Передмова

Пропонований збірник укладено відповідно до програм з функціонального аналізу для студентів третього курсу факультету комп'ютерних наук та кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Він містить більше 300 задач, що охоплюють такі тематичні розділи:

1) елементи загальної топології;

2) метричні простори;

3) лінійні нормовані простори;

4) лінійні неперервні оператори та функціонали.

Більшість задач апробовано під час практичних занять. Як підручники автори рекомендують використовувати книги [1, 4, 5, 9, 10]. Велику кількість задач можна знайти у [2, 7, 8, 11, 12]. У невеликій книзі [6] міститься чудова підбірка прикладів та контрприкладів, що допомагає вже не першому поколінню студентів у формуванні глибшого розуміння фактів функціонального аналізу. Відомості з історії розвитку функціонального аналізу можна знайти в [5, 10, 13], а класичну монографію Стефана Банаха [3] радимо кожному студенту хоча б переглянути.

Автори висловлюють подяку колегам за дискусії та зауваження, передусім А. Л. Гуляницькому, Д. А. Клюшину, Ю. В. Маліцькому та Д. А. Номіровському.

Зауваження та побажання можна надсилати електронною поштою : `anik_andrii@ukr.net, semenov.volodya@gmail.com`.

Розділ 1

Елементи загальної топології

1.1. Топологічна структура

Теоретичні відомості

Означення. Топологічною структурою (або топологією) на множині X називається сукупність підмножин τ множини X, що задовольняє такі умови:

- $\emptyset$, $X \in \tau$;
- A, $B \in \tau \Rightarrow A \cap B \in \tau$;
- $A_\gamma \in \tau$, $\gamma \in \Gamma \Rightarrow \cup_{\gamma \in \Gamma} A_\gamma \in \tau$.

Означення. Упорядкована пара (X, τ), де X — множина, а τ — топологічна структура на X, називається топологічним простором.
Означення. Відкритою множиною в топологічному просторі (X, τ) називається довільний елемент із топологічної структури τ. Множина в топологічному просторі (X, τ) називається замкненою, якщо її доповнення є відкритою множиною.
Означення. Множина $V \subseteq X$ називається околом точки $x \in X$, якщо існує множина $U \in \tau$ така, що $x \in U \subseteq V$.
Означення. Послідовність (x_n), $x_n \in X$ називається збіжною до елемента $x \in X$ у топологічному просторі (X, τ), якщо для довільного околу V точки x існує натуральне число $N(V)$ таке, що $x_n \in V$ для всіх $n \geq N(V)$.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 1. Довести, що довільна непорожня відкрита множина в $\mathbb{R}$ є не більш ніж зліченним об'єднанням відкритих інтервалів, які не перетинаються, два з яких можуть бути відкритими променями. Описати структуру замкненої множини в $\mathbb{R}$.

Задача 2. Показати, що довільний метричний простір (X, d) можна розглядати як топологічний, якщо за топологію взяти систему всіх відкритих у X множин.

Задача 3. Нехай X — довільна нескінченна множина, система множин τ складається з $\emptyset$ і всіх множин, які можна отримати з X шляхом вилучення не більш ніж зліченної підмножини. Показати, що τ — топологія.

Задача 4. Доведіть, що:

1) множина A топологічного простору (X, τ) замкнена тоді й лише тоді, коли $A = \mathrm{cl}A$;
2) операція замикання має властивості:
   i) $A \subseteq \mathrm{cl}A$;
   ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{cl}A \subseteq \mathrm{cl}B$;
   iii) $\mathrm{cl}(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}A$;
   iv) $\mathrm{cl}(A \cup B) = \mathrm{cl}A \cup \mathrm{cl}B$;
   v) $\mathrm{cl}\emptyset = \emptyset$.

Задача 5. Доведіть, що:

1) множина A топологічного простору (X, τ) відкрита тоді й лише тоді, коли $A = \mathrm{int}A$;
2) операція взяття внутрішності має властивості:
   i) $\mathrm{int}A \subseteq A$;
   ii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathrm{int}A \subseteq \mathrm{int}B$;
   iii) $\mathrm{int}(\mathrm{int}A) = \mathrm{int}A$;
   iv) $\mathrm{int}(A \cap B) = \mathrm{int}A \cap \mathrm{int}B$;
   v) $\mathrm{int}X = X$.

Задача 6. Нехай (X, τ) — топологічний простір, $U \in \tau$, $A \subseteq X$. Довести, що якщо $A \cap U = \emptyset$, то $\mathrm{cl}(A) \cap U = \emptyset$.

Задача 7. Нехай $\mathrm{cl}A \subseteq \mathrm{cl}B$. Чи можна стверджувати, що $A \subseteq B$?

Задача 8. Довести формули $X \backslash \mathrm{cl}A = \mathrm{int}(X \backslash A)$, $X \backslash \mathrm{int}A = \mathrm{cl}(X \backslash A)$, $\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}A))) = \mathrm{int}(\mathrm{cl}A)$, $\mathrm{cl}(\mathrm{int}(\mathrm{cl}(\mathrm{int}A))) = \mathrm{cl}(\mathrm{int}A)$.

Задача 9 (К. Куратовського)**.** Скільки різних множин можна отримати із заданої множини топологічного простору за допомогою операцій замикання та взяття доповнення?

Задача 10. Нехай (X, τ) — топологічний простір, $M \subseteq X$. Чи правильно, що для довільної точки $x \in \mathrm{cl}M$ знайдеться така послідовність елементів $x_n \in M$, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$?

Задача 11. Наведіть приклад множини з двома різними топологіями, у яких збігаються класи збіжних послідовностей.

Задача 12. Нехай (X, τ) — топологічний простір, $A \subseteq X$. Довести, що $\tau_A = \{O \cap A : \ O \in \tau\}$ — топологія на A (індукована топологія).

Задача 13. Доведіть, що для того, щоб довільна відкрита в (A, τ_A) множина B була відкритою в (X, τ), необхідно й достатньо, щоб множина A була відкритою в просторі (X, τ).

Задача 14. Чи можна стверджувати, що якщо $F \subseteq A$ та F замкнена в підпросторі (A, τ_A), то F замкнена в (X, τ)?

Завдання для самостійної роботи

Задача 15. Доведіть, що підмножина B множини A є замкненою в підпросторі (A, τ_A) тоді й лише тоді, коли вона є перетином A та деякої замкненої в X множини.

Задача 16. Нехай $B \subseteq A$. Довести, що замикання множини B в індукованій топології τ_A збігається з множиною $\mathrm{cl}B \cap A$.

Задача 17. Нехай A — замкнена підмножина топологічного простору (X, τ), яку розглядаємо як підпростір. Довести, що якщо $F \subseteq A$ та F замкнена в підпросторі A, то F замкнена в X. Чи можна стверджувати, що якщо $G \subseteq A$ та G відкрита в підпросторі A, то G відкрита в X?

Задача 18. Нехай (X, τ) — топологічний простір, $M \subset X$. Довести, що якщо довільна підмножина множини M замкнена, то множина M не має граничних точок.

Задача 19. Чи може множина граничних точок бути незамкненою?

Задача 20. Довести: A ніде не щільна $\Leftrightarrow$ $\mathrm{cl}A$ ніде не щільна $\Leftrightarrow$ $\mathrm{int}(\mathrm{cl}A) = \emptyset \Leftrightarrow X \setminus \mathrm{cl}A$ скрізь щільна.

Задача 21. Довести, що об'єднання двох ніде не щільних множин є ніде не щільною множиною.

Задача 22. Нехай множина X містить нескінченну кількість елементів, а τ складається з $\emptyset$, X і всіх множин, доповнення до яких скінченне (топологія Зариського). До чого буде збігатися послідовність (x_n), усі елементи якої різні?

Задача 23. Нехай $X = [0,1]$ та $\tau = \{\emptyset, X\} \cup \{U : X \setminus U$ — не більш ніж зліченна$\}$. Довести, що у просторі (X, τ) збіжними є лише ті послідовності, елементи яких, починаючи з деякого номера, збігаються.

