Лекція 4. Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі. – 2 **год.**
[4:стор.26-30, 5:174-185]

Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі. Методи дослідження. Особливості подання початкових умов. Зведення їх до двошарових.

Багатошарові чисельні моделі

Нехай крайова задача

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial t} = A\vec{\mathrm{u}}\,; \quad \vec{\mathrm{u}}=\vec{\mathrm{u}}(\mathrm{t}),\ t>0 \qquad (1)$$

апроксимується за допомогою $(q+1)$– шарової різницевої схеми

$$B_q\vec{\mathrm{u}}^{n+q} + B_{q-1}\vec{\mathrm{u}}^{n+q-1} + \ldots + B_0\vec{\mathrm{u}}^{n} = 0\,, \qquad (2)$$

де $B_q,\ldots,B_0$ – скінченно–різницеві оператори, а $\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n}}$ – деяка апроксимація $\vec{\mathrm{u}}(\mathrm{n}\Delta\mathrm{t})$. Припустимо, що рівняння (2) разом з відповідними граничними умовами має єдиний розв’язок відносно $\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n+q}}$, залежний від $\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n+q-1}},\ldots,\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n}}$. Запишемо еквівалентне до (2) рівняння

$$\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n+q}} = C_{q-1}\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n+q-1}} + \ldots + C_0\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n}}\,, \qquad (3)$$

де $C_i = C_i(\Delta t) = B_q^{-1}B_i;\ i=\overline{1,q-1}$ – лінійні обмежені оператори, а Δx_j є заданими функціями від Δt .

Уведемо нові залежні змінні: $\vec{\mathrm{v}}^{n} = \vec{\mathrm{u}}^{n-1}$, $\vec{\mathrm{w}}^{n} = \vec{\mathrm{v}}^{n-1}$ і так далі, тоді рівняння (3) замінено системою

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{u}}^{n+1} &= C_{q-1}\vec{\mathrm{u}}^{n} + C_{q-2}\vec{\mathrm{v}}^{n} + C_{q-3}\vec{\mathrm{w}}^{n} + \ldots, \\ \vec{\mathrm{v}}^{n+1} &= \vec{\mathrm{u}}^{n}, \\ \vec{\mathrm{w}}^{n+1} &= \vec{\mathrm{v}}^{n}, \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (4)$$

Якщо $\tilde{\mathbf{B}}$ це простір, елементами якого є q – вимірні вектор – стовпчики $\vec{\tilde{\phi}} = \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n+q-1}} \\ \vdots \\ \vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n}} \end{bmatrix}$, з нормою введеною, наприклад, так

$\left\| \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{u}} \\ \vec{\mathrm{v}} \\ \vdots \end{bmatrix} \right\| = \left(\|\vec{\mathrm{u}}\|^2 + \|\vec{\mathrm{v}}\|^2 + \cdots \right)^{\frac{1}{2}}$ і якщо покласти

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{q-1} & C_{q-2} & \cdots & C_1 & C_0 \\ E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \end{pmatrix},$$

де E – тотожний оператор, то рівняння (4) можна записати так

$$\vec{\tilde{\phi}}^{n+1} = \tilde{C}(\Delta t)\vec{\tilde{\phi}}^{n}, \text{ де } \vec{\tilde{\phi}}^{n} = \left[\vec{\mathrm{u}}^{n+q}, \ldots \vec{\mathrm{u}}^{n}\right]^{T}. (5)$$

Тут $\tilde{C}$ – матриця, яка відповідає системі (4).

Тобто $(q+1)$–шарова різницева задача (3) зводиться до системи двошарових схем.

