

**Лекція 2.** Методи апроксимації диференціальних операторів. Основні властивості різницевих схем.– 2 год. [1:стор.39-58, 3: стор. 60-78]

*Методи апроксимації диференціальних операторів: використання формули Тейлора, застосування інтерполяційних многочленів, інтегро-інтерполяційний метод та метод контрольного об'єму. Основні властивості різницевих схем: консервативність, транспортність.*

### Деякі основні скінчено-різницеві формули Розкладання в ряди Тейлора

Основні скінченно-різницеві формули для частинних похідних можуть бути отримані за допомогою розкладання в ряди Тейлора. Використана прямокутна сітка показана на мал. 3.1. Нижні індекси  $i$  й  $j$  ставляться до  $x$  та  $y$ , а верхній

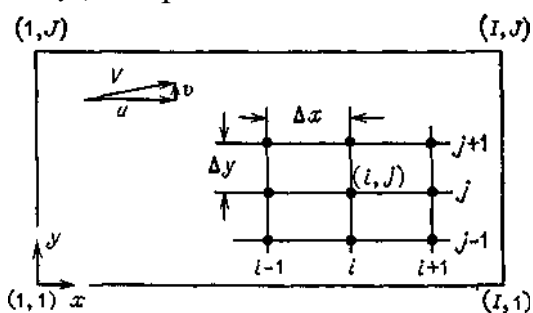


Рис. 3.1. Прямокутна скінчено-різницева сітка.

індекс  $n$  відповідає часовому шару. Кроки сітки в напрямках  $i$  і  $j$  позначаються через  $\Delta x$  і  $\Delta y$  відповідно. (Для простоти  $\Delta x$  й  $\Delta y$  вважаються постійними.)  $f$  - деяка функція.

Форми односторонніх різницевих виразів для першої похідної  $\partial f / \partial x$  можна вивести в такий спосіб. Ми припускаємо неперервність похідних і розкладаємо  $f$  в ряд Тейлора в околі точки  $(i, j)$ . Верхній індекс (часовий) для простоти опускаємо. Тоді

$$f_{i+1, j} = f_{i, j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i, j} (x_{i+1, j} - x_{i, j}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i, j} (x_{i+1, j} - x_{i, j})^2 + \dots =$$

$$= f_{i, j} + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i, j} \Delta x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i, j} \Delta x^2 + \text{ЧВП}, \quad (3.1)$$

де скорочення ЧВП означає члени вищих порядків.

Розв'язуючи (3.1) відносно  $\partial f / \partial x$ , одержуємо

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i, j} = \frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{\Delta x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \Big|_{i, j} \Delta x + \text{ЧВП},$$

або

$$\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{i, j} = \frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{\Delta x} + O(\Delta x), \quad (3.2)$$

Позначимо скінчено-різницевий аналог  $\partial f / \partial x$  через  $\delta f / \delta x$ . Тоді для  $\delta f / \delta x$  при різницевій апроксимації вперед одержуємо вираз

$$\frac{\delta f}{\delta x} \Big|_{i, j} = \frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{\Delta x} \quad (3.3)$$

з похибкою апроксимації порядку  $\Delta x$ , тобто з першим порядком точності.

Розкладаючи  $f_{i-1,j}$  в околі точки  $(i, j)$ , одержуємо для  $\delta f / \delta x$  вираз при різницевій апроксимації назад:

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i,j} - f_{i-1,j}}{\Delta x}, \quad (3.4)$$

яке також має перший порядок точності. Центральна (симетрична) різницева апроксимація  $\delta f / \delta x$  виходить як різниця розкладів

$$f_{i+1,j} = f_{i,j} + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 + O(\Delta x^5)$$

и

$$f_{i-1,j} = f_{i,j} - \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 - \left. \frac{1}{6} \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \frac{1}{24} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 + O(\Delta x^5). \quad (3.6)$$

Віднімаючи (3.6) з (3.5), одержуємо

$$f_{i+1,j} - f_{i-1,j} = 2 \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{i,j} \Delta x + \frac{1}{3} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^3 + \text{ЧВП.}$$

Розв'язуючи відносно  $\delta f / \delta x$ , маємо

$$\begin{aligned} \left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta x} - \frac{1}{6} \left. \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \text{ЧВП} = \\ &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta x} + O(\Delta x^2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким чином, центральна різницева апроксимація дає вираз

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} - f_{i-1,j}}{2 \Delta x} \quad (3.8)$$

с похибкою апроксимації порядку  $\Delta x^2$ , тобто із другим порядком точності. Аналогічно можна одержати вирази для похідних по  $y$  й  $t$  наприклад, центрально-різницевий аналог  $\delta f / \delta t$  має вигляд

$$\left. \frac{\delta f}{\delta t} \right|_{i,j}^n = \frac{f_{i,j}^{n+1} - f_{i,j}^{n-1}}{2 \Delta t}. \quad (3.9)$$

Виведемо тепер центрально-різницевий аналог  $\delta^2 f / \delta x^2$ . Складаючи (3.5) і (3.6), маємо

$$f_{i+1,j} + f_{i-1,j} = 2f_{i,j} + \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} \Delta x^2 + \frac{1}{12} \left. \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} \right|_{i,j} \Delta x^4 + \text{ЧВП.} \quad (3.10)$$

Розв'язуючи (3.6) відносно  $\delta^2 f / \delta x^2$ , одержуємо

$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (3.11)$$

З (3.11) для  $\delta^2 f / \delta x^2$  маємо

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_{i,j} = \frac{f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 2f_{i,j}}{\Delta x^2} \quad (3.12)$$

із другим порядком точності.