Задача 24. Нехай $X = (0,1]$ та $\tau = \{\emptyset, X, (0,a), (0,a) \cup \{1\} : a \in (0,1)\}$. Знайти границю послідовності $x_n = 1 - \frac{1}{n}$.

Задача 25. Нехай $X = (0,1]$, τ породжується базою $\mathfrak{B} = \{X, (a,b) : a, b \in (0,1)\}$. Знайти границю послідовності $x_n = \frac{1}{n}$.

Задача 26. Нехай $X = \mathbb{N}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, F_n : n \in \mathbb{N}\}$, де $F_n = \{n, n+1, n+2 \dots\}$. Знайти границю послідовності $x_n = 2n - 1$ у просторі (X, τ_1). Знайти границю цієї самої послідовності у просторі (X, τ_2), де $\tau_2 = \{\emptyset, X, E_n : n \in \mathbb{N}\}$, $E_n = \{1, 2, \dots, n\}$.

Задача 27. Розглянемо $X = [0, +\infty)$ і сукупність множин τ, що складається з $\emptyset, X$ і всіх множин вигляду $[0, k]$, де $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$. Перевірити, що τ задає топологічну структуру. Знайти границі послідовностей $x_n = 1/n,\ y_n = 100 + 1/n$ у просторі (X, τ).

Задача 28. Розглянемо $X = \mathbb{R}$ і сукупність множин τ, що складається з $\{\emptyset, X\}$ і всіх множин вигляду $(0, k)$, де $k \in \mathbb{Z}, k \geq 0$. Знайти границі послідовностей $x_n = 1/n,\ y_n = 100 + \sqrt{2}/n$.

Задача 29. Розглянемо $X = \mathbb{R}$ і сукупність множин τ, що складається з $\emptyset, X$ і всіх множин вигляду $[4, 6 + 1/k]$, де $k \in \mathbb{Z}, k > 0$. Перевірити, що τ задає топологічну структуру. Знайти границі послідовностей $x_n = 4 + 1/n,\ y_n = 10$ у просторі (X, τ).

Задача 30. Для множин $A_1 = \{1, \sqrt{2}\}, A_2 = \{1, 2\}$ у топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau)$ знайти замикання $\mathrm{cl}(A)$, множину внутрішніх точок $\mathrm{int}(A)$, похідну множину A' та множину ізольованих точок $I(A)$, якщо: а) $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \mathbb{Q}\}$; б) τ — природна топологія. Чи буде множина A замкненою або відкритою?

Задача 31. Для множин $A_1 = \{2\}, A_2 = \{100\}$ у топологічному просторі $(\mathbb{R}, \tau)$ знайти замикання $\mathrm{cl}(A)$, множину внутрішніх точок $\mathrm{int}(A)$, похідну множину A' та множину ізольованих точок $I(A)$, якщо: а) $\tau = \{\mathbb{R}, \emptyset, [10; \infty), [5, \infty), [0, \infty)\}$; б) τ — природна топологія. Чи буде множина A замкненою або відкритою?

1.2. Бази. Аксіоми зліченності

Теоретичні відомості

Означення. Система підмножин $\mathcal{B} \subseteq \tau$ називається базою топологічного простору $T = (X, \tau)$, якщо довільну відкриту множину $U \subseteq X$ можна подати у вигляді об'єднання деяких елементів з $\mathcal{B}$.
Означення. Система околів $\mathcal{V}$ точки $x \in X$ називається фундаментальною системою околів цієї точки, якщо для довільного околу V точки x існує окіл $U \in \mathcal{V}$ такий, що $U \subseteq V$.
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$ задовольняє першу аксіому зліченності, якщо для довільної точки $x \in X$ існує зліченна фундаментальна система околів.
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$ задовольняє другу аксіому зліченності, якщо T має зліченну базу.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 32. Нехай система множин $B \subseteq 2^X$ має властивості:

(1) $X = \bigcup_{O \in B} O$;

(2) $\forall (U, V \in B,\ x \in U \bigcap V)\ \ \exists W \in B:\ x \in W \subseteq U \bigcap V$.

Доведіть, що на X існує єдина топологія τ, для якої система B є базою.

Задача 33. Нехай $X = \{0, 1, 2\}$, $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2\}$, $\beta = \{\emptyset, X, A, B\}$. Чи буде β базою деякої топології на X?

Задача 34. Довести, що якщо топологія простору має зліченну базу, то кожна база цієї топології містить деяку зліченну базу.

Задача 35. Довести, що в будь-якому топологічному просторі зі зліченною базою множина ізольованих точок не більш ніж зліченна.

Задача 36. Довести, що будь-який дискретний топологічний простір, який складається з незліченної кількості точок, задовольняє першу аксіому зліченності й не задовольняє другу.

Задача 37. Якщо топологічний простір має зліченну базу (задовольняє другу аксіому зліченності), то він є сепарабельним.

Задача 38. На $X = \mathbb{R}$ задана топологія τ, породжена базою $\{[a, b) | \, a, b \in \mathbb{R}\}$. Довести:

(i) (X, τ) — сепарабельний;

(ii) (X, τ) задовольняє першу аксіому зліченності;

(iii) (X, τ) не задовольняє другу аксіому зліченності.

Задача 39. Нехай (X, τ) — топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, $M \subseteq X$. Доведіть, що для довільної точки $x \in \mathrm{cl}M$ знайдеться така послідовність елементів $x_n \in M$, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

Задача 40 (Ліндельоф)**.** Доведіть, що в топологічному просторі з другою аксіомою зліченності з довільного відкритого покриття можна виділити не більш ніж зліченне підпокриття.

Завдання для самостійної роботи

Задача 41. На $Y = \mathbb{R}^2$ розглянемо топологію τ, що породжена базою $\{[a, b) \times [c, d) | \, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$. Довести:

(i) Y — сепарабельний;

(ii) простір $\{(x, y) | \, x + y = 1\}$ не сепарабельний в індукованій топології.

Задача 42. Покажіть, що топологічний сепарабельний простір не обов'язково має зліченну базу.

Задача 43. Нехай A — незліченна підмножина топологічного простору, що задовольняє другу аксіому зліченності. Тоді в A є гранична точка для A.

Задача 44. Нехай M — підмножина в сепарабельному топологічному просторі X, у точок якої існують попарно диз'юнктні околи. Довести, що тоді M не більш ніж зліченна.

1.3. Неперервність

Теоретичні відомості

Означення. Функція $f : T_1 \to T_2$, що діє з топологічного простору $T_1 = (X_1, \tau_1)$ у топологічний простір $T_2 = (X_2, \tau_2)$, називається неперервною в точці $x \in X_1$, якщо для довільного околу U точки $f(x)$ існує такий окіл V точки x, що $f(V) \subseteq U$.
Означення. Функція $f : T_1 \to T_2$, що діє з топологічного простору $T_1 = (X_1, \tau_1)$ у топологічний простір $T_2 = (X_2, \tau_2)$, називається гомеоморфізмом, якщо f є неперервною бієкцією й обернена функція f^{-1} теж неперервна.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 45. Довести, що для неперервності функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ необхідно та достатньо, щоб $\forall a, b \in \mathbb{R}$ множини $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\}$ та $B = \{x \in \mathbb{R} : f(x) > b\}$ були відкритими. Навести приклад такої розривної функції $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, що $\forall a \in \mathbb{R}$ множина $A = \{x \in \mathbb{R} : f(x) < a\}$ — відкрита.

Задача 46. Нехай X, Y — топологічні простори. Доведіть, що відображення $f : X \to Y$ неперервне тоді й тільки тоді, коли: 1) прообраз довільної відкритої множини є відкритим; 2) прообраз довільної замкненої множини є замкненим; 3) $f(\mathrm{cl}A) \subseteq \mathrm{cl}f(A)$ для довільної множини $A \subseteq X$.

Задача 47. Бієктивне відображення $f : X \to Y$ є гомеоморфізмом тоді й лише тоді, коли воно зберігає операцію замикання, тобто $\forall A \subseteq X \;\; f(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}f(A)$.

Задача 48. Довести, що проекція відкритої множини W з $X_1 \times X_2$ на будь-який простір X_i є відкритою множиною. (Сформулювати й довести аналогічне твердження для замкненої множини.)