Проблема постановки початкових умов для багатошарових різницевих схем

Початкові дані для диференціальної задачі задаються в момент часу t_0, а дані для різницевої задачі в точках сітки повинні бути визначені через початкові дані за допомогою апроксимації, яка дозволяє починати обчислення розв'язку за рівнянням (3). Припустимо, що значення $\vec{\tilde{\phi}}$ обчислені точно, тобто

$$\vec{\tilde{\phi}} = \begin{bmatrix} E\left(\left(q-1\right)\Delta t\right)\vec{\mathrm{u}}^{0} \\ E\left(\left(q-2\right)\Delta t\right)\vec{\mathrm{u}}^{0} \\ \vdots \\ \vec{\mathrm{u}}^{0} \end{bmatrix},$$

де $\vec{\mathrm{u}}^{0} \in \mathbf{B}$, а $E(t)$ – розв'язуючий оператор для (1). Тоді

$$\vec{\tilde{\phi}} = \tilde{S}\ \tilde{\vec{\mathrm{u}}}^{0},$$

$$\tilde{\vec{\mathrm{u}}}^{0} = \begin{bmatrix} \vec{\mathrm{u}}^{0} \\ \vec{\mathrm{u}}^{0} \\ \vdots \\ \vec{\mathrm{u}}^{0} \end{bmatrix}; \tilde{S} = \begin{pmatrix} E\left(\left(q-1\right)\Delta t\right) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E\left(\left(q-2\right)\Delta t\right) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E \end{pmatrix}$$

– діагональна матриця.

Отже, наближений розв'язок крайової задачі (1) визначається формулою

$$\vec{\tilde{\phi}} = \tilde{C}(\Delta t)\tilde{S}\ \tilde{\vec{\mathrm{u}}}^{0},$$

яка є апроксимацією виразу

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{u}}\left(\left(\mathrm{n+q-1}\right)\Delta \mathrm{t}\right) \\ \vec{\mathrm{u}}\left(\left(\mathrm{n+q-2}\right)\Delta \mathrm{t}\right) \\ \vdots \\ \vec{\mathrm{u}}\left(\mathrm{n}\Delta \mathrm{t}\right) \end{bmatrix} = E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{\mathrm{u}}}^{0}.$$

Порівняємо $\tilde{C}(\Delta t)^{n}\tilde{S}\tilde{\vec{\mathrm{u}}}^{0}$ з $E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{\mathrm{u}}}^{0}$. При $\Delta t \to 0$ приходимо до підпростору $\tilde{\mathbf{B}}^{0}$ простору $\tilde{\mathbf{B}}$, елементами якого є вектори, всі q компонент яких рівні між собою. Тоді

$$\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{u}}(\mathrm{t}) \\ \vec{\mathrm{u}}(\mathrm{t}) \\ \vdots \\ \vec{\mathrm{u}}(\mathrm{t}) \end{bmatrix} = E(t)\begin{bmatrix} \vec{\mathrm{u}}^{0} \\ \vec{\mathrm{u}}^{0} \\ \vdots \\ \vec{\mathrm{u}}^{0} \end{bmatrix}.$$

До цієї ж границі прямує і $E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$ при $\Delta t \to 0 \left(\tilde{S} \to E\right)$. Елементи $\vec{u}(t)$ і $\vec{u}^0$ належать простору $\mathbf{B}^0$, але їх апроксимації – ні, вони лежать поза цим простором. При практичних обчисленнях, початкові значення отримуємо не з допомогою обчислення $\vec{\tilde{\phi}}^0 = \tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$, а з допомогою апроксимації $\vec{\tilde{\phi}}^0 = \vec{\psi}$. Для того, щоб наближене значення розв'язку $\tilde{\vec{u}}^n$ збігалось до точного розв'язку, необхідно, щоб $\vec{u}^n \to \vec{u}(t)$, а $\vec{\tilde{\phi}}^0 = \vec{\psi} \to \vec{u}(0)$ при $\Delta t \to 0$ незалежно одне від одного.

Властивості багатошарових різницевих схем

Багатошарову різницеву схему (5) називають *стійкою*, якщо для деякого додатного τ при $0 < \Delta t < \tau$ і $0 \le n\Delta t \le T$ сімейство операторів $\tilde{C}^n(\Delta t)$ з (5) рівномірно обмежене $\forall n$.

