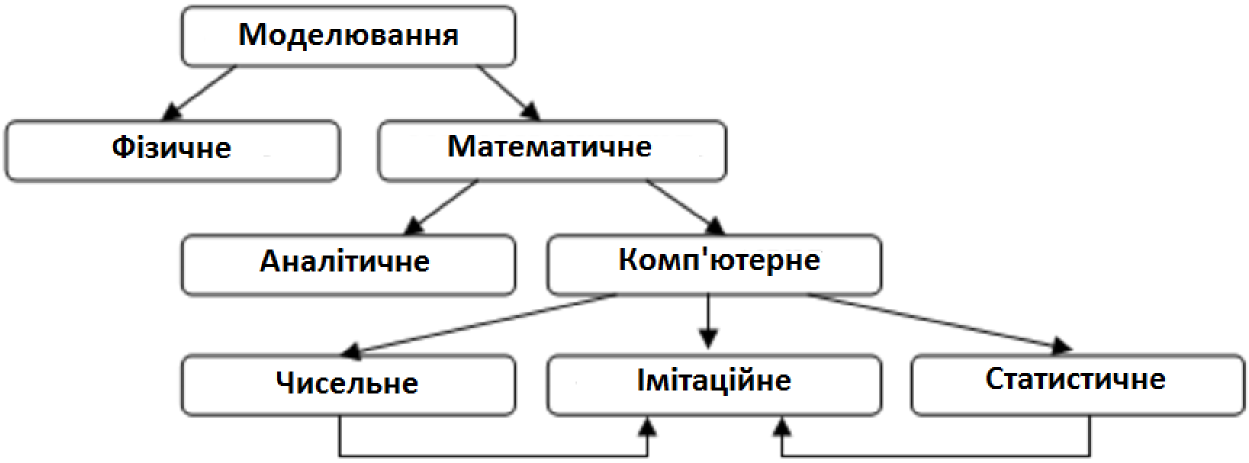
Теорія різницевих схем.

Лекція 1. Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки. – 2 **год.** [1, 2, 3]

Мета, задачі і проблеми чисельного моделювання. Чисельне моделювання процесів гідродинаміки. Основні закони та рівняння. Дивергентна і недивергентна форми запису системи рівнянь Нав'є - Стокса. Системи обезрозмірювання рівнянь.



При **моделюванні** реальних фізичних процесів і проектуванні пристроїв одночасно використовують **теоретичні** та **експериментальні методи** дослідження, а також **обчислювальний експеримент,** за допомогою яких визначають основні характеристики процесів.

Мета чисельного моделювання. Обчислювальний підхід бере на себе певну частину функцій як теоретичних, так і експериментальних методів. Іноді він дає змогу замінити високовартісні й довгострокові натурні експерименти чисельним моделюванням процесів на ЕОМ. Інколи такий підхід є єдино можливим для визначення тих чи інших характеристик процесу. За допомогою чисельного моделювання можна прогнозувати поведінку, а варіюючи параметри, встановлювати нові якості та закономірності протікання досліджуваного процесу, що здебільшого не під силу ні теоретичним, ні експериментальним методам. Чисельне моделювання доцільно застосовувати в тих випадках, коли досліджувані процеси важко або навіть неможливо моделювати на макетах через їх велику швидкоплинність, надзвичайно малі геометричні розміри досліджуваного об'єкту, багатокомпонентність, надвисокі чи наднизькі тиски та температури середовища, а також в інших складних реальних ситуаціях.

При чисельному моделюванні реальних процесів множина ***задач*** як об'єкт математичного дослідження, вивчена недостатньо. Задача, в самому загальному розумінні, є ситуацією, яка визначає дії деякої розв'язуючої системи. Розв'язуюча система є основним інструментом чисельного моделювання і класифікується як біологічна, технічна і комбінована система, до складу якої входять люди і автомати (машини). Ця система повинна мати технічні засоби розв'язування і теоретичні методи побудови розв'язку.

Класифікація задач чисельного моделювання згідно із системою “людина - автомат” залежно від можливої ситуації така:

1) існує один або кілька алгоритмів розв’язування задачі, оформлених у вигляді програми, яка може бути реалізована на ЕОМ;
2) не існує програми для ЕОМ, але людина знає, як її побудувати;
3) не існує програми і невідомий метод розв’язування задачі.