Задача 49. Задано множину функцій $f_\alpha : M \to T$, де M — деяка множина, (T, τ) — топологічний простір. Побудувати найслабшу топологію на M таку, щоб усі f_α стали неперервними.

Завдання для самостійної роботи

Задача 50. Навести приклад неперервного відображення, що не буде відкритим.

Задача 51. Навести приклад неперервного бієктивного відображення, що не буде гомеоморфізмом.

Задача 52. Чи рівнопотужні множини $[0,1]$ та $C([0,1])$?

Задача 53. Нехай $f : X \to Y$ — неперервне відображення. Чи залишиться воно неперервним, якщо:

1) посилити топологію в X;
2) послабити топологію в X;
3) посилити топологію в Y;
4) послабити топологію в Y?

1.4. Аксіоми віддільності

Теоретичні відомості

Аксіома T_0. З двох довільних різних точок топологічного простору $T = (X, \tau)$ хоча б одна має окіл, що не містить іншої точки.
Аксіома T_1. Для двох довільних різних точок x, y топологічного простору $T = (X, \tau)$ існує окіл O_x точки x, що не містить y, та окіл O_y точки y, що не містить x.
Аксіома T_2. Для двох довільних різних точок x та y топологічного простору $T = (X, \tau)$ існують околи O_x та O_y, що не перетинаються.
Аксіома T_3. Для довільної точки x та замкненої множини F, що не містить x, існують такі відкриті множини O_1, O_2, що $x \in O_1$, $F \subseteq O_2$ та $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
Аксіома T_4. Для довільних замкнених множин F_1, F_2 таких, що $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, існують такі відкриті множини O_1, O_2, що $F_1 \subseteq O_1$, $F_2 \subseteq O_2$ та $O_1 \cap O_2 = \emptyset$.
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$, що задовольняє аксіому T_0, називається T_0-простором (або колмогоровським).
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$, що задовольняє аксіому T_1, називається T_1-простором або досяжним.
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$ називається хаусдорфовим, якщо T задовольняє аксіому віддільності T_2.
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$ називається регулярним, якщо T задовольняє аксіоми віддільності T_1 і T_3.
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$, що задовольняє аксіоми T_1 і T_4, називається нормальним.

Зазначимо, що найбільш важливими є поняття хаусдорфового та нормального простору.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 54. Нехай $X = \mathbb{R}^2$, а топологія τ задається $\emptyset$, X, усіма відкритими кругами з центрами на дійсній прямій, а також їхніми можливими об'єднаннями і скінченними перетинами. Чи є простір (X, τ) T_0-простором?

Задача 55. У топологічному T_1-просторі будь-яка скінченна множина є замкненою.

Задача 56. Для того, щоб точка x була граничною точкою множини A у T_1-просторі, необхідно й достатньо, щоб довільний окіл O цієї точки містив нескінченну кількість точок множини A.

Задача 57. Доведіть, що будь-яка топологія, яка сильніша за хаусдорфову, теж хаусдорфова.

Задача 58. Будь-який підпростір хаусдорфового простору є хаусдорфовим. Доведіть.

Задача 59. Нехай X — топологічний простір. Доведіть рівносильність таких тверджень:

(i) X — хаусдорфовий простір;

(ii) перетин усіх замкнених околів довільної точки x є одноточковою множиною $\{x\}$;

(iii) діагональ $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$ є замкненою множиною в просторі $X \times X$.

Задача 60. Нехай X — T_1-простір. Доведіть рівносильність таких тверджень:

(i) X — регулярний простір;

(ii) для будь-якої точки $x \in X$ і будь-якого її околу U існує замкнений окіл V точки x, що міститься в U;

(iii) множина всіх замкнених околів будь-якої точки $x \in X$ є фундаментальною системою околів (базою) цієї точки.

Задача 61. Нехай X — T_1-простір. Доведіть рівносильність таких тверджень:

(i) X — нормальний простір;

(ii) для будь-якої замкненої множини $F \subseteq X$ і будь-якого її околу U існує такий окіл V множини F, що $\mathrm{cl}V \subseteq U$.

Задача 62. Доведіть, що X є T_4-простором тоді й тільки тоді, коли для довільних диз'юнктиних замкнених в X множин F_1, F_2 існує така відкрита множина $U \supseteq F_1$, що $\mathrm{cl}U \cap F_2 = \emptyset$.

Задача 63. Доведіть, що X є T_4-простором тоді й тільки тоді, коли для довільних відкритих в X множин G_1, G_2 таких, що $G_1 \cup G_2 = X$, знайдуться замкнені в X множини $F_1 \subseteq G_1$, $F_2 \subseteq G_2$ такі, що $F_1 \cup F_2 = X$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 64. Довести, що якщо для довільних різних точок x, y топологічного простору X існує неперервне відображення $f\colon X \to Y$, де Y — довільний хаусдорфовий простір, таке, що $f(x) \neq f(y)$, то X — хаусдорфовий.

Задача 65. Нехай f і g — неперервні відображення топологічного простору X у хаусдорфовий простір Y. Тоді множина $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ замкнена в X. Довести.

Задача 66. Нехай f і g — неперервні відображення топологічного простору X у хаусдорфовий простір Y. Довести, що якщо $f(x) = g(x)$ у всіх точках деякої скрізь щільної в X множини, то $f = g$.

Задача 67. Довести, що графік неперервного відображення f топологічного простору X у хаусдорфовий простір Y є замкненою множиною в $X \times Y$. Графік f — це множина $\{(x, f(x)) :\ x \in X\}$.

Задача 68. На множині $X = \{1, 2, 3, 4\}$ задайте таку топологію τ, щоб (X, τ) був T_4-простором, але не T_3-простором.

1.5. Компактні простори

Теоретичні відомості

Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$ називається компактним, якщо з довільного покриття X відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття.
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$ називається зліченно компактним, якщо з довільного зліченного покриття X відкритими множинами можна виділити скінченне підпокриття.
Означення. Топологічний простір $T = (X, \tau)$ називається секвенційно компактним, якщо з довільної нескінченної послідовності елементів із X можна виділити збіжну підпослідовність.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 69. Покажіть, що скінченні та антидискретні простори є компактними, а компактний простір з дискретною топологією обов'язково є скінченним.

Задача 70. Чи буде компактним простір із топологією Зариського?

Задача 71. Доведіть, що топологічний простір (X, τ) є компактним тоді й тільки тоді, коли кожна центрована система його замкнених підмножин має непорожній перетин.

Задача 72. Доведіть, що:

1) замкнена підмножина компактного топологічного простору компактна;
2) компактна підмножина хаусдорфового топологічного простору є замкненою.

Задача 73. Доведіть, що:

1) неперервний образ компактного топологічного простору є компактним;
2) неперервне відображення компактного простору в хаусдорфовий є замкненим.

Задача 74. Доведіть, що:

1) неперервна бієкція компактного топологічного простору на хаусдорфовий топологічний простір є гомеоморфізмом;
2) серед усіх хаусдорфових топологій компактні топології мінімальні.

Задача 75. Доведіть, що хаусдорфовий компактний топологічний простір — нормальний.

Задача 76. Топологічний простір називають локально компактним, якщо кожна його точка має компактний окіл. Довести, що відкрита підмножина хаусдорфового компактного простору є хаусдорфовим локально компактним простором.

Задача 77 (одноточкова компактифікація Александрова)**.** Нехай (X, τ) — локально компактний хаусдорфовий топологічний простір. Розглянемо $Y = X \cup \{\infty\}$, де ∞ — «точка», що не належить X. Назвемо множину $O \subseteq Y$ відкритою, якщо $\infty \notin O$ та $O \in \tau$, або $\infty \in O$ та множина $Y \backslash O$ компактна. Довести, що Y — компактний хаусдорфовий простір.

Задача 78. Доведіть, що хаусдорфовий компактний топологічний простір не можна подати у вигляді зліченного об'єднання ніде не щільних підмножин.

Задача 79. Доведіть, що (X, τ) — компактний топологічний простір $\Leftrightarrow$ кожна центрована система підмножин X має спільну точку дотику.