Вірні формули [Д/З довести апроксимацію, визначити порядок]

$$\left. \frac{\delta g}{\delta x} \right|_{i,j} = \frac{g_{i+1/2,j} - g_{i-1/2,j}}{\Delta x}, \quad (3.13)$$

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x \delta y} = \frac{f_{i+1, j+1} - f_{i+1, j-1} - f_{i-1, j+1} + f_{i-1, j-1}}{4 \Delta x \Delta y}. \quad (3.14)$$

Помітимо, що  $\partial^2 f / \partial x \partial y$ , що визначений формулою (3.14), задовольняє правило для неперервних функцій  $\partial^2 f / \partial x \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$ . Завжди бажано, щоб за інших рівних умов наші скінчено-різницеві рівняння добре моделювали якісну поведінку диференціальних рівнянь. Комбінації отриманих скінчено-різницевих виразів для частинних похідних можна використовувати для написання скінченно-різницевих формул диференціальних рівнянь у частинних похідних. Наприклад, рівняння

Лапласа  $\nabla^2 f = \partial^2 f / \partial x^2 + \partial^2 f / \partial y^2 = 0$  буде мати різницевий аналог

$$\frac{\delta^2 f}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 f}{\delta y^2} = \frac{f_{i+1, j} + f_{i-1, j} - 2f_{i, j}}{\Delta x^2} + \frac{f_{i, j+1} + f_{i, j-1} - 2f_{i, j}}{\Delta y^2} = 0,$$

або

$$f_{i+1, j} + f_{i-1, j} + \beta^2 (f_{i, j+1} + f_{i, j-1}) - 2(1 + \beta^2) f_{i, j} = 0, \quad (3.15)$$

де  $\beta$  — відношення розмірів кроків,  $\beta = \Delta x / \Delta y$ . Це так званий п'ятиточковий аналог рівняння Лапласа. При  $\beta = 1$  виходить відоме рівняння

$$f_{i, j} = \frac{1}{4} (f_{i+1, j} + f_{i-1, j} + f_{i, j+1} + f_{i, j-1}), \quad (3.16)$$

яке означає, що  $f_{i, j}$  є середнім значенням  $f$  у чотирьох сусідніх точках. Ці формули схематично зображені на мал. 3.2.

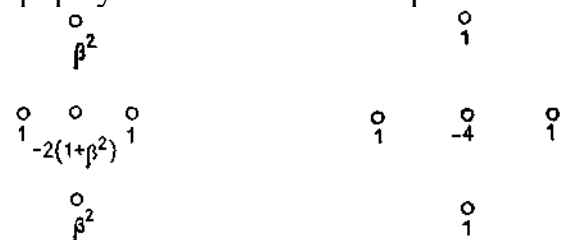


Рис. 3.2. Схематичне представлення п'ятиточкового аналога рівняння Лапласа;  $\beta = \Delta x / \Delta y$ .

Схема ліворуч відповідає довільному значенню  $\beta$ , праворуч -  $\beta = 1$ .

Використовуючи для апроксимації просторових похідних і похідної за часом різницеві вирази другого порядку точності, лінійне модельне рівняння (2.18) можна записати у вигляді

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^{n-1}}{2\Delta t} = -\alpha \frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2}, \quad (3.17)$$

що дозволяє явно виразити  $\zeta_i^{n+1}$  через значення змінних на попередніх часових шарах. Однак така схема в дійсності виявляється неприйнятною. Для всіх  $\alpha > 0$  і всіх можливих  $\Delta t > 0$  ця схема чисельно нестійка, тобто приводить до виникнення хаотичних розв'язків, що не мають відношення до розв'язку диференціального рівняння. Така поведінка підкреслює відмінність між точними скінчено-різницевиими аналогами для похідних і точним аналогом диференціального рівняння.

Якщо замість центральних різниць у нестационарному члені використовувати

різниці вперед за часом, то вийде різницевий аналог лінійного модельного рівняння, що має другий порядок точності по просторовій змінній і лише перший за часом 
$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2\Delta x} + \alpha \frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2}. \quad (3.18)$$

Цю схему з однобічними різницями вперед за часом і центральними (симетричними) різницями по просторовій змінній іноді називають схемою ВЧЦП (схемою FTCS – Forward-Time Central-Space).

Надалі буде показано, що ця схема стійка (принаймні при деяких умовах, накладених на  $\Delta t$ ,  $u$ ,  $\alpha$  і  $\Delta x$ ). Але перш ніж приступити до дослідження стійкості, розглянемо деякі інші питання, пов'язані з скінчено-різницевиими рівняннями.

### Поліноміальна апроксимація

Інший метод одержання скінчено-різницевих виразів заснований на застосуванні апроксимуючої аналітичної функції з вільними параметрами, яка будується за значеннями  $u$  у вузлах сітки й потім аналітично диференціюється. Це звичайний метод знаходження похідних за експериментальними даними. В ідеалі вид апроксимуючої функції повинен визначатися наближеним аналітичним розв'язком, однак звичайно в якості апроксимуючих функцій використовуються поліноми. Ми продемонструємо даний метод на прикладі параболічної апроксимації.

Припустимо, що значення функції  $f$  задані в точках  $i-1$ ,  $i$  та  $i+1$ , і проведемо параболічну апроксимацію функції

$$f(x) = a + bx + cx^2, \quad (3.19)$$

причому для зручності за початок координат ( $x = 0$ ) приймемо точку  $i$ . Тоді рівняння (3.19), записане в точках  $i-1$ ,  $i$  і  $i+1$  відповідно, дасть

$$f_{i-1} = a - b\Delta x + c\Delta x^2, \quad f_i = a, \quad f_{i+1} = a + b\Delta x + c\Delta x^2. \quad (3.20)$$

Складаючи першу й останню із цих рівностей, одержуємо

$$c = \frac{f_{i+1} + f_{i-1} - 2f_i}{2\Delta x^2}, \quad (3.21)$$

а розв'язуючи їх відносно  $b$ , знаходимо

$$b = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2\Delta x}. \quad (3.22)$$

У точці  $i$  значення першої похідної (3.19) буде

$$\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_i = [b + 2cx]_{x=0} = b, \quad (3.23)$$

а значення другої похідної

$$\left. \frac{\delta^2 f}{\delta x^2} \right|_i = 2c. \quad (3.24)$$

Формули (3.23) і (3.24) з врахуванням (3.21) і (3.22) у точності збігаються з формулами (3.8) і (3.12) другого порядку із центральними різницями, отриманими розкладанням у ряд Тейлора. Якщо припустити, що  $f$  — поліном першого ступеня, тобто  $f = a + bx$ , то залежно від того, які значення використовуються для визначення  $a$  й  $b$ : значення  $f_i$  й  $f_{i+1}$  або  $f_i$  й  $f_{i-1}$  для  $\delta f / \delta x$  виходять формули з різницями вперед або назад відповідно.