У першому випадку задача зводиться або до вибору з множини алгоритмів найбільш придатного, або використання єдиного придатного алгоритму. В другому додається процес програмування відомого алгоритму (клас програмування). У третьому виникає задача розробки алгоритму і програми (клас задач синтезу алгоритмів). Якщо, починаючи розв’язувати задачу, людина не знає шляхів розв’язування даного класу задач, то таку задачу називають проблемною. Розв’язування проблемних задач передбачає використання людиною додаткових евристичних засобів, відмінних від алгоритмів і алгоритмічних вказівок. Задачу назвемо добре визначеною, якщо для неї є алгоритм перевірки, який можна застосувати до запропонованого розв’язку. Якщо інформації, що міститься в постановці задачі й самій розв’язуючій системі, достатньо для отримання розв’язку, то така задача є безпошуковою. У пошукових задачах система повинна дістати додаткову інформацію із зовнішнього середовища. Вхідні дані задач поділяються на компоненти, які в умові описані досить повно (те, що дано в задачі), і компоненти, перелічені в умові задачі, але їх повний опис можна дістати лише після розв’язування задачі (те, що треба знайти).

Відповідно до процесу розв’язування задачі поділяються на такі типи: задачі виконання (задано вхідні об’єкти, процедури; потрібно знайти продукти процесу); задачі відновлення (задано продукти процесу, процедури; потрібно знайти вхідні об’єкти); задачі перетворення (задано вхідні об’єкти, продукти процесу; потрібно знайти процедури); задачі конструювання (відомо продукти із заданими властивостями; потрібно знайти відповідні вхідні дані та процедури).

Типовою дією, яку виконує розв’язуюча система, є виділення допоміжних задач або послідовності підзадач, розв’язати які вона може значно простіше, ніж задачу в цілому. Часто такими підзадачами є суттєві задачі, без розв’язування яких неможливо розв’язати основну задачу. Процес виділення підзадач і розгалуження розв’язку в чисельному моделюванні потребує грунтовного аналізу і додаткових досліджень впливу похибок розв’язку кожної з підзадач на кінцевий результат. Похибка розв’язку задачі, спричинена впливом похибки розв’язку підзадачі, є спадковою.

З позицій обчислювальної математики задачі можна класифікувати як задачі:

1) розв'язування рівнянь і систем: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних, функціональних;
2) дослідження властивостей розв'язків рівнянь і систем: асимптотична поведінка розв'язків; критерії стійкості; знаходження величин, залежних від розв'язків;
3) екстремальні задачі з додатковими умовами і без них;
4) задачі на відновлення (визначення коефіцієнтів): аналіз Фур'є, інтерполювання, лінійна і нелінійна апроксимація, конформні відображення;
5) задачі оцінки значень: обчислення та оцінка значень точних і наближених формул, залишків рядів.

Для ефективного чисельного моделювання складних фізичних процесів система основних рівнянь, яка описує фізичний процес, повинна насамперед досить адекватно його описувати і мати ефективні обгрунтовані чисельні методи розв'язування. Обгрунтування чисельних методів полягає у встановленні існування розв'язку, оцінки його похибки, обчислювальної стійкості алгоритму, його збіжності до точного розв'язку, консервативності, дисипативності, дисперсійності та ін.

Отже, обчислювальна гідродинаміка є окремою дисципліною, відмінної від експериментальної й теоретичної гідродинаміки, що й доповнює їх. Вона має свої власні методи, свої власні труднощі й свою власну сферу застосування, відкриваючи нові перспективи для вивчення фізичних процесів.

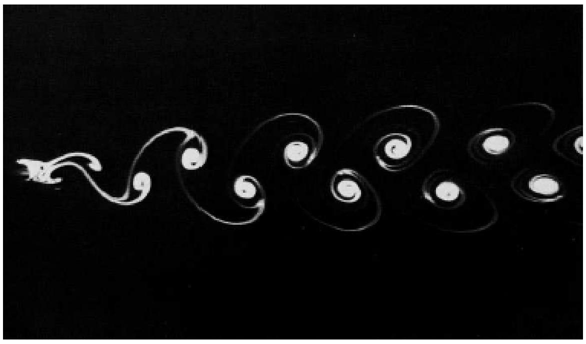
Використання обчислювальної гідродинаміки