Задача 80. Нехай кожному індексу $\alpha \in A$ поставлено у відповідність простір (X_α, τ_α). Декартовий добуток $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ множин X_α — це множина всіх відображень $f : A \to \bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha$ із властивістю: $f(\alpha) \in X_\alpha$ для всіх $\alpha \in A$. Доведіть, що:

1) система всіх множин вигляду $\prod_{\alpha \in A} O_\alpha$, де $O_\alpha \in \tau_\alpha$ та $O_\alpha \neq X_\alpha$ для скінченної кількості індексів $\alpha \in A$ — база деякої топології. Цю топологію називають тихоновською та позначають $\prod_{\alpha \in A} \tau_\alpha$, а простір $\left(\prod_{\alpha \in A} X_\alpha, \prod_{\alpha \in A} \tau_\alpha\right)$ — тихоновським (топологічним) добутком просторів (X_α, τ_α);
2) добуток непорожніх топологічних просторів (X_α, τ_α) — хаусдорфовий $\Leftrightarrow$ усі простори (X_α, τ_α) хаусдорфові;

3) (теорема Тихонова) добуток непорожніх топологічних просторів (X_α, τ_α) компактний $\Leftrightarrow$ усі простори (X_α, τ_α) компактні.

Задача 81. Доведіть, що топологічний добуток має зліченну базу тоді й тільки тоді, коли кожний координатний простір має зліченну базу та топології всіх координатних просторів, крім зліченної кількості, тривіальні.

Задача 82. Доведіть, що топологічний добуток зліченної кількості сепарабельних топологічних просторів сепарабельний.

Задача 83. Доведіть, що топологічний добуток

$$[0,1]^{[0,1]} = \prod_{\alpha \in [0,1]} X_\alpha,$$

де $X_\alpha = [0,1]$ зі звичайною топологією, сепарабельний, але не має зліченної бази.

Завдання для самостійної роботи

Задача 84. Побудуйте приклад компактного простору, який не є секвенційно компактним.

Задача 85. Доведіть, що хаусдорфовий топологічний простір (X, τ) злічeнно компактний $\Leftrightarrow$ кожна нескінченна підмножина X має граничну точку.

Зв'язок між типами компактності

$$\begin{tikzcd} \text{зліченна компактність} & \text{компактність} \arrow[l] \\ \text{секвенційна компактність} \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

Задача 86. Доведіть, що для простору зі зліченною базою компактність та зліченна компактність рівносильні.

Задача 87. Доведіть, що для хаусдорфових просторів зі зліченною базою компактність, зліченна компактність та секвенційна компактність рівносильні.

Задача 88. Нехай (X, τ) — топологічний простір. Функцію $f : X \to \mathbb{R}$ називають півнеперервною знизу, якщо множина $\mathrm{epi}(f) = \{(x, \lambda) \in X \times \mathbb{R} : \ g(x) \leq \lambda\}$ замкнена в $X \times \mathbb{R}$. Доведіть, що:

1) функція $f : X \to \mathbb{R}$ півнеперервна знизу $\Leftrightarrow$ для довільного $\lambda \in \mathbb{R}$ множина $\{f \leq \lambda\} = \{x \in X : \ f(x) \leq \lambda\}$ замкнена в X;

2) функція $f : X \to \mathbb{R}$ півнеперервна знизу $\Leftrightarrow$ для довільного $x \in X$ та для довільного $\epsilon > 0$ існує такий окіл O точки x, що $f(y) \geq f(x) - \epsilon$ для всіх $y \in O$;

3) для півнеперервної функції $f : X \to \mathbb{R}$ із $x_n \to x$ випливає
$$f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n).$$

Задача 89. Нехай (X, τ) — компактний топологічний простір, $f : X \to \mathbb{R}$ — півнеперервна знизу функція. Доведіть, що досягається $\inf_X f$.

Задача 90. Навести приклад нефінально компактного та регулярного сепарабельного простору.[1]

[1]Топологічний простір називається фінально компактним (або простором Ліндельофа), якщо довільне його відкрите покриття містить не більш ніж зліченне підпокриття.

Розділ 2

Метричні простори

2.1. Властивості метрики та збіжність у метричних просторах

Теоретичні відомості

Означення. Функція $d: \ X \times X \to [0 + \infty)$ називається метрикою на множині X, якщо виконано такі умови:

- $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;
- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$;
- $\forall x, y, z \in X : d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Упорядкована пара $M = (X, d)$ при цьому називається метричним простором.

Означення. Відкритою кулею радіусом r із центром у точці x_0 називається множина

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) < r\}.$$

Означення. Замкненою кулею радіусом r із центром у точці x_0 називається множина

$$\overline{B}(x_0, r) = \{x \in X : \ d(x, x_0) \leq r\}.$$

Завдання для аудиторної роботи

Задача 91. Які з функцій

$$
\begin{aligned}
&(1)\, d(x,y) = \sqrt{|x-y|},\\
&(2)\, d(x,y) = |\sin(x-y)|,\\
&(3)\, d(x,y) = \min\{1, |x-y|\},\\
&(4)\, d(x,y) = |x^2-y^2|,\ x,y \in \mathbb{R},
\end{aligned}
$$

визначають метрику на множині дійсних чисел $\mathbb{R}$?

Задача 92. Нехай X — деяка множина та

$$
d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y,\\ 1, & x \neq y. \end{cases}
$$

Охарактеризувати відкриті й замкнені множини в (X,d).

Задача 93. Чи буде множина

$$
A = \{x :\ x(t) = 0,\ \ t \in [0,1/2]\}
$$

відкритою або замкненою у просторі $(C[0,1])$ (з рівномірною метрикою)?

Задача 94. Чи буде множина

$$
A = \{x :\ x(1/2) > 0\}
$$

відкритою або замкненою у просторі $(C[0,1])$ (з рівномірною метрикою)?

Задача 95. Нехай (X,d) — метричний простір, а x, y, z, $t \in X$. Довести, що

$$
\begin{aligned}
&|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y),\\
&|d(x,z) - d(y,t)| \le d(x,y) + d(z,t).
\end{aligned}
$$

Задача 96. Нехай $x_n \to x$ у метричному просторі (X,d). Доведіть, що $d(x_n,y) \to d(x,y)$ для довільної точки $y \in X$.

Задача 97. Нехай (x_n) — збіжна послідовність у просторі (X,d). Доведіть, що множина $\{d(x_n,x_m) :\ n,m \in \mathbb{N}\}$ обмежена.

Задача 98. Нехай (x_n) — збіжна послідовність у метричному просторі (X, d). Доведіть, що числова послідовність чисел $d(x_n, x_{n+1})$ збіжна і знайдіть її границю.

Задача 99. Доведіть, що в довільному метричному просторі $\mathrm{cl}B(x,r) \subseteq \overline{B}(x,r)$. Наведіть приклад ситуації $\mathrm{cl}B(x,r) \subset \overline{B}(x,r)$.

Задача 100. Наведіть приклад метричного простору, у якому деяка відкрита куля є замкненою множиною, але не є замкненою кулею.

Задача 101. Доведіть сепарабельність простору $C([0,1])$ з рівномірною метрикою.

Задача 102. Дослідіть сепарабельність просторів c_0, c та ℓ_p $(1 \leq p \leq +\infty)$.

Задача 103. Доведіть, що довільна замкнена множина метричного простору є перетином зліченної кількості відкритих множин.

Задача 104. Нехай (X, d) — метричний простір, $A \subseteq X$. Доведіть, що функція $x \mapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$ рівномірно неперервна на множині X.

Задача 105. Доведіть, що відображення f метричного простору (X, d_X) у метричний простір (Y, d_Y) неперервне тоді й тільки тоді, коли для довільної точки $x \in X$ із множини $A \subseteq X$ із рівності $d_X(x, A) = 0$ випливає $d_Y(f(x), f(A)) = 0$. Сформулюйте та доведіть подібний критерій рівномірної неперервності.

Задача 106. Чи завжди одноточкова множина є ніде не щільною в метричному просторі?

Задача 107. Довести, що доповнення відкритої скрізь щільної множини є ніде не щільним.