Очевидно, що при лінійній апроксимації  $f$  не можна одержати вирази для  $\delta^2 f / \delta x^2$ . Однак якщо використовувати поліном першого ступеня для побудови різницевих аналогів перших похідних  $\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i+1/2}$  і  $\left. \frac{\delta f}{\delta x} \right|_{i-1/2}$ , які відповідно представляються різницями вперед та назад, то для  $\delta^2 f / \delta x^2$  вийде вираз, що збігається з виразом (3.12) із центральними різницями.

Різницеві формули для похідних більш високого порядку виводяться з використанням поліномів вищих порядків. Вирази, отримані за допомогою поліномів порядків вище другого, вже не ідентичні виразам, отриманим розкладаннями в ряди Тейлора, і в кожному випадку похибка апроксимації повинна перевірятися за допомогою розкладання в ряд Тейлора. В обчислювальній гідродинаміці метод поліноміальної апроксимації, як правило, застосовується тільки для обчислень значень похідних поблизу границь.

Тепер відзначимо недоліки поліноміальних апроксимацій вищого порядку, добре відомі фахівцям, що обробляють дані вимірів. Зі збільшенням порядку апроксимації вони стають чутливими до «шумів», тобто до більш-менш випадково розподілених малих помилок у даних. Так, поліном шостого ступеня, графік якого проходить через сім точок, точно розташованих на одній прямій, приводить до апроксимації у вигляді прямої, зображеної на мал. 3.3, а. Однак при додаванні до значень, що апроксимуються, шумових збурень коефіцієнти полінома будуть вже визначатися цими перекрученими даними, і тоді аналітичне обчислення похідних у точці  $i$  може привести до абсурдних результатів, що можна побачити на мал. 3.3, б.

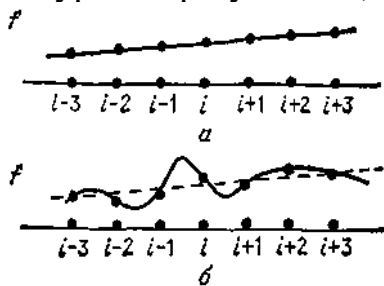


Рис. 3.3. Поліноміальна апроксимація шостого порядку,  
а — алгебраїчні ідеальні дані,  
б — дані з додаванням шумових збурень.

Квадратична апроксимація не може відобразити наявності точки перегину в розглянутих даних, тобто точки, де  $\partial^2 f / \partial x^2 = 0$ . Із цієї причини для аналізу наявних даних може бути виправдане використання поліноміальних апроксимацій третього порядку. (Часто використовуються сплайн-функції, що гарантують неперервність похідних при переході від однієї вузлової точки до іншої.) У нашому випадку рівняння, що описують розглянуте фізичне явище, не залежать від наявності точки перегину або від третьої похідної, тому немає необхідності зупинятися на цьому питанні.

## Інтегральний метод

В інтегральному методі потрібно приблизно задовольнити основним рівнянням, записаним в інтегральній, а не в диференціальній формі. Тут зручніше використовувати для просторової координати нижній індекс  $x$ , а для часу верхній індекс  $t$  замість  $i$  і  $n$  відповідно. Запишемо лінійне модельне рівняння в консервативній формі:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (3.25)$$

Проінтегруємо це рівняння за часом від  $t$  до  $t + \Delta t$  й по просторовій області  $R$  від  $x - \Delta x / 2$  до  $x + \Delta x / 2$ , як показано на мал. 3.4.

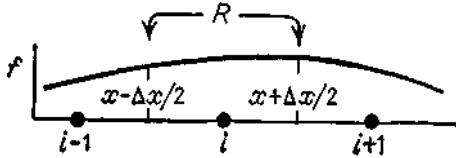


Рис. 3.4. Область інтегрування  $R$  для інтегрального методу.

Оскільки порядок інтегрування по  $t$  і  $x$  неістотний, виберемо його так, щоб можна було провести одне точне інтегрування, а саме

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \left[ \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \zeta}{\partial t} dt \right] dx = - \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} dx \right] dt + \alpha \int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} dx \right] dt. \quad (3.26)$$

Виконаємо інтегрування виразів, записаних у квадратних дужках:

$$\int_{x-\Delta x/2}^{x+\Delta x/2} [\zeta^{t+\Delta t} - \zeta^t] dx = - \int_t^{t+\Delta t} [(u\zeta)_{x+\Delta x/2} - (u\zeta)_{x-\Delta x/2}] dt + \alpha \int_t^{t+\Delta t} \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right] dt. \quad (3.27)$$

інтеграл, що залишилися, визначимо чисельно. По теоремі про середнє можна записати

$$\int_{z_1}^{z_1+\Delta z} f(z) dz \approx f(\bar{z}) \Delta z,$$

де  $\bar{z} \in [z_1, z_1 + \Delta z]$ . Збіжність гарантується при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Взявши при наближеному обчисленні інтегралів у лівій частині рівняння (3.27) середню точку  $x$ , а в правій частині значення підінтегральних функцій при нижній межі, тобто при  $t$  (формула прямокутників), одержимо

$$[\zeta_x^{t+\Delta t} - \zeta_x^t] \Delta x = - [(u\zeta)_{x+\Delta x/2}^t - (u\zeta)_{x-\Delta x/2}^t] \Delta t + \alpha \left[ \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2}^t - \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2}^t \right] \Delta t. \quad (3.28)$$

Похідні  $\partial \zeta / \partial x$  можна знайти зі співвідношення

$$\zeta_{x+\Delta x}^t = \zeta_x^t + \int_x^{x+\Delta x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_x^t dx.$$

Звідси використовуюючи теорему про середнє, одержуємо

$$\xi_{x+\Delta x}^t = \xi_x^t + \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2}^t \Delta x,$$

або

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2}^t = \frac{\xi_{x+\Delta x}^t - \xi_x^t}{\Delta x}. \quad (3.29)$$

Значення  $(u\xi)_{x+\Delta x/2}^t$  можна обчислити як середнє арифметичне:

$$(u\xi)_{x+\Delta x/2}^t = \frac{1}{2} [(u\xi)_x^t + (u\xi)_{x+\Delta x}^t]; \quad (3.30)$$

аналогічний вираз має місце й для  $(u\xi)_{x-\Delta x/2}^t$ .