- **Аерокосмічна промисловість**: аеродинаміка, дизайн крив і лопат, реактивних снарядів і ракет, пасажирських кабін
- **Автомобілебудування**: внутрішнє згоряння, збільшення комфорту пасажирів
- **Біологія**: дослідження польоту птахів і комах, переміщення риб
- **Біомедицина**: серцеві клапани, гідродинаміка кровоносних посудин, фільтри й респіратори
- **Будівельна індустрія**: проектування мостів, надбудов будинків, великих конструкцій, очищення повітря в приміщеннях, вентиляція, кондиціювання
- **Хімічні технології**: перемішування, поділ, хімічне реагування
- **Електроніка**: охолодження електронних обладнань
- **Екологія й безпека**: контроль промислових відходів і забруднень, протипожежна безпека, захист річкових і морських берегів
- **Кораблебудування**: вітрове й хвильове навантаження, силові установки
- **Машинобудування**: насоси, вентилятори, теплообмінники
- **Метеорологія**: прогноз погоди
- **Океанографія**: плину в ріках і океанах
- **Енергетика**: бойлери, казани, топлення, посудини тиску, гідравлічні тракти ядерних реакторів
- **Спортивна промисловість**: дизайн гоночних автомобілів, яхт і байдарок, велосипедних шоломів, плавальних окулярів, м'ячів для тенісу й гольфа й т.п.
- **Турбомашинобудування**: турбіни, гідротрансформатори

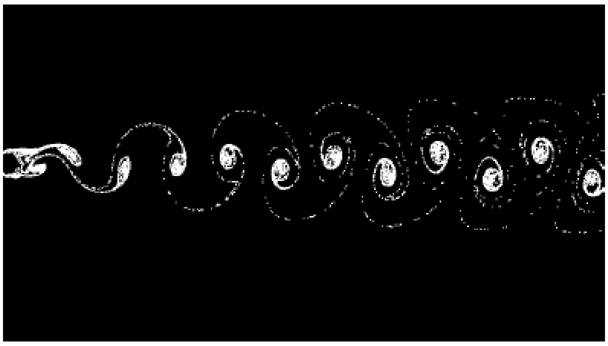
Приклади використання

(http://www.mathematik.uni-dortmund.de/kuzmin/cfdintro/cfd.html)

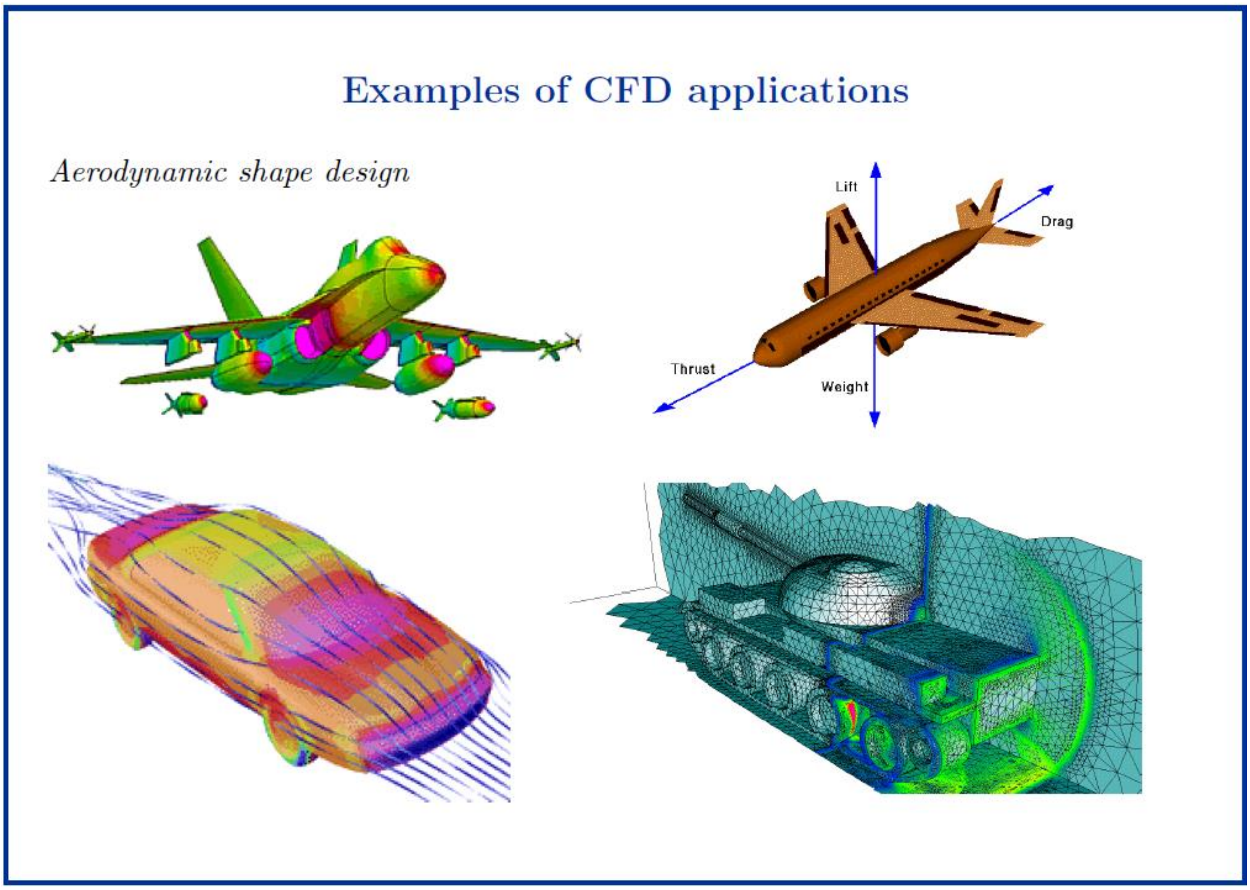
Вихорова доріжка Кармана (обтікання циліндричного тіла)