Задача 108. Доведіть, що множина функцій $A = \left\{f_n(x) = nx^2\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ ніде не щільна в просторі $C([0,1])$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 109. Нехай X — деяка множина та

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \neq y. \end{cases}$$

За яких умов на множину X простір (X,d) буде сепарабельним?

Задача 110. Чи буде множина $A = \{\ln n - \ln m : \ n, m \in \mathbb{N}\}$ щільною у просторі $\mathbb{R}$?

Задача 111. Чи буде множина $A = \{m/\sqrt{n} : \ m \in \mathbb{Z}, \ n \in \mathbb{N}\}$ щільною у просторі $\mathbb{R}$?

Задача 112. Доведіть, що довільний підпростір Y сепарабельного метричного простору X є сепарабельним.

Задача 113. Покажіть, що в метричному просторі довільна одноточкова множина замкнена. Доведіть, що метричний простір є нормальним топологічним простором.

Задача 114. Розташувати в одиничній кулі простору ℓ_2 зліченну кількість куль із радіусом $\frac{1}{4}$, що попарно не перетинаються.

Задача 115. Нехай (x_n) — фундаментальна послідовність у метричному просторі X. Припустимо, що $x_{n_k} \to x$ для деякої підпослідовності (x_{n_k}). Доведіть, що $x_n \to x$.

Задача 116. Нехай (x_n) — послідовність у метричному просторі X, $x \in X$. Припустимо, що довільна підпослідовність (x_{n_k}) має підпослідовність $(x_{n_{k_l}})$, збіжну до x. Доведіть, що $x_n \to x$.

Задача 117. У метричному просторі (X,d) задано послідовність (x_n) таку, що $d(x_n, x_{n+2}) \leq n^{-2}$ і $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. Доведіть, що (x_n) — фундаментальна послідовність.

Задача 118. У метричному просторі (X,d) задано послідовність (x_n) таку, що $d(x_n, x_{n+2}) \leq n^{-1}$ і $d(x_n, x_{n+1}) \to 0$. Чи обов'язково (x_n) — фундаментальна послідовність?

Задача 119. Чи можна метризувати поточкову збіжність послідовностей обмежених функцій $[0,1] \to \mathbb{R}$?

Задача 120 (лема Макшейна)**.** Нехай (X,d) — метричний простір, $A \subseteq X$, $k > 0$. Тоді довільну k–ліпшицеву функцію з A в $\mathbb{R}$ можна продовжити до k–ліпшицевої функції з X у $\mathbb{R}$.

2.2. Повні метричні простори

Теоретичні відомості

Означення. Послідовність елементів (x_n) метричного простору $M = (X, d)$ називається фундаментальною, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число $N(\varepsilon)$, що для всіх $m, n > N(\varepsilon)$ виконується $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Означення. Метричний простір M називається повним, якщо довільна фундаментальна послідовність у M є збіжною.

Теорема. Метричний простір є повним тоді й лише тоді, коли довільна послідовність непорожніх, замкнених, вкладених куль, радіуси яких прямують до нуля, має непорожній перетин.

Означення. Повний метричний простір $\overline{E}$ називається поповненням метричного простору E, якщо $E \subseteq \overline{E}$ та E є щільним в $\overline{E}$.

Теорема. Будь-який метричний простір має поповнення, єдине з точністю до ізометрії, що залишає точки простору нерухомими.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 121. Довести, що $(\mathbb{N}, d)$, де

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \quad d(n,m) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = n, \\ 1 + \frac{1}{n+m}, & \text{якщо } m \neq n, \end{cases}$$

є повним метричним простором.

Задача 122. Нехай $\mathbb{R}^\infty$ — множина всіх послідовностей дійсних чисел $x = (x_n)$ і

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^\infty \quad d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Довести, що $(\mathbb{R}^\infty, d)$ — повний сепарабельний метричний простір.

Задача 123. Дослідити на повноту простір $(C([0,1]), d)$, де

$$\forall x, y \in C([0,1]) \quad d(x,y) = \int_0^1 |x(t) - y(t)| \, dt.$$

Задача 124. Доведіть повноту простору $C_0([0,+\infty)) = \{f \in C([0,+\infty)) : \ f(x) \to 0, \, x \to +\infty\}$ з рівномірною метрикою $d(f,g) = \max_{x \in [0,+\infty)} |f(x) - g(x)|$.

Задача 125. Нехай (X, d) — повний метричний простір і $Y \subseteq X$. Довести, що простір (Y, d) повний тоді й лише тоді, коли Y — замкнена множина.

Задача 126. Довести, що рівномірно неперервна функція на метричному просторі однозначно продовжується до неперервної функції на його поповненні й це продовження рівномірно неперервне. Показати, що припущення про рівномірну неперервність суттєве.

Задача 127. Метричний простір (X, d) повний тоді й тільки тоді, коли довільна послідовність непорожніх вкладених замкнених куль із прямуючими до нуля радіусами має рівно одну спільну точку.

Задача 128. Доведіть, що повний метричний простір є множиною другої категорії.

Задача 129. Нехай (X, d) — повний метричний простір, $\{G_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — зліченний набір відкритих скрізь щільних підмножин X. Довести, що множина $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n$ непорожня та скрізь щільна.

Задача 130. Доведіть, що відкритий круг на площині $\mathbb{R}^2$ не можна розбити на дві непорожні відкриті підмножини (метрика на площині стандартна).

Задача 131. Доведіть, що замкнений круг на площині $\mathbb{R}^2$ не можна розбити на дві непорожні замкнені підмножини (метрика на площині стандартна).

Задача 132. Довести, що кожна непорожня досконала підмножина $\mathbb{R}$ континуальна.

Завдання для самостійної роботи

Задача 133. Нехай Y — підпростір $C([0, 1])$, що складається з усіх поліномів. Чи буде Y повним метричним простором?

Задача 134. Доведіть, що простір $B(X)$ заданих на непорожній множині X обмежених дійснозначних функцій повний відносно метрики $d(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|$.

Задача 135. Доведіть, що довільний метричний простір (X, d) ізометричний підпростору простору $B(X)$.

Задача 136. Виведіть із попередніх двох задач теорему про існування поповнення.

Задача 137. Обґрунтуйте таку конструкцію поповнення метричного простору (X, d). Нехай $\widetilde{X}$ — простір класів еквівалентності фундаментальних послідовностей $x = (x_n)$ простору X, де $x = (x_n)$ та $y = (y_n)$ вважаються еквівалентними, якщо фундаметнальна послідовність $x_1, y_1, x_2, y_2, ..., x_n, y_n, ...$, а метрика така: $\widetilde{d}(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$. Вкладення X в $\widetilde{X}$ задано формулою $x \mapsto (x, x, ...)$.

Задача 138. Наведіть приклад множини X, таких двох метрик d_1 і d_2 на ній, що (X, d_1) — повний метричний простір, (X, d_2) — неповний метричний простір. Наведіть приклад двох гомеоморфних метричних просторів, один з яких повний, а інший — ні.

Задача 139. Нехай (X, d) — повний метричний простір, $X = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ і кожна з множин F_n є замкненою. Довести, що принаймні одна з множин F_n має непорожню внутрішність.

Задача 140. Нехай (X, d) — повний метричний простір, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — зліченний набір замкнених підмножин X, причому $\mathrm{int} X_n = \emptyset$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Тоді $\mathrm{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n\right) = \emptyset$.

Задача 141. Довести, що множину $\mathbb{Q}$ не можна подати у вигляді перетину не більш ніж зліченної кількості відкритих множин.

Задача 142. Установити існування такої функції $f \in C([0, 1])$, що для всіх $x \in [0, 1)$:

$$\overline{\lim}_{h\to 0+0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{h} = +\infty.$$

Задача 143. Доведіть, що замкнену опуклу множину $A \subseteq \mathbb{R}^n$ не можна розбити на дві непорожні замкнені підмножини (метрика на $\mathbb{R}^n$ стандартна).

Задача 144. Доведіть, що відкриту опуклу множину $A \subseteq \mathbb{R}^n$ не можна розбити на дві непорожні відкриті підмножини (метрика на $\mathbb{R}^n$ стандартна).

2.3. Компактні метричні простори

Теоретичні відомості

Означення. Метричний простір E називається компактним, якщо компактним є відповідний топологічний простір з породженою топологією.