Підставляючи (3.29) і (3.30) в (3.28), знаходимо

$$\begin{aligned} [\xi_x^{t+\Delta t} - \xi_x^t] \Delta x = & - \left[ \frac{1}{2} (u\xi)_x^t + \frac{1}{2} (u\xi)_{x+\Delta x}^t - \frac{1}{2} (u\xi)_x^t - \frac{1}{2} (u\xi)_{x-\Delta x}^t \right] \Delta t + \\ & + \alpha \left[ \frac{\xi_{x+\Delta x}^t - \xi_x^t}{\Delta x} - \frac{\xi_x^t - \xi_{x-\Delta x}^t}{\Delta x} \right] \Delta x. \end{aligned}$$

Розділивши останнє рівняння на  $\Delta x \Delta t$ , одержимо

$$\frac{\xi_x^{t+\Delta t} - \xi_x^t}{\Delta t} = - \frac{(u\xi)_{x+\Delta x}^t - (u\xi)_{x-\Delta x}^t}{2 \Delta x} + \alpha \frac{\xi_{x+\Delta x}^t + \xi_{x-\Delta x}^t - 2\xi_x^t}{\Delta x^2}. \quad (3.31)$$

Переходячи до індексів  $i$  і  $n$ , бачимо, що рівняння (3.31) співпадає з рівнянням (3.18), виведеним за допомогою розкладань у ряди Тейлора. Очевидно, у будь-якому методі існує велика довільність при виводі скінчено-різницевого рівнянь. Якщо, наприклад, інтегрувати за часом не від  $t$  до  $t + \Delta t$ , а від  $t - \Delta t$  до  $t + \Delta t$  й у якості середньої точки обрати  $t$ , то вийде рівняння (3.17). Як уже було відзначено вище, це рівняння безумовне нестійке.

Перевага інтегрального методу можна буде оцінити після того, як буде вивчена властивість консервативності. Відмінність між інтегральним методом і методом розкладання в ряди Тейлора найбільше чітко проявляється при використанні непрямокутних систем координат.

### Метод контрольного об'єму

Метод контрольного об'єму для виводу скінчено-різницевого рівнянь дуже схожий на інтегральний метод, але більш фізичний по суті. Цей метод найбільше яскраво висвітлює процес «чисельного моделювання». Найкращими прикладами такого підходу можуть служити широко відомий метод часток

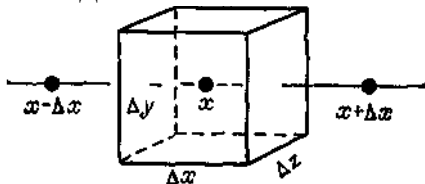


Рис. 3.б. Контрольний об'єм КО в точці  $x$ .

у гніздах (метод PIC) і метод рідини в гніздах (метод FLIC), розвинені в Лос-Аламоській лабораторії.

Виберемо в просторі контрольний об'єм із центром у точці  $x$ , як

показано на мал. 3.5. У якості значення  $\zeta$  у вузловій точці сітки будемо брати середнє значення цієї функції по контрольному об'єму (КО). Для питомої (тобто усередненої за об'ємом) величини  $\zeta$ , де  $\zeta$  можна тепер розглядати як будь-яку змінну величину, запишемо  $\zeta = \Gamma / \text{об'єм}$ .

Наприклад, якщо  $\zeta$  — щільність  $\rho$ , то  $\Gamma$  — повна маса, зосереджена в розглянутому контрольному об'ємі із центром у точці  $x$ . Якщо  $\zeta$  — вихор, то  $\Gamma$  - циркуляція. Тепер запишемо словесне формулювання наступного закону збереження:

*Повне збільшення величини  $\Gamma$  у КО = Чистий приріст  $\Gamma$  у КО за рахунок конвекції + Чистий приріст  $\Gamma$  у КО за рахунок дифузії.* (3.32)

Повне збільшення величини  $\Gamma = \zeta \times (\text{об'єм})$  у КО за проміжок часу  $\Delta t$  дорівнює

$$\xi|_x^{t+\Delta t} \times (\Delta x \Delta y \Delta z) - \xi|_x^t \times (\Delta x \Delta y \Delta z).$$

Конвективний потік величини  $\Gamma$ , що втікає в КО через ліву грань за одиницю часу, становить

$$(u\zeta)_{x-\Delta x/2} \times (\text{площа}) = (u\zeta)_{x-\Delta x/2} \times \Delta y \Delta z,$$

де  $u$  може бути змінною, а значення функцій на грані  $x - \Delta x / 2$ , які ще треба визначити, повинні бути деякими середніми за  $\Delta t$ . Виходячи із цієї величини вхідного конвективного потоку за одиницю часу, повний конвективний потік величини  $\Gamma$  у КО за проміжок часу  $\Delta t$  через грань  $x - \Delta x / 2$  можна записати так:

$$(u\zeta)_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Аналогічно, повний конвективний потік  $\Gamma$ , що виходить з КО через  $x + \Delta x / 2$ , буде рівний

$$(u\zeta)_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z \Delta t,$$

а чистий приріст  $\Gamma$  у КО виходить як різниця сумарного потоку, що втікає, і сумарного потоку, що витікає, тобто

$$[(u\zeta)_{x-\Delta x/2} - (u\zeta)_{x+\Delta x/2}] \Delta y \Delta z \Delta t.$$

Щоб обчислити потік у КО за рахунок дифузії, скористаємось законом Фіка, який стверджує, що дифузійний потік  $q$  величини  $\zeta$  за одиницю часу пропорційний градієнту  $\zeta$ :

$$q = -a \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Тут мінус указує на те, що збільшення  $\zeta$  в напрямку  $x$  викликає дифузію в протилежному напрямку.