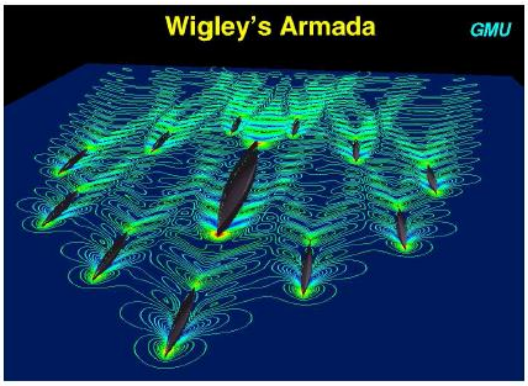
Фізичний експеримент

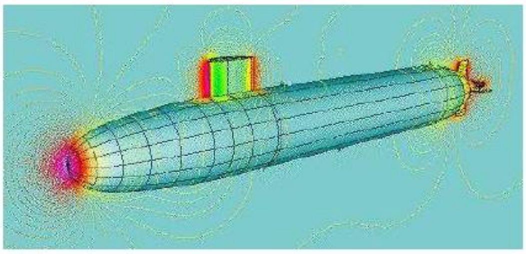


Обчислювальний експеримент



Examples of CFD applications

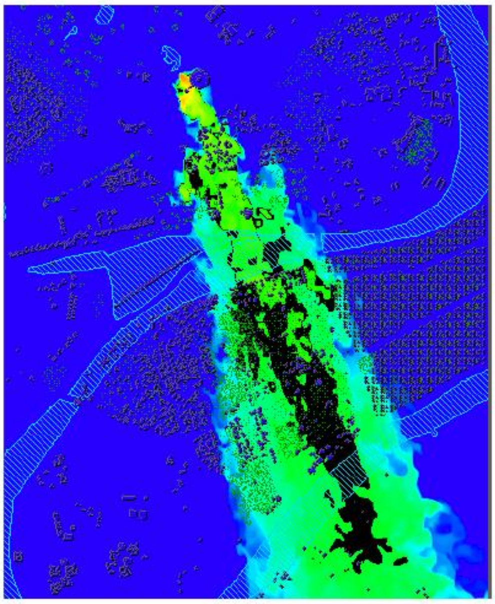




CFD simulations by Löhner et al.

Examples of CFD applications

Smoke plume from an oil fire in Baghdad



CFD simulation by Patnaik et al.