Означення. Нехай A, $S \subseteq X$ та $\varepsilon > 0$. Множина S називається ε-сіткою для множини A, якщо для довільного елемента $x \in A$ існує елемент $y \in S$ такий, що $d(x, y) < \varepsilon$.

Означення. Множина A в метричному просторі (X, d) називається цілком обмеженою, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна ε-сітка для множини A.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 145. Нехай (X, d) — метричний простір. Доведіть, що такі твердження є еквівалентними:

(i) (X, d) — компактний метричний простір;

(ii) (X, d) — повний і цілком обмежений метричний простір.

Задача 146. Нехай (X, d) — метричний простір. Доведіть, що такі твердження є еквівалентними:

(i) (X, d) — компактний метричний простір;

(ii) із довільної послідовності точок простору (X, d) можна вибрати збіжну підпослідовність.

Задача 147. Доведіть, що компактний метричний простір є повним та сепарабельним.

Задача 148. Нехай (X, d) — компактний метричний простір, $f \in C(X)$. Покажіть, що досягається $\inf_X f$.

Задача 149. Нехай K — компактна множина метричного простору (X, d). Доведіть, що існують такі точки $x, y \in K$, що $d(x, y) = \operatorname{diam}(K)$.

Задача 150. Наведіть приклад замкненої, обмеженої, але некомпактної множини у просторі ℓ_2.

Задача 151. Покажіть, що:

1) множина елементів $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n}, 0, ...\right)$ не є компактною в просторі ℓ_1;

2) множина елементів $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n}}_{n^2}, 0, ...\right)$ не є компактною в просторі ℓ_2;

3) множина елементів $x_n = \left(1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{n}, 0, ...\right)$ є компактною в просторі ℓ_3.

Задача 152. Доведіть, що компакт неможливо ізометрично відобразити на власну підмножину.

Задача 153 (критерій компактності в ℓ_2)**.** Множина $K \subseteq \ell_2$ компактна $\Leftrightarrow$ множина $K \subseteq \ell_2$ замкнена, обмежена та $\forall \epsilon > 0$ $\exists n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in K$ $\sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^2 < \epsilon$.

Задача 154 (критерій Асколі – Арцела)**.** Доведіть еквівалентність: множина $K \subseteq C([0,1])$ компактна $\Leftrightarrow$ множина $K \subseteq C([0,1])$ замкнена, обмежена та одностайно неперервна.

Задача 155. Покажіть, що замкнені кулі просторів ℓ_2 та $C([0,1])$ (метрика рівномірна) некомпактні.

Задача 156. Доведіть ніде не щільність компактних множин просторів ℓ_2 та $C([0,1])$ (метрика рівномірна).

Завдання для самостійної роботи

Задача 157. Нехай A, B — замкнені підмножини метричного простору (X, d), при цьому A — компактна множина, а $A \cap B = \emptyset$. Доведіть, що існує така точка $x \in A$, що $d(x, B) = d(A, B)$.

Задача 158. Нехай A, B — компактні підмножини метричного простору (X, d), при цьому $A \cap B = \emptyset$. Доведіть, що існують такі точки $x \in A$, $y \in B$, що $d(x, y) = d(A, B)$.

Задача 159. Доведіть, що множина першої категорії в компактному метричному просторі має скрізь щільне доповнення.

Задача 160. Нехай $(\alpha_n) \in \ell_2$, $\alpha_n \geq 0$. Доведіть, що множина

$$B = \{x \in \ell_2 : \ |x_n| \leq \alpha_n\}$$

компактна в просторі ℓ_2.

Задача 161. Нехай $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to +\infty$. Доведіть, що множина

$$E = \left\{ x \in \ell_2 : \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \leq 1 \right\}$$

компактна в ℓ_2.

Задача 162. Доведіть, що метричний простір (X, d) компактний тоді й тільки тоді, коли довільна неперервна функція $f : X \to \mathbb{R}$ обмежена на ньому.

Задача 163. Нехай (X, d_X), (Y, d_Y) — метричні простори, при цьому (Y, d_Y) — компактний простір. Нехай $f \in C(X \times Y)$ та $g(x) = \max_{y \in Y} f(x, y)$. Довести, що $g \in C(X)$.

Задача 164. Нехай X — повний метричний простір та $A \subseteq X$ — непорожня обмежена множина. Мірою некомпактності Куратовського множини A називають величину

$$\alpha(A) = \inf \{\epsilon > 0 : \ \text{існує скінченне покриття множини } A \\ \text{множинами з } \operatorname{diam} < \epsilon\}.$$

Мірою некомпактності Хаусдорфа множини A називають величину

$$\chi(A) = \inf \{\epsilon > 0 : \ \text{існує скінченна } \ \epsilon\text{–сітка множини } A\}.$$

Доведіть нерівність

$$\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A).$$

Задача 165. Покажіть, що для одиничної кулі B простору ℓ_2 має місце

$$\chi(B) = 1, \ \ \alpha(B) = 2,$$

де α, χ — міри некомпактності Куратовського та Хаусдорфа.

2.4. Принцип стискаючих відображень

Теоретичні відомості

Означення. Відображення f, що діє в метричному просторі (X, d), називається стискаючим, якщо існує число $\alpha \in [0, 1)$ таке, що для всіх $x, y \in X$ має місце нерівність $d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y)$.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 166 (С. Банах)**.** Нехай (X, d) — повний метричний простір, а відображення $f : X \to X$ задовольняє умову

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha d(x, y) \quad \forall x, y \in X,$$

де $\alpha \in [0, 1)$. Доведіть, що відображення f має єдину нерухому точку.

Задача 167. Чи можна у формулюванні принципу стискаючих відображень зняти умову повноти метричного простору?

Задача 168. Нехай (X, d) — повний метричний простір, а відображення $f : X \to X$ задовольняє умову

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X, \;\; x \neq y.$$

Чи завжди таке відображення має нерухому точку?

Задача 169. Нехай (X, d) — компактний метричний простір, а відображення $f : X \to X$ задовольняє умову

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X, \; x \neq y.$$

Довести, що відображення f має єдину нерухому точку.

Задача 170. Нехай (X, d) — повний метричний простір і задано відображення $f : X \to X$. Відомо, що при деякому $n \in \mathbb{N}$ відображення $f^n = \underbrace{f(f(f(\ldots f(}_{n} x))))$ є стискаючим. Доведіть, що f має єдину нерухому точку.

Задача 171. Нехай (X, d) — повний метричний простір. Відображення $f : X \to X$ неперервне, а $v : X \to [0, +\infty)$ задовольняє умову

$$d(x, f(x)) \le v(x) - v(f(x)) \quad \forall x \in X.$$

Доведіть, що для довільної точки $x_0 \in X$ послідовність $x_n = f(x_{n-1})$ збігається до нерухомої точки відображення f.

Задача 172. Функція $f \in C([a, b] \times \mathbb{R})$ задовольняє умову

$$\exists m > 0\ \exists M \ge m\ \forall x \in [a, b]$$
$$\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R},\ y_1 \ne y_2 :\ m \le \frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2} \le M.$$

Довести, що існує єдина функція $g \in C([a, b])$ така, що $f(x, g(x)) = 0$ для всіх $x \in [a, b]$.

Задача 173. Розглянемо нескінченну систему рівнянь

$$x_k = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ki} x_i + b_k, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

де $b = (b_i) \in \ell_\infty$. Доведіть, що при $\sup_k \sum_{i=1}^{\infty} |a_{ki}| < 1$ система має єдиний розв'язок у ℓ_∞.

Задача 174. Довести, що рівняння $y(x) = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{\sin(xs)} y(s)\, ds + f(x)$ $\forall x \in [0, 1]$, де $f \in C([0, 1])$, має єдиний розв'язок $y \in C([0, 1])$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 175. Доведіть, що послідовність дробів

$$2,\ 2 + \frac{1}{2},\ 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}, \ldots$$

збіжна та знайдіть її границю.