Дифузійний потік, що втікає в КО через ліву грань за одиницю часу, рівний

$$q \Big|_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \Delta y \Delta z,$$

а, що впливає з КО через праву грань за одиницю часу становить

$$q \Big|_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z = -\alpha \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} \Delta y \Delta z.$$

Тут знову значення на гранях  $x \pm \Delta x / 2$  становить собою деякі середні за час  $\Delta t$ , які ще повинні бути визначені. Величина потоку в КО за рахунок дифузії за проміжок часу  $\Delta t$  рівна

$$\alpha \Delta y \Delta z \Delta t \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right].$$

(3.32) можна переписати

$$\xi \Big|_x^{t+\Delta t} \Delta x \Delta y \Delta z - \xi \Big|_x^t \Delta x \Delta y \Delta z = (u \xi \Big|_{x-\Delta x/2} - u \xi \Big|_{x+\Delta x/2}) \Delta y \Delta z \Delta t + \alpha \Delta y \Delta z \Delta t \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right]. \quad (3.33)$$

Розділивши на  $\Delta x \Delta y \Delta z \Delta t$ , одержимо

$$\frac{1}{\Delta t} [\xi \Big|_x^{t+\Delta t} - \xi \Big|_x^t] = \frac{1}{\Delta x} [u \xi \Big|_{x-\Delta x/2} - u \xi \Big|_{x+\Delta x/2}] + \frac{\alpha}{\Delta x} \left[ \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x+\Delta x/2} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x-\Delta x/2} \right]. \quad (3.34)$$

Як і в інтегральному методі, при подальшому виводі скінчено-різницевого виразів з'являється деяка свобода дій при визначенні значень функцій на границях об'єму. У якості значень на границі об'єму можна обрати середнє арифметичне значення в сусідніх вузлах у момент часу  $n$ ; тоді

$$(u \xi)_{x \pm \Delta x/2} = \frac{1}{2} [(u \xi)_{x \pm \Delta x}^n + (u \xi)_x^n]$$

і градієнти

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \Big|_{x \pm \Delta x/2} = \frac{\delta \xi}{\delta x} \Big|_{x \pm \Delta x/2}^n$$

можна обчислити за допомогою центральних різниць:

$$\frac{\delta \xi}{\delta x} \Big|_{x+\Delta x/2}^n = \frac{\xi \Big|_{x+\Delta x}^n - \xi \Big|_x^n}{\Delta x}.$$

У результаті рівняння (3.34) прийме вигляд

$$\frac{1}{\Delta t} [\xi \Big|_x^{t+\Delta t} - \xi \Big|_x^t] = \frac{1}{\Delta x} \left\{ \frac{1}{2} [(u \xi)_x^t + (u \xi)_{x-\Delta x}^t] - \frac{1}{2} [(u \xi)_x^t + (u \xi)_{x+\Delta x}^t] \right\} + \frac{\alpha}{\Delta x} \left[ \frac{1}{\Delta x} (\xi \Big|_{x+\Delta x}^t - \xi \Big|_x^t) - \frac{1}{\Delta x} (\xi \Big|_x^t - \xi \Big|_{x-\Delta x}^t) \right],$$

або

$$\frac{\xi \Big|_x^{t+\Delta t} - \xi \Big|_x^t}{\Delta t} = - \frac{(u \xi)_{x+\Delta x}^t - (u \xi)_{x-\Delta x}^t}{2 \Delta x} + \alpha \frac{\xi \Big|_{x+\Delta x}^t + \xi \Big|_{x-\Delta x}^t - 2 \xi \Big|_x^t}{\Delta x^2}. \quad (3.35)$$

Якщо повернутися до індексів  $i$  та  $n$ , то це рівняння збіжиться з отриманим раніше рівнянням (3.18).

У такий спосіб видно, що всі чотири методи виводу скінченно-різницевого аналогів диференціальних рівнянь у частинних похідних — розкладання в ряд Тейлора, метод поліноміальної апроксимації, інтегральний метод і метод контрольного об'єму — можуть привести до однакових різницевого виразів. Це обнадіює й зміцнює довіру до всіх цих методів. Але в

кожному з них є деяка свобода дій, так що вибір методу для виводу скінченно-різницевого аналога диференціального рівняння визначає цей аналог не єдиним способом. Насправді, існує багато аналогів. Незважаючи на те що більшість із них різняться у незначних деталях, вони можуть сильно відрізнятись по своїй поведінці. Одним з дивних аспектів обчислювальної гідродинаміки є наявність великої кількості правдоподібних схем, які, однак, не працюють, як, наприклад, було зазначено для рівняння (3.17). Це справедливо як для основних (тобто призначених для розрахунків внутрішніх точок) різницевих схем, так і для схем, призначених для розрахунків граничних точок.

Перевага цього методу полягає в тому, що він заснований на макроскопічних фізичних законах, а не на використанні математичного апарата неперервних функцій. Особливо важливим це виявляється в тих випадках, коли мають справу з розрідженими газами або із динамікою нев'язкого газу з ударними хвилями. У цих випадках диференціальні рівняння не мають усюди неперервних розв'язків, які можна було б у кожній точці представити рядами Тейлора. Однак маса, наприклад, все-таки зберігається, і конвективна частина рівняння (3.35) як і раніше залишається справедливою. Але навіть і в тих випадках, коли неперервні розв'язки існують, у методі контрольного об'єму увага зосереджується на фактичному виконанні фізичних законів макроскопічно, а не тільки при  $\Delta x$  і  $\Delta t$ , що прямують до нуля. Це лежить в основі поняття консервативності скінченно-різницевого методу, до обговорення якого ми переходимо.

### Властивість консервативності [Роуч, стор.51-58]

Скінченно-різницевий метод є *консервативним*, якщо він забезпечує виконання певних інтегральних законів збереження, справедливих для вихідних диференціальних рівнянь.

Розглянемо рівняння переносу вихору (2.12)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta) + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 \zeta,$$

поклавши  $1/\text{Re} = \alpha$ ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta) + \alpha \nabla^2 \zeta. \quad (3.36)$$

Проінтегруємо це рівняння по деякій просторовій області  $R$ :

$$\int_R \frac{\partial \zeta}{\partial t} dR = - \int_R \nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta) dR + \int_R \alpha \nabla^2 \zeta dR. \quad (3.37)$$

Тому що  $t$  не залежить від просторових змінних, маємо

$$\int_R \frac{\partial \zeta}{\partial t} dR = \frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR \quad (3.38)$$

Використовуючи формулу Остроградського — Гауса, одержуємо

$$\int_R \nabla \cdot (\mathbf{V}\zeta) dR = \int_{\partial R} (\mathbf{V}\zeta) \cdot \mathbf{n} ds, \quad (3.39)$$

де  $\partial R$  — границя  $R$ ,  $\mathbf{n}$  — одиничний вектор нормалі до поверхні (додатний напрямок відповідає зовнішній нормалі) і  $ds$  — диференціал довжини дуги границі  $\partial R$ . Аналогічно, по тій самій формулі

$$\int_R \alpha \nabla^2 \zeta dR = \alpha \int_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.40)$$

Тоді рівняння (3.37) набуде вигляду

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR = - \int_{\partial R} (\mathbf{V} \zeta) \cdot \mathbf{n} ds + \alpha \int_{\partial R} (\nabla \zeta) \cdot \mathbf{n} ds. \quad (3.41)$$

Рівняння (3.41) констатує, що швидкість накопичення величини  $\zeta$  в області  $R$  дорівнює сумі конвективного й дифузійного притоків величини  $\zeta$  в  $R$  через  $\partial R$  за одиницю часу). Вимога консервативності полягає в тотожному збереженні в скінченно-різницевій схемі цього інтегрального співвідношення.