Короткий Історичний огляд

- 1910 р. Л. Ричардсон - ітераційні методи розв'язку рівняння Лапласа, бігармонічного рівняння й інших рівнянь, уперше застосував чисельні методи до такої практичної задачі великого масштабу, як визначення напруг у кам'яній дамбі. В 1918 р. Лібман вдосконалив метод за рахунок використання «нових» значень у вузлах, як тільки вони обчислені.
- 1928 р. - чисельний розрахунок гіперболічних рівнянь; метод характеристик; необхідна *умова стійкості Куранта — Фрідрихса — Леві (КФЛ)* (число Куранта повинне бути менше одиниці) справедливо для рівнянь гідродинаміки як у лагранжевих, так і в ейлерових змінних; з'явилася класична робота Куранта, Фрідрихса й Леві, що визначила напрямок практичного одержання скінченно-різницевих розв'язків у наступні роки.
- Перший чисельний розв'язок рівнянь у частинних похідних для задач гідродинаміки в'язкої рідини було дано Томом в 1933 р. В 1938 р. Шортлі й Уеллер розробили вдосконалений варіантом методу Лібмана, а також уперше точно визначили й досліджували швидкість збіжності.
- Саусвелл [1946], Фокс [1948] розробили схеми верхньої й нижньої релаксації.
- 1955 р. Аллен і Саусвелл застосували метод релаксації Саусвелла для розрахунків вручну обтікання циліндра в'язкою нестислою рідиною. Були отримані чисельно стійкі розв'язки при числі Рейнольдса, рівному 1000, що перевищує фізичну межу стійкості.
- 1950 р. Франкел (і в 1954 р. незалежно від нього Янг) розробили метод, який згодом став називатися *методом послідовної верхньої релаксації* (Янг [1954]) або методом оптимальної верхньої релаксації. Франкел помітив також аналогію між ітеративним розв'язком еліптичних рівнянь і розв'язком кроками за часом параболічних рівнянь, що мало важливі наслідки.
- У першій монографії Рихтмайера [1957], що суттєво вплинула на розвиток одномірної нестаціонарної гідродинаміки, було наведено понад 10 чисельних схем. У багатомірному випадку першим неявним методом був *метод Кранка — Николсона*, опублікований в 1947 р., що й вимагав ітерацій на кожному часовому шарі.
- фон Неймана (Лос-Аламос під час II світової війни) - критерій стійкості параболічних скінченно-різницевих рівнянь; метод дослідження лінеаризованої системи.
- схеми методу змінних напрямків (Писмен й Ракфорд [1955], Дуглас й Ракфорд [1956]).
- 1953 р. Дюфорт і Франкел - схема «чехарда» для параболічних рівнянь, яка, як і неявні схеми методу напрямків, що чергуються

Гіперболічні рівняння

- схема Лакса — Вендроффа [1960]
- схема Рихтмайера[1963].
- методи PIC (метод часток в комірках), EIC (метод вибуху в гніздах), розроблені в 1964 р. Мадером, розмазування стрибків досягається за рахунок уведення кінцевого числа часток, що розраховуються.

Двокрокові методи

- У 1967 р. Саульєв В.К. запропонував двокроковий безумовно стійкий алгоритм, в якому в усіх просторових точках сітки на часовому кроці n використовується явна схема, а на наступному кроці неявна.
- Ідею двокрокового явно–неявного чисельного “hopscotch“ методу, в якому, крім того, тип схем чергується і в просторових точках сітки, запропоновано Шелдоном для ітераційного розв’язування рівняння Пуассона.
- Скала і Гордон використали цю ідею для розв’язування задачі нестаціонарного обтікання кругового циліндра.
- Гурлі узагальнив її для нестаціонарного рівняння теплопровідності, довів стійкість.
- В 1987 р. Грищенко О.Ю розробив двокрокові-симетризовані алгоритми (ДС-алгоритми), поширивши ідею "hopscotch” методу на параболізовані лінійні і нелінійні задачі течії в’язкої рідини, переносу; для систем рівнянь першого порядку та систем газової динаміки, а також системи рівнянь Нав’є–Стокса. Ці алгоритми не потребують обернення матриці системи сіткових рівнянь.