Задача 176. Нехай (X, d) — метричний простір, а відображення $f : X \to X$ задовольняє умову

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X,\ \ x \ne y.$$

Припустимо, що точка $x_0 \in X$ така, що послідовність ітерацій $x_n = f(x_{n-1})$ містить підпослідовність, яка збігається до $x_\infty \in X$. Довести, що x_∞ — єдина нерухома точка відображення f.

Задача 177. Нехай у системі (2.1) $b = (b_1, b_2, ...) \in \ell_1$. Доведіть, що при $\sup_i \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ki}| < 1$ система має єдиний розв'язок у просторі ℓ_1.

Задача 178. Нехай у системі (2.1) $b = (b_1, b_2, ...) \in \ell_2$. Доведіть, що при $\sum_{k,i=1}^{\infty} |a_{ki}|^2 < 1$ система має єдиний розв'язок у просторі ℓ_2.

Задача 179. Чи є вірним твердження: якщо в метричному просторі будь–яке стискаюче відображення має нерухому точку, то простір є повним?

Задача 180. Доведіть, що рівняння $x + \frac{1}{2}\sin x + f(t) = 0$ має єдиний розв'язок $x = x(t)$ у просторі $C([a, b])$.

Задача 181. Доведіть, що рівняння $x(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 t\xi^2 x(\xi)d\xi + 1$ має єдиний розв'язок $x = x(t)$ у просторі $C([0, 1])$.

Задача 182. Доведіть, що рівняння $x(t) = \frac{1}{2}\int_0^1 e^{t-\xi} x(\xi)d\xi + 1$ має єдиний розв'язок $x = x(t)$ у просторі $C([0, 1])$.

Розділ 3

Елементи лінійного аналізу

3.1. Лінійні нормовані простори

Теоретичні відомості

Означення. Функція $\|\cdot\| : E \to [0, +\infty)$, визначена на лінійному просторі E, називається нормою, якщо виконано такі умови:

- $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\forall x \in E,\ \alpha \in \mathbb{R} : \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$;
- $\forall x, y \in E : \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Упорядкована пара $(E, \|\cdot\|)$ при цьому називається лінійним нормованим простором.
Означення. Послідовність елементів (x_n), $x_n \in E$ називається збіжною до $x \in E$ у лінійному нормованому просторі $(E, \|\cdot\|)$, якщо $\|x_n - x\| \to 0$, $n \to \infty$.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 183. Чи нормується довільний лінійний простір?

Задача 184. Доведіть, що функція

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |\xi_k|^p \right)^{1/p}$$

не є нормою на $\mathbb{R}^n$ при $n > 1$ і $p < 1$.

Задача 185. Покажіть, що норми $\|f\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$ та $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\,dx$ не еквівалентні на $C([a,b])$.

Задача 186. Доведіть еквівалентність усіх норм у просторі $\mathbb{R}^n$.

Задача 187. Чи є простір ℓ_1 повним відносно норми $\|x\|_\infty = \max_n |\xi_n|$, $x = (\xi_n) \in \ell_1$?

Задача 188. Чи збігається у просторі E послідовність (x_n), якщо:

1) $x_n = \left(\underbrace{\frac{1}{n}, 0, ..., 1}_{n}, 0, ...\right)$, $E = \ell_2$;

2) $x_n = \left(\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n^2}, \frac{1}{(n+1)^2} \cdots\right)$, $E = \ell_1$;

3) $x_n(t) = t^n$, $E = C([0,1])$?

Задача 189. Доведіть замкненість довільного скінченновимірного лінійного підпростору лінійного нормованого простору.

Задача 190. Доведіть скінченновимірність лінійного нормованого простору з компактною замкненою кулею.

Задача 191. Покажіть, що для одиничної кулі B нескінченновимірного лінійного нормованого простору має місце

$$\chi(B) = 1, \;\; \alpha(B) = 2,$$

де α, χ — міри некомпактності Куратовського та Хаусдорфа.

Задача 192. Доведіть, що в нескінченновимірному лінійному нормованому просторі компактна множина ніде не щільна.

Задача 193. Покажіть, що множина $C^1([0,1])$ є множиною першої категорії в просторі $C([0,1])$.

Задача 194. Доведіть, що в банаховому просторі послідовність непорожніх замкнених вкладених куль має непорожній перетин.

Задача 195. У просторі $C([0,1])$ побудувати послідовність непорожніх вкладених опуклих замкнених обмежених множин, що мають порожній перетин.

Завдання для самостійної роботи

Задача 196. Чи є нормою функція:

1) $p(f) = |f(1) - f(0)| + \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{d}{dx}f(x)\right|$, $f \in C^1([0,1])$;
2) $p(f) = |f(0)| + \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{d}{dx}f(x)\right|$, $f \in C^1([0,1])$;
3) $p(f) = |f(1)| + |f(0)| + \max_{x\in[0,1]} \left|\frac{d^2}{dx^2}f(x)\right|$, $f \in C^2([0,1])$?

Задача 197. За яких умов на функцію $\alpha \in C([0,1])$ функція

$$\varphi(x) = \max_{0\le t\le 1} \alpha(t)|x(t)|$$

є нормою в $C([0,1])$?

Задача 198. Знайти норму елемента x в заданому просторі X:

1) $x(t) = t^n$, $X = C([0,1])$;
2) $x = (1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, ...)$, $X = \ell_2$;
3) $x(t) = t$, $X = L_4([0,1])$;
4) $x(t) = \sin t + \cos t$, $X = L_2([0,1])$;
5) $x = (\frac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}, \frac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}, \frac{1}{\sqrt{3\cdot 4}}, ...)$, $X = \ell_2$;
6) $x(t) = t^2$, $X = C^1([0,1])$.

Задача 199. Довести, що простір $C([-1,1])$ з нормою

$$\int_{-1}^{1} |x(t)|dt$$

не є банаховим.

Задача 200. Нехай у лінійному просторі E задано дві норми $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, причому $\|x\|_0 \le \|x\|_1$ $\forall x \in E$ та простори $(E, \|\cdot\|_0)$, $(E, \|\cdot\|_1)$ банахові. Доведіть еквівалентність цих норм.

Задача 201. Дослідити на збіжність послідовність (x_n) у заданому просторі X:

1) $x_n = (1, \underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1/n, 0, 0, ...)$, $X = \ell_p$;

2) $x_n = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n}}, 0, 0, ...)$, $X = \ell_p$;

3) $x_n = (\underbrace{0, ..., 0}_{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, ...)$, $X = \ell_p$;

4) $x_n(t) = e^{-t/n}$, $X = C([0, 1])$;

5) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$, $X = L_p([0, 1])$;

6) $x_n(t) = t^n - t^{3n}$, $X = C([0, 1])$.

3.2. Лінійні неперервні функціонали

Теоретичні відомості

Означення. Число

$$\|f\| = \sup_{x \in E} \frac{|f(x)|}{\|x\|}$$

називається нормою лінійного функціонала f у лінійному нормованому просторі $(E, \|\cdot\|)$.

Означення. Множина всіх лінійних неперервних функціоналів на просторі $F = (E, \|\cdot\|)$ з уведеними поточковими операціями додавання функціоналів та множення на дійсні числа називається спряженим простором і позначається F^*.

Теорема (Хана – Банаха)**.** Нехай Y — підпростір лінійного нормованого простору $(X, \|\cdot\|)$. Для довільного функціонала $f \in Y^*$ існує функціонал $F \in X^*$ такий, що $\forall x \in Y: \ f(x) = F(x)$ та $\|f\|_Y = \|F\|_X$.

Теорема (Банаха – Штейнгауза)**.** Нехай E — лінійний нормований простір і задано послідовність функціоналів (f_n), $f_n \in E^*$. Якщо $\forall x \in E\ \exists c(x) > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: \ |f_n(x)| < c(x)$, то $\exists c > 0\ \forall n \in \mathbb{N}: \|f_n\| < c$.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 202. З'ясуйте, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайдіть норми:

1) $E = C([0,1])$, $f(x) = x(1/2)$;
2) $E = C([0,1])$ з нормою $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|\,dt$, $f(x) = x(1/2)$;
3) $E = C([0,1])$, $f(x) = \int_0^1 x(t)\,\mathrm{sign}(t - 1/2)\,dt$;
4) $E = \mathbb{R}^n$ з нормою $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le \infty)$, $f(x) = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$;
5) $E = \ell_2$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$.