Важливу роль відіграють *умови узгодженості*, які полягають в тому, що існує щільна в просторі $\mathbf{B}$ множина U^0 можливих початкових елементів для точних розв'язків така, що якщо $\vec{u}^0 \in U^0$ та для $\forall \ \varepsilon > 0$ існує достатньо мале Δt:

$$\left\| \left(\tilde{C}(\Delta t) - E(\Delta t)\tilde{S} \right) \tilde{\vec{u}}(t) \right\| < \varepsilon \Delta t \qquad (6)$$

для $0 \le t \le T$, де

$$\tilde{\vec{u}} = \begin{bmatrix} E(t)\vec{u}^0 \\ \vdots \\ E(t)\vec{u}^0 \end{bmatrix}.$$

Апроксимація є *збіжною*, якщо для довільних послідовностей $\Delta_j t$ і n_j, таких що $\Delta_j t > 0$ і $n_j \Delta_j t \to t$ при $j \to \infty$, $(0 \le t \le T)$ та $\forall\ \tilde{\vec{u}} \in \tilde{\mathbf{B}}^0$ буде $\lim\limits_{\substack{j\to\infty \\ \vec{\psi}\to\vec{u}^0}} \left\| \tilde{C}(\Delta_j t)^{n_j} \vec{\psi} - E(t)\tilde{\vec{u}}(t) \right\| = 0.$ Порядок і похибка апроксимації багатошарових різницевих схем визначається звичайним чином.

Мають місце такі твердження [5].

1. Якщо різницева схема стійка і її похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta\ t \to 0$, то умова узгодженості для цієї різницевої схеми виконується.

2. Для коректно поставленої крайової задачі і її багатошарової апроксимації, яка задовольняє умови узгодженості, стійкість є необхідною і достатньою умовою збіжності.

Узгодженість і порядок точності

При дослідженні узгодженості і точності різницевих схем бажано різницеві рівняння подати їх у формі

$$B_q\vec{u}^{n+q} + B_{q-1}\vec{u}^{n+q-1} + \ldots + B_0\vec{u}^{n} = 0,$$

де рівняння не розв'язане відносно $\vec{u}^{n+q}$. Невизначеність внаслідок множення зліва на довільну не вироджену матрицю знімається тим припущенням, що для довільної достатньо гладкої функції $u(t)$ різницевий оператор в лівій частині апроксимує оператор $\partial/\partial t - A$, тобто

$$B_q u(t+q\Delta t) + \ldots + B_0 u(t) - \left(\partial/\partial t - A\right)u(t) = o(1)$$

при $\Delta t \to 0$.

Порядок точності різницевої схеми визначимо як найбільше дійсне число ρ, для якого

$$\left\| B_q u(t+q\Delta t) + \ldots + B_0 u(t) \right\| = o\left[(\Delta t)^{\rho}\right] \text{ при } \Delta t \to 0 \qquad (7)$$

для всіх достатньо гладких точних розв'язків диференціального рівняння $\partial u/\partial t = Au$. Вираз у лівій частині (7) є похибкою апроксимації багатошарової різницевої схеми.

Встановимо зв'язок між узгодженістю та порядком точності різницевих схем. Для цього повернемось до рівняння (2) з сталими коефіцієнтами і умові періодичності розв'язку. Розв'язок задачі виразимо через оператори $C_j = -B_q^{-1}B_j$.

Теорема. Якщо різницева схема стійка і похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta t \to 0$, то умова узгодженості (6) виконується.

Доведення.

Виходячи з обмеженості операторів $C_1, \ldots C_{q-1}$ та з того, що виконується умова (7), можна показати, що $\left\| B_q^{-1} \right\| = O(\Delta t)$.