Грищенко Олександр Юхимович (1946-2016**)**

- з 1971 р. працював на кафедрі обчислювальної математики, проф., д.ф.-м.н.
- Опублікував понад 200 наукових та науково-методичних праць
- Був членом спеціалізованої вченої ради із захисту докторських дисертацій КНУ імені Тараса Шевченка, членом редакційної колегії "Журналу обчислювальна та прикладна математика" та головним редактором серії "Прикладна математика" цього ж журналу.
- Основні напрямки теоретичних досліджень пов'язані з
  - проблемами побудови чисельних методів розв'язування крайових задач,
  - чисельного моделювання процесів динаміки та кінетики рідини, газу та плазми,
  - питаннями конструювання різницевих схем та чисельних алгоритмів із заданими властивостями,
  - розробкою чисельних методів, ефективних при розв'язуванні великих задач на багатопроцесорних комп'ютерних системах.
- Результати цих досліджень впроваджувалися
  - при розрахунку та проектуванні фрагменту підземної частини насосної станції каналу Дніпро-Донбас
  - моделюванні процесів очищення промислових стоків,
  - моделюванні робочих середовищ газодинамічних лазерів високої потужності та в інших прикладних проблемах.
- Нагороди
  - У 1976 році за цикл робіт став лауреатом Премії імені М.Островського ЦК ЛКСМ України в галузі науки, техніки та виробництва
  - У 1978 році нагороджений дипломом третього ступеня МВССО України
  - У 2013 році премією Імені Тараса Шевченка Київського національного університету імені Тараса Шевченка,
  - У 2015 році Почесною Грамотою Президії академії педагогічних наук України. Також нагороджений медаллю на честь 1500 річчя міста Києва

Апроксимація, збіжність і стійкість розв'язків.

Апроксимація $\Delta f / \Delta x \to df / dx$

Збіжна скінченно-різницева схема математично визначається як схема, що дає скінченно-різницевий розв'язок, який збігається до розв'язку диференціального рівняння при прямуванні розміру комірки сітки до нуля. Під границею тут розуміється границя всього розв'язку диференціального рівняння, а не просто його окремих членів (похідних). Остання властивість називається *апроксимацією* (Лакс й Рихтмайер [1956]).

Стійкість

О'брайен, Хаймен і Каплан [1950], а також Едді [1949] визначають стійкість виходячи з росту або загасання помилок округлення. Лакс й Рихтмайер [1956] дають більш загальне визначення стійкості, установлюючи границю, до якої може зростати будь-який компонент початкових даних у процесі чисельних розрахунків.

Теорема Лакса. Для системи лінійних рівнянь наявність стійкість є необхідною й достатньою умовою збіжності скінченно-різницевої схеми, що апроксимує систему диференціальних рівнянь.

Критерій стійкості фон Неймана (Чарни зі співавторами [1950], О'браейн зі співавторами [1950]) вимагає, щоб найбільше власне значення матриці переходу ітераційної схеми було менше за одиницю мінус члени порядку помилки апроксимації. Лакс й Рихтмайер [1956] показали, що ця умова є достатньою для стійкості лінійної системи з постійними коефіцієнтами й що у випадку, коли матриця переходу задовольняє одному із трьох наборів властивостей, виконання цього критерію є достатнім також для збіжності.

Лише лінійного аналізу рівнянь із сталими коефіцієнтами недостатньо для встановлення нестійкості. Крім того, встановлення стійкості не гарантує отримання адекватного розв'язку, оскільки для достатньо великого числа Рейнольдса при застосуванні стійких схем можуть виникати осциляції, що не мають нічого спільного із точним розв’язком .

Основні закони та рівняння. Дивергентна і недивергентна форми запису системи рівнянь Нав'є - Стокса. Системи обезрозмірювання рівнянь.

Рівняння руху нестисливої рідини в декартовій системі координат.
Рівняння руху для фізичних змінних

Рівняння Навье — Стокса, що описують рух нестислої ньютонівської в'язкої рідини:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \left(\vec{U}, \mathrm{grad}\vec{U}\right) = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,P + \nu\Delta\vec{U} + \vec{F}$$

$$\mathrm{div}\vec{U} = 0$$

або у 2-вимірному випадку

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right) + f_x\,, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}} + \bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} + \bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = -\frac{1}{\bar{\rho}}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \bar{y}^2}\right) + f_y, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0, \quad (2.3)$$

Риски над буквами означають, що відповідні величини є розмірними. Рівняння записані для фізичних змінних — складових швидкості u, v і тиску P; властивості рідини характеризуються щільністю ρ і кінематичним коефіцієнтом в'язкості ν.