Розглянемо одновірне модельне рівняння для граничного випадку нев'язкої рідини ( $\alpha = 0$ ), яке виходить із рівняння (3.36) і має вигляд

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial (u \zeta)}{\partial x} \quad (3.42)$$

(Якщо, з іншого боку, величину  $\zeta$  трактувати як масову густину, то рівняння (3.42) буде рівнянням нерозривності для стислого середовища.) Використовуючи різниці вперед за часом і центральні різниці по просторовій змінній, можна записати скінченно-різницевий аналог рівняння (3.42) у вигляді

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = - \frac{u_{i+1} \zeta_{i+1} - u_{i-1} \zeta_{i-1}}{2 \Delta x}$$

(тут для простоти верхній індекс  $n$  опущений). Розглянемо тепер одновірну

область  $R$  (причому  $i$  змінюється від  $I_1$  до  $I_2$ ) і обчислимо суму  $\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i \Delta x$ ,

відповідну до інтеграла  $\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR$  в рівнянні (3.41):

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^{I_2} \left( - \frac{u_{i+1} \zeta_{i+1} - u_{i-1} \zeta_{i-1}}{2 \Delta x} \right) \Delta x = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=I_1}^{I_2} [(u \zeta)_{i-1} - (u \zeta)_{i+1}]. \end{aligned} \quad (3.44 \text{ a})$$

Підсумовування в правій частині проводиться в такий спосіб:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=I_1}^{I_2} [(u\zeta)_{i-1} - (u\zeta)_{i+1}] = \\
& = + (u\zeta)_{I_1-1} \quad - (u\zeta)_{I_1+1} + \quad [i=I_1] \\
& \quad + (u\zeta)_{I_1} \quad - (u\zeta)_{I_1+2} + \quad [i=I_1+1] \\
& \quad \quad + (u\zeta)_{I_1+1} \quad - (u\zeta)_{I_1+3} + \quad [i=I_1+2] \\
& \quad \quad \quad + (u\zeta)_{I_1+2} \quad - (u\zeta)_{I_1+4} + \quad [i=I_1+3] \\
& \quad + \dots + \\
& \quad + (u\zeta)_{I_2-4} \quad - (u\zeta)_{I_2-2} + \quad [i=I_2-3] \\
& \quad \quad + (u\zeta)_{I_2-3} \quad - (u\zeta)_{I_2-1} + \quad [i=I_2-2] \\
& \quad \quad \quad + (u\zeta)_{I_2-2} \quad - (u\zeta)_{I_2} + \quad [i=I_2-1] \\
& \quad \quad \quad \quad + (u\zeta)_{I_2-1} \quad - (u\zeta)_{I_2+1} = [i=I_2] \\
& = (u\zeta)_{I_1-1} + (u\zeta)_{I_1} - (u\zeta)_{I_2} - (u\zeta)_{I_2+1}. \quad (3.44б)
\end{aligned}$$

Тоді рівняння (3.44а) набуває вигляду

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \Delta x \right] &= \frac{1}{2} [(u\zeta)_{I_1-1} + (u\zeta)_{I_1}] - \frac{1}{2} [(u\zeta)_{I_2} + (u\zeta)_{I_2+1}] = \\
&= (u\zeta)_{I_1-1/2} - (u\zeta)_{I_2+1/2}. \quad (3.44в)
\end{aligned}$$

Дане рівняння показує, що швидкість накопичення величини  $\zeta$  в області  $R$  дорівнює потоку величини  $\zeta$  в область  $R$  через границі  $I_1 - 1/2$  й  $I_2 + 1/2$  (це впливає також з рівняння (3.41) при  $\alpha = 0$ ). Таким чином, отриманий скінченно-різницевий аналог зберігає інтегральну властивість, яка виражає формула Остроградського — Гауса для диференціального рівняння, і ми будемо говорити, що цей аналог має властивість консервативності.

Властивість консервативності залежить як від використаної форми диференціального рівняння, так і від прийнятої скінченно-різницевої схеми. Наприклад, неконсервативна форма одномірного модельного рівняння (2.18) при  $\alpha = 0$  така:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (3.45)$$

Використовуючи ту ж схему, що й у попередньому прикладі, тобто різниці вперед за часом і центральні різниці по просторовій змінній, одержуємо

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -u_i^n \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2 \Delta x} \quad (3.46)$$

Тоді суми, що відповідають (3.44а), мають вигляд

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} \Delta x - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \Delta x \right] &= \sum_{i=I_1}^{I_2} \left( -u_i \frac{\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}}{2 \Delta x} \right) \Delta x = \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=I_1}^{I_2} u_i (\zeta_{i-1} - \zeta_{i+1}). \quad (3.47а)
\end{aligned}$$

Знову підсумуємо:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=I_1}^{I_2} u_i (\zeta_{i-1} - \zeta_{i+1}) = \\
& = u_{I_1} \zeta_{I_1-1} - u_{I_1} \zeta_{I_1+1} + \quad [i=I_1] \\
& \quad + u_{I_1+1} \zeta_{I_1} - u_{I_1+1} \zeta_{I_1+2} + \quad [i=I_1+1] \\
& \quad \quad + u_{I_1+2} \zeta_{I_1+1} - u_{I_1+2} \zeta_{I_1+3} + \quad [i=I_1+2] \\
& \quad \quad \quad + u_{I_1+3} \zeta_{I_1+2} - u_{I_1+3} \zeta_{I_1+4} + \quad [i=I_1+3] \\
& \quad \quad \quad \quad + \dots \quad (3.476)
\end{aligned}$$

Звідси видно, що при такій формі вихідного диференціального рівняння члени, відповідні до потоків через грані суміжних гнізд, взаємно не знищуються, наприклад

$$u_{I_1+2} \zeta_{I_1+1} - u_{I_1} \zeta_{I_1+1} = (u_{I_1+2} - u_{I_1}) \zeta_{I_1+1} \neq 0,$$

за винятком частинного випадку, коли  $u_i = const$ . Виходить, у цьому випадку скінченно-різницевий аналог не забезпечує виконання формули Остроградського — Гауса для диференціального рівняння.

