –1977 – 440с.
8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.:Наука, 1989. 384 с.
9. Самарський А.А., Вабищевич П.Н Численные методы решения задач конвекции – диффузии. – Эдитиал УРСС, М., 1999.– 248 с..
10. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І., Молодцов О.І. Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки. –К.: ІЗМН 1997.–224с
11. Шокин Ю.И. Метод дифференциальных приближений. Новосибирск: Наука, 1979 - 219

Додаткова література

12. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы газовой динамики. - М.,: Наука, 1980. - 352 с.
13. Kreiss Н.О. On difference approximations of the dissipativ type for hyperbolic difference equations // Comm. Pure Appl. Math. – 1964. – 17. - P. 355.