Ці рівняння засновані на наступних фізичних законах: рівняння (2.1) і (2.2) є проекціями векторного рівняння кількості руху $F = ma$ (другого закону Ньютона), причому сили в'язкостіпов'язані зі швидкістю деформацій лінійним ньютонівським законом для дотичних напружень. Так, з другого закону Ньютона до елементарного об'єму рідини δv масою δm маємо:

$$\delta m\frac{d\vec{U}}{dt} = \delta m\nu\Delta\vec{U} - \delta V\,\mathrm{grad}P + \vec{F}\delta m.$$

У лівій частині формули – добуток маси δm елементарного об'єму рідини і її прискорення ($\vec{U}$ – швидкість, t – час). У правій частині – діючі на цей об'єм сили: сила в'язкого тертя (ν – кінематична в'язкість), сила, що виникає через різницю тисків P, та інші сили $\vec{F}\delta m$.

Рівняння (2.3) виражає закон збереження маси.

Наведені рівняння записані в ***ейлеровій*** системі координат, тобто в нерухомій системі, щодо якої рухається рідина.

Рівняння переносу вихору й рівняння для функції струму у

випадку плоских течій

З рівнянь (2.1) і (2.2) можна виключити тиск, продиференціювавши перше з них по y, а друге по x. Визначаючи вихор як

$$\bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}} - \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}} \qquad (2.4)$$

одержуємо рівняння переносу вихору, що має параболічний тип:

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{t}} = -\bar{u}\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}} - \bar{v}\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}^2}\right) = -\bar{\mathbf{V}} \cdot (\nabla \bar{\zeta}) + \bar{\nu}\nabla^2 \bar{\zeta} \quad (2.5)$$

Використовуючи субстанціональну похідну (Лагранжа) $\dfrac{D\varphi}{Dt} = \dfrac{\partial \varphi}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\varphi$, це рівняння можна представити так:

$$\frac{D\bar{\zeta}}{D\bar{t}} = \bar{\nu}\nabla^2 \bar{\zeta} \qquad (2.6)$$

$$\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{y}} = \bar{u}, \quad \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial \bar{x}} = -\bar{v} \qquad (2.7)$$

рівняння (2.4) можна записати як рівняння Пуассона, що має еліптичний тип:

$$\nabla^2 \bar{\psi} = \bar{\zeta}\,. \qquad (2.8)$$

Консервативна форма рівнянь

Рівняння нерозривності (2.3)

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}} = 0$$

можна записати через вектор повної швидкості $\bar{\mathbf{V}}$ в наступному виді:

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{V}} = 0 \quad (2.9)$$

Використовуючи відому тотожність векторної алгебри

$$\bar{\nabla} \cdot \left(\bar{\mathbf{V}}\bar{\zeta}\right) = \bar{\mathbf{V}} \cdot \left(\bar{\nabla}\bar{\zeta}\right) + \bar{\zeta}\left(\bar{\nabla} \cdot \bar{\mathbf{V}}\right) = \bar{\mathbf{V}} \cdot \left(\bar{\nabla}\bar{\zeta}\right)$$

одержуємо з (2.5) консервативну форму рівняння переносу вихору або ***дивергентну форму***

$$\frac{\partial \bar{\zeta}}{\partial \bar{t}} = -\bar{\nabla} \cdot (\bar{\mathbf{V}}\bar{\zeta}) + \bar{\nu}\bar{\nabla}^2 \bar{\zeta} = -\frac{\partial(\bar{u}\bar{\zeta})}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial(\bar{v}\bar{\zeta})}{\partial \bar{y}} + \bar{\nu}\left(\frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial \bar{y}^2}\right) \quad (2.10)$$

Рівняння в безрозмірних змінних

Нехай $\bar{L}$ — характерна_довжина, а $\bar{U}_0$— характерна швидкість задачі; наприклад, якщо $\bar{L}$ — довжина хорди профілю крила й $\bar{U}_0$ — швидкість потоку, що набігає, $\bar{L}/\bar{U}_0$ те — час, за який частка потоку, що набігає, проходить увесь профіль.

Уведемо наступні безрозмірні величини:

$$u=\frac{\bar{u}}{\bar{U}_0},\ v=\frac{\bar{v}}{\bar{U}_0},\ x=\frac{\bar{x}}{\bar{L}},\ y=\frac{\bar{y}}{\bar{L}},\zeta=\frac{\bar{\zeta}}{\bar{U}_0/\bar{L}},t=\frac{\bar{t}}{\bar{L}/\bar{U}_0},\quad (2.11)$$

тоді рівняння (2.10) і (2.8) приймуть вид

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\nabla\cdot(\mathbf{V}\zeta)+\frac{1}{\mathrm{Re}}\nabla^2\zeta \qquad (2.12)$$

$$\nabla^2\psi=\zeta, \qquad (2.13)$$

де Re — безрозмірний параметр, число Рейнольдса,

$$\mathrm{Re}=\bar{U}_0\bar{L}/\bar{\nu}\ . \qquad (2.14)$$

Таким чином, для будь-якого заданого набору граничних умов течія характеризується одним безрозмірним параметром - числом Рейнольдса.