У першому випадку консервативність забезпечується застосуванням методу контрольного об'єму при виводі скінченно-різницевих виразів. При використанні консервативної форми конвективний потік величини  $\zeta$ , що впливає через грань  $I_1 + 1/2$  із контрольного об'єму із центром у точці  $i$  за одиницю часу, становить  $(u_i \zeta_i + u_{i+1} \zeta_{i+1})/2$  і в точності дорівнює конвективному потоку, що втікає через ту ж грань у контрольний об'єм із центром у точці  $i+1$  за одиницю часу. Як показано вище, у випадку неконсервативної форми це не мало б місця.

*Вправа.* Показати, що використання для  $\partial^2 \zeta / \partial x^2$  виразу (3.12) із центральними різницями при  $\alpha > 0$  забезпечує консервативність для дифузійних членів.

Ясно, що при  $\alpha > 0$  єдиний шлях забезпечити збереження сумарного потоку в загальному випадку (коли  $u$  є функцією просторової змінної) полягає в незалежному збереженні конвективних і дифузійних членів; у неодномірному випадку необхідно забезпечити консервативність цих членів окремо по кожній просторовій змінній.

Важливість властивості консервативності легко зрозуміти на прикладі рівняння нерозривності для стискаючого середовища. Розглянемо задачу про природню конвекцію в повністю замкненому сосуді з непроникними стінками. У початковий момент часу вважаємо, що в усьому об'ємі  $V = 0$ . До нижньої стінки посудини підводить тепло, і відбувається природня конвекція, що можливо досягає стаціонарного стану. Якщо для розрахунків застосовується яка-небудь неконсервативна схема, то повна маса в досліджуваному об'ємі буде мінятися. Якщо ж використовується консервативна схема, то повна маса не буде мінятися (без врахування машинних помилок округлення). Слід зауважити, що помилки, викликані порушенням збереження маси, зменшуються при  $\Delta x \rightarrow 0$ , але в практичних обчисленнях зі скінченною величиною  $\Delta x$  ці помилки є суттєвими.

Незважаючи на істотність наведених міркувань однозначно надавати

перевагу консервативним схемам не можна. Властивість консервативності не обов'язково пов'язана з підвищенням точності схеми. Наприклад, нестійкі розв'язки консервативних рівнянь зберігають властивість консервативності. Більше того, неконсервативний метод може бути в деякому змісті точніше консервативного. Наприклад, для виразу функцій за значеннями у вузлах сітки можна було б застосовувати одномірні апроксимації поліномами високого порядку й при цьому похідні по просторових змінних будуть, імовірно, визначатися з помилкою більш високого порядку. Однак побудована в такий спосіб схема може бути неконсервативною, а якщо критерій точності включає умова консервативності, то неконсервативна схема виявиться менш точною.

### Транспортивність та консервативність схем Ейлера.

Наведемо ще дві корисні властивості різницевих схем, а саме їх *транспортивність та консервативність*.

Скінченно-різницеву схему назвемо *транспортною*, якщо вона апроксимує диференціальне рівняння, що описує конвективну течію рідини і якщо довільне збурення, накладене на будь-яку функцію системи, розповсюджується різницевою схемою на сітковій множині лише у напрямі вектора швидкості.

Хоча ця властивість, на перший погляд, видається очевидною, але не кожна різницева схема її задовольняє. Покажемо що центрально – різницева схема (3.4) для модельного рівняння конвективного переносу

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) / \tau = -0,5kh^{-1}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n)$$

не є транспортною.

Нехай  $k > 0$ . Поклавши збурення потоку в усіх точках сіткової області таким, що дорівнює нулю, за винятком точки з координатами  $(x_i, t_n)$ , де воно дорівнює  $\delta$ . Прослідкуємо за поширенням цього збурення на  $(n+1)$ -му часовому шарі в точках  $(x_{i\pm 1}, t_{n+1})$ :

$$(\delta_{i+1}^{n+1} - 0) / \tau = -0,5kh^{-1}(0 - \delta_i^n),$$

$$(\delta_{i-1}^{n+1} - 0) / \tau = -0,5kh^{-1}(\delta_i^n - 0).$$

Звідси легко зробити висновок, що збурення поширюється як за потоком

$$\delta_{i+1}^{n+1} = 0,5\tau kh^{-1}\delta_i^n,$$

так і проти

$$\delta_{i-1}^{n+1} = -0,5\tau h^{-1}\delta_i^n.$$

У точці  $(x_i, t_{n+1})$  збурення відсутнє.

Дослідивши схему з різницями проти потоку з  $k > 0$  за вказаним алгоритмом, і використавши попередні припущення, встановлюємо що

$$\delta_{i+1}^{n+1} = C\delta_i^n, \quad \delta_i^{n+1} = (1 - C)\delta_i^n, \quad \delta_{i-1}^{n+1} = 0.$$

Звідси робимо висновок про транспортивність схеми.

Аналогічно досліджується випадок  $k < 0$ .

Відзначимо, що усі неявні схеми є не транспортними, бо їх чисельна реалізація відбувається шляхом розв'язування системи рівнянь відносно невідомих значень функції у всіх точках просторової області, а отже, і осередненням збурення за всіма просторовими точками часового шару.

Дослідимо другу важливу властивість скінченно-різницевої схем – їх *консервативність*. Як відзначено раніше, ця властивість забезпечувати виконання певних інтегральних законів збереження, що справджуються для початкових диференціальних рівнянь, різницевою схемою на сітковій множині.