Отже у вектора $\tilde{C}(\Delta t)\tilde{S}\tilde{u}(t)$ відмінною від нуля є тільки перша компонента і нам потрібно показати, що при довільному $\varepsilon > 0$

$$\left\| \left[C_{q-1}E((q-1)\Delta t) + \ldots + C_0 - E(q\Delta t) \right] u_0(t) \right\| < \varepsilon \Delta t$$

для довільного елемента $u(0)$ з деякої щільної в B множини U^0 і для всіх достатньо малих Δt.

Нехай B_m підпростір тригонометричних поліномів степеня m з гільбертового простору B періодичних функцій, а u_0 презентує деяку функцію $u_0(\vec{x})$ з B_m. Якщо в рівності (7) покласти $u(t) = tu_0$, то

$$Lu_0 = o(1) \text{ при } \Delta t \to 0, \qquad (8)$$

де

$$L = \Delta t\left(qB_q + (q-1)B_{q-1} + \ldots + B_1\right) - E. \qquad (9)$$

Оскільки B_m має скінчений базис, кожен елемент якого задовольняє співвідношення (8), то для норми оператора L в просторі B_m маємо $\|L\|_m < \varepsilon_1$ для достатньо малих Δt, де ε_1 – довільне додатне число. Тому оператор $E + L$ має обернений в цьому просторі, а саме

$$\left(E+L\right)^{-1}=E+M\ ,$$

де

$$\left\|M\right\|_m<\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}.$$

Таким чином

$$\left[qB_q+\ldots+B_1\right]^{-1}=\Delta t\left(E+M\right)\ .$$

За визначенням $C_j=-B_q^{-1}B_j$, тому випливає, що

$$B_q^{-1}=\left[qE-(q-1)C_{q-1}-\ldots-C_1\right]\Delta t\left(E+M\right). \qquad (10)$$

Якщо $u_0\in B_m$, а A – диференціальний оператор рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au$$

із сталими коефіцієнтами, то $u(t)\in B_m$. Крім того, для цього розв’язку буде $\partial u/\partial t-Au=0$, оскільки в силу (7)

$$\left\|\left[B_qE(q\Delta t)+B_{q-1}E((q-1)\Delta t)+\ldots+B_0\right]u(t)\right\|<\varepsilon_0 \qquad (11)$$

для довільного $\varepsilon_0>0$ та для всіх достатньо малих Δt.

Помноживши (10) на (11), одержимо

$$\left\|\left[E(q\Delta t)+C_{q-1}E((q-1)\Delta t)+\ldots+C_0\right]u(t)\right\|<\varepsilon_3\Delta t\ , \qquad (12)$$

де

$$\varepsilon_3=\left\{\max_{0<\Delta t<\tau}\left\|qE-(q-1)C_{q-1}-\ldots-C_0\right\|\right\}\varepsilon_0\left\|I+M\right\|_m.$$

Максимум, який входить в останню рівність існує, оскільки ми припустили, що різницеві рівняння стійкі. Звідси витікає, що оператори $C_{q-1}(\Delta t)$, $\ldots C_1(\Delta t)$ рівномірно обмежені при $0<\Delta t<\tau$.

Нерівність виду (12) має місце для довільного розв’язку, який належить B_m. Якщо розглянути всі можливі підпростори B_m з простору B, то можливі початкові елементи $u(0)$ для цих розв’язків утворять щільну множину в B. Теорему доведено.

Завдання для самостійної роботи. (2 год.)

Побудувати та дослідити тришарові явні та неявні різницеві схеми для рівнянь параболічного та гіперболічного типів другого порядку. [1,4]

Рекомендована література

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М. “Мир” 1980. с-616.
2. Андерсон Д., Танненхилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. т 1, т 2, М. “Мир” ,1990
3. Самарський А.А. Теория разностных схем. М.:”Наука” –1983 –616с.
4. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Методи Фур’є та першого диференціального наближення в теорії різницевих схем. – ВПЦ ”Київський університет”, 2005

–84 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. –М.: “Мир” 1972 – 418 с.