Для течій з більшими числами Рейнольдса ($\mathrm{Re}>>1$) конвективний член у рівнянні (2.12) превалює над членом в’язкої дифузії, і в цьому випадку величина $\bar{L}/\bar{U}_0$ буде являти собою інтервал часу, що фактично характеризує течію. Тоді, наприклад, умова для безрозмірного часу $t=\bar{t}/(\bar{L}/\bar{U}_0)$ буде підходящим критерієм для досягнення стаціонарного стану плину. Однак течія з малими числами Рейнольдса ($\mathrm{Re}<<1$) краще характеризуються безрозмірним «дифузійним» часом. Визначаючи такий безрозмірний час як

$$t'=\bar{t}\,\bar{\nu}/\bar{L}^2 \qquad (2.15)$$

а інші безрозмірні величини так само, як в (2.11), одержуємо для функції струму те ж саме рівняння Пуассона (2.13), але рівняння переносу вихору при цьому набуває вигляду

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t'}=-\mathrm{Re}\nabla\cdot(\mathbf{V}\zeta)+\nabla^2\zeta \qquad (2.16)$$

Величина $\bar{L}^2/\bar{\nu}$ має розмірність часу. Для того щоб оцінити її фізичну значимість як масштабу часу в завданнях з переважною дифузією, досить помітити, що в межі при $\mathrm{Re}\to 0$ рівняння (2.12) стає сингулярним, тоді як рівняння (2.16) поводиться при цьому добре, а конвективний член зникає. Аналогічно, рівняння (2.12) не має особливості при $\mathrm{Re}\to\infty$, але при цьому зникає дифузійний член.

Одномірні модельні рівняння переносу

Рівняння переносу вихору як у неконсервативній, так і в консервативній формі (2.12) є параболічним за часом, містять дві незалежні просторові змінні й пов'язані з еліптичним рівнянням Пуассона для функції гока (2.13) через нелінійні конвективні члени.

1. Лінеаризоване одномірне рівняння з конвективним і дифузійним членами записане або в консервативній формі

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial (u\zeta)}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \qquad (2.17)$$

або в неконсервативній формі

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}. \qquad (2.18)$$

У цих рівняннях ζ моделює вихор або яку-небудь іншу конвективну й дифузійну величину, α — узагальнений коефіцієнт дифузії, відповідний до величини 1/Re у рівнянні переносу вихору, u — лінеаризована швидкість конвекції, що не залежить від x, хоча рівняння (2.17) може бути використане й для вивчення ефектів стійкості у випадку, коли $u = u(x)$.

2. Рівняння Бюргерса

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -u \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad (2.19)$$

де й розглядається як узагальнена швидкість. Це рівняння зберігає нелінійність рівняння переносу вихору й рівнянь Навье — Стокса. Завдяки своїй нелінійності воно може служити модельним рівнянням для вивчення як турбулентності, так і ударних хвиль.

Еквівалентна консервативна форма цього рівняння така:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{u^2}{2} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (2.20)$$

Оскільки відомі деякі аналітичні розв'язки рівняння Бюргерса, воно може служити для демонстрації переваг консервативної форми скінченно-різницевих рівнянь.

Завдання для самостійної роботи. (2 год.)

Встановити дивергентність системи рівнянь Нав'є – Стокса, записаних у змінних функція току - вихор. Побудувати систему обезрозмірювання для рівняння теплопровідності. Вказати умови, при яких дифузійне розповсюдження тепла переважає конвективне. [1]

Рекомендована література

1. Роуч П. Вычислительнаягидродинамика. М. “Мир” 1980. с-616.
2. Андерсон Д., ТанненхиллДж., Плетчер Р. Вычислительнаягидродинамика и теплообмен. т 1, т 2, М. “Мир” ,1990
3. Самарський А.А. Теорияразностных схем. М.:”Наука” –1983 –616с.