Для встановлення цієї властивості потрібно показати, що на сітковій множині виконується алгебраїчний аналог очевидного інтегрального закону збереження для хвильового рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_a^b u dx = -k[u(b) - u(a)] \quad (3.20)$$

Якщо функція швидкості конвективного переносу не змінює знак на просторовій сітці, то легко встановити, що схема з різницями проти потоку (3.5) буде консервативною. Підсумуємо ліву та праву частини схеми при  $k(x) < 0$  за усіма індексами просторових координат

$$\sum_{i=1}^N \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} h = - \sum_{i=1}^N \frac{(ku)_{i+1}^n - (ku)_i^n}{h} h.$$

Перепишемо ліву та праву частини останньої рівності у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} h &= \left( \sum_{i=1}^N u_i^{n+1} h - \sum_{i=1}^N u_i^n h \right) / \tau, \\ \sum_{i=1}^N \frac{(ku)_{i+1}^n - (ku)_i^n}{h} h &= \left( (ku)_2^n - (ku)_1^n + (ku)_3^n - (ku)_2^n + \dots + \right. \\ &\quad \left. + (ku)_N^n - (ku)_{N-1}^n + (ku)_{N+1}^n - (ku)_N^n \right) = (ku)_{N+1}^n - (ku)_1^n. \end{aligned}$$

Тоді одержана рівність

$$\left( \sum_{i=1}^N u_i^{n+1} h - \sum_{i=1}^N u_i^n h \right) / \tau = -(ku)_{N+1}^n + (ku)_1^n.$$

є відображенням інтегрального закону збереження на сітковій множині. Зсув правої граничної точки на один вузол сітки відповідає запису просторової похідної в односторонньому вигляді. Аналогічний результат можна отримати і для випадку, коли  $k(x) > 0$  для всіх просторових точок на часовому шарі.

Якщо  $k(x)$  у деякій точці сітки (наприклад, у точці  $x = x_l$ ) змінює знак, то у відповідності до схеми (3.5) ми повинні до і після точки зміни знаку  $k$  використовувати різні формули і провести їх підсумовування.

Нехай  $k(x)$  змінює знак з “плюса” на “мінус” в точці  $(x_l, t_n)$ , тоді

$$\sum_{i=1}^N \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} h = - \sum_{i=1}^l \frac{(ku)_i^n - (ku)_{i-1}^n}{h} h - \sum_{i=l+1}^N \frac{(ku)_{i+1}^n - (ku)_i^n}{h} h.$$

В той час як ліва сума залишається такою самою, як і в попередньому випадку, в процесі підсумовування правої частини маємо

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^l \frac{(ku)_i^n - (ku)_{i-1}^n}{h} h + \sum_{i=l+1}^N \frac{(ku)_{i+1}^n - (ku)_i^n}{h} h = (ku)_1^n - (ku)_0^n + \\ & + (ku)_2^n - (ku)_1^n + \dots + (ku)_{l-1}^n - (ku)_{l-2}^n + (ku)_l^n - (ku)_{l-1}^n + \\ & + (ku)_{l+2}^n - (ku)_{l+1}^n + \\ & + (ku)_{l+2}^n - (ku)_{l+3}^n + \dots + (ku)_N^n - (ku)_{N-1}^n + (ku)_{N+1}^n - (ku)_N^n = \\ & = (ku)_{N+1}^n - (ku)_0^n - (ku)_{l+1}^n + (ku)_l^n. \end{aligned}$$

Звідси

$$\left( \sum_{i=1}^N u_i^{n+1} h - \sum_{i=1}^N u_i^n h \right) / \tau = -(ku)_{N+1}^n + (ku)_0^n + (ku)_{l+1}^n - (ku)_l^n.$$

Перші два члени в правій частині виражають різницю потоків за одиницю часу на двох границях області, а третій і четвертий є похибкою, зумовленою не консервативністю схеми. Вона інтерпретуються як штучні джерельні члени.

Позбутися штучного джерела можна, якщо схему з різницями проти потоку модифікувати так

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{f_{j-1}^n + f_j^n + f_{j+1}^n}{\Delta x}$$

де

$$\begin{aligned} f_j^n &= -|k|u_j^n, \\ f_{j-1}^n &= \begin{cases} |k_{j-1}^n|u_{j-1}^n & k_{j-1}^n < 0, \\ 0 & k_{j-1}^n \geq 0, \end{cases} \quad f_{j+1}^n = \begin{cases} 0 & k_{j+1}^n \geq 0, \\ |k_{j+1}^n|u_{j+1}^n & k_{j+1}^n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Легко переконатися, що ця різницева схема є схемою з різницями проти потоку, а крім того вона є транспортною і консервативною.

### Схеми з донорними комірками (друга схема з різницями проти потоку)

Розглянутий вище підхід до побудови схем з різницями проти потоку не єдиний. Другий різновид таких схем, який широко застосовується, є скінченно-різницева схема з “донорними комірками”. В одновимірному випадку, згідно з цим алгоритмом, по кожній бік від вузлової точки просторової сітки виділяється комірка і знаходяться деякі середні значення швидкостей конвективного переносу на границях. Знак цих осереднень визначає, з якого саме вузла сітки потрібно взяти значення шуканої функції для написання скінченно-різницевої схеми з різницями проти потоку. Прикладом такого алгоритму може бути схема

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) / \tau = -0,5h^{-2}(c_R u_R^n - c_L u_L^n),$$

де

$$\begin{aligned} c_R &= 0,5(k_{i+1} + k_i), \\ c_L &= 0,5(k_i + k_{i-1}) \end{aligned}$$

а значення функції  $u_R^n$  і  $u^n$  визначаються так

$$u^n = \begin{cases} u_i, & \text{якщо } c_R > 0, \\ u_{i+1}, & \text{якщо } c_R < 0, \end{cases} \quad u^n = \begin{cases} u_{i-1}, & \text{якщо } c_L > 0, \\ u_i, & \text{якщо } c_L < 0. \end{cases}$$

Легко встановити, що ця схема є транспортивною і консервативною. У порівнянні зі звичайною схемою з різницями проти потоку, в схемі з “донорними комірками” потрібно виконати додаткові обчислення, але це виправдовується тим, що схема має дещо вищий порядок точності при апроксимації просторової похідної і тим компенсує обчислювальні витрати. Відомі й інші алгоритми побудови схем з різницями проти потоку, які використовувались в конкретних випадках.

Зауважимо, що при побудові модифікацій схеми з “донорними комірками” не доцільно на границях комірки брати осереднені значення шуканої функції, бо в такому разі ми дістаємо схему з центральними різницями.

Для багатовимірних задач побудова схем, для яких виконується умова транспортності, є значно складнішою, ніж для одновимірних, і потребує в кожному конкретному випадку додаткових досліджень.

## Рекомендована література

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М. “Мир” 1980. Стр 39-58.
3. Самарський А.А. Теория разностных схем. М.:”Наука” –1983 –616с. Стор. 60-78