Задача 203. Нехай $f \in E^* \setminus \{0\}$ та $L = \{x \in E : f(x) = 1\}$. Доведіть, що $\frac{1}{\|f\|} = \inf_{x \in L} \|x\|$.

Задача 204. Нехай $f \in E^*$ та $\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}$. Доведіть, що $\frac{|f(x)|}{\|f\|} = \inf_{y \in \ker f} \|y - x\|$.

Задача 205. Знайдіть норму лінійного функціонала f, заданого на просторі E, та з'ясуйте, чи досягається вона на замкненій одиничній кулі, якщо:

(1) $E = C([0,1])$, $f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x(t_k)$, де $\{t_k\} \subseteq [0,1]$, $\{c_k\} \subseteq \mathbb{R}$;

(2) $E = C([0,1])$, $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt - x(1/2)$.

Задача 206. Доведіть твердження: довільний лінійний неперервний функціонал у просторі ℓ_1 має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n, \quad x = (x_n) \in \ell_1, \tag{3.1}$$

де $a = (a_n) \in \ell_\infty$, і навпаки: якщо $a \in \ell_\infty$, то формула (3.1) задає лінійний неперервний функціонал, причому $\|f\| = \sup_n |a_n|$.[1]

Задача 207. Нехай $1 < p < +\infty$. Доведіть, що простір $(\ell_p)^*$ ізометрично ізоморфний простору ℓ_q, де $1/p + 1/q = 1$.

Задача 208. Доведіть, що для довільного лінійного функціонала f: $f \in E^*$ тоді й лише тоді, коли для кожної збіжної до нуля послідовності (x_n) множина $\{f(x_n)\}$ обмежена.

Задача 209. Доведіть, що лінійний функціонал неперервний тоді й тільки тоді, коли його ядро є замкненим.

Задача 210. Наведіть приклад лінійного функціонала, який не є неперервним.

Задача 211. Нехай $1 \le p \le \infty$ та послідовність $x = (x_n)$ така, що ряд $\sum_n x_n y_n$ збігається для всіх $y = (y_n) \in \ell_p$. Доведіть, що $x \in \ell_q$, де $1/p + 1/q = 1$.

Задача 212. Нехай L — лінійний многовид лінійного нормованого простору E. Доведіть, що $\overline{L} = E$ тоді й тільки тоді, коли для $f \in E^*$ з $L \subseteq \ker f$ випливає $f = 0$.

Задача 213. Нехай E — дійсний лінійний нормований простір, $L \subset E$ — підпростір. Чи правильно, що для довільного $f \in L^*$ існує $F \in E^*$ такий, що $F|_L = f$ та $\|F\|_{E^*} = \|f\|_{L^*}$?

[1] Таким чином, простір $(\ell_1)^*$ ізометрично ізоморфний простору ℓ_∞.

Задача 214. Нехай $G = \{x \in C([0,1]) : \ x(0) = 0\}$. Побудуйте лінійний неперервний функціонал на $C([0,1])$, який дорівнює нулю на G і набуває значення 2 на функції $\phi(t) = t + 1$, $t \in [0,1]$.

Задача 215. Нехай E — лінійний нормований простір, $x \in E$. Доведіть, що $\|x\| = \max\{|f(x)| : f \in E^* : \ \|f\| = 1\}$.

Задача 216. Нехай E — лінійний нормований простір. Доведіть, що спряжений простір E^* є повним.

Завдання для самостійної роботи

Задача 217. З'ясуйте, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайдіть норми:

(1) $E = \ell_1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$;

(2) $E = \ell_1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n$;

(3) $E = c_0$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n+1} x_n$;

(4) $E = \ell_1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n$;

(5) $E = c$, $f(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$.

Задача 218. Перевірте лінійність, неперервність і знайдіть норму функціонала

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n + x_{n+1}}{2^n} \quad (x = (x_n))$$

у просторі ℓ_2.

Задача 219. Нехай $f, g \in E^*$ та $\ker f = \ker g$. Доведіть, що $f = \lambda g$, де $\lambda \in \mathbb{R}$.

Задача 220. Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ — лінійно незалежні елементи лінійного нормованого простору E, $c_1, c_2, ..., c_n$ — деякі дійсні числа. Доведіть існування функціонала $f \in E^*$ такого, що $f(x_k) = c_k$, $k = \overline{1, n}$

Задача 221. Нехай E — лінійний нормований простір, A — деяка множина індексів. Системи $x_\alpha \in E$, $f_\alpha \in E^*$ називають біортогональними, якщо $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$, де δ — символ Кронекера. Нехай $\{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset E$ — лінійно незалежна система. Довести, що існує біортогональна до неї система.

Задача 222. Чи правильне твердження попередньої задачі для нескінченної системи лінійно незалежних елементів простору E?

Задача 223. За якої умови на лінійно незалежну систему $\{x_\alpha : \alpha \in A\} \subset E$ існує біортогональна до неї система?

Задача 224. Нехай $\{f_1, ..., f_n\} \subset E^*$ — лінійно незалежна система. Довести, що в E існує біортогональна до неї система.

Задача 225. Нехай $x_\alpha \in E$, $f_\alpha \in E^*$ — біортогональна система. Чи правильно, що: а) x_α лінійно незалежна; б) f_α лінійно незалежна?

Задача 226. Нехай (x_n) — фіксована послідовність елементів лінійного нормованого простору E, L — її замкнена лінійна оболонка. Довести, що $x \in L$ тоді й лише тоді, коли для довільного функціонала $f \in E^*$ з того, що $f(x_n) = 0$, $n \geq 1$, випливає, що $f(x) = 0$.

Задача 227. Знайдіть норму лінійного функціонала f, заданого на просторі E, та з'ясуйте, чи досягається вона на замкненій одиничній кулі, якщо:

(1) $E = C([-\pi, \pi])$, $f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin t \, dt$;

(2) $E = C^1([0, 1])$, $f(x) = \int_0^1 tx(t) \, dt$.

Задача 228. Доведіть, що простір $(c_0)^*$ ізометрично ізоморфний простору ℓ_1.

Задача 229. Доведіть, що лінійний функціонал, який не набуває на деякій кулі лінійного нормованого простору принаймні одного значення, неперервний.

Задача 230. Доведіть, що замкнена одинична куля $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ є перетином деякої сім'ї півпросторів вигляду $\{x \in E : f(x) \leq c\}$, де $f \in E^*$, $c \in \mathbb{R}$.

Задача 231. Наведіть приклад лінійного неперервного функціонала на банаховому просторі c_0, що не досягає своєї норми на одиничній замкненій кулі.

Задача 232. Наведіть приклад лінійного неперервного функціонала на банаховому просторі ℓ_1, що не досягає своєї норми на одиничній замкненій кулі.

Задача 233. Наведіть приклад лінійного неперервного функціонала на банаховому просторі $C([0, 1])$, що не досягає своєї норми на одиничній замкненій кулі.

3.3. Гільбертовий простір

Теоретичні відомості

Означення. Нехай E — дійсний лінійний простір. Функція $(\cdot,\cdot) : E \times E \to \mathbb{R}$ називається скалярним добутком на просторі E, якщо виконуються такі умови:

- $\forall x \in E: \ (x,x) \geq 0$, $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- $\forall x, y \in E: \ (x,y) = (y,x)$;
- $\forall x \in E, \alpha \in \mathbb{R}: \ (\alpha x, y) = \alpha(x,y)$.

Означення. Упорядкована пара $(E,(\cdot,\cdot))$, де E — лінійний простір, а $(\cdot,\cdot)$ — скалярний добуток, називається евклідовим (передгільбертовим) простором.

Означення. Евклідів простір $(E,(\cdot,\cdot))$ називається гільбертовим простором, якщо простір $(E,\|\cdot\|)$ є банаховим, де $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ — породжена (скалярним добутком) норма.

Означення. Ортогональним доповненням до множини M у гільбертовому просторі $(H,(\cdot,\cdot))$ називається множина $M^{\perp} = \{x \in H : \forall y \in M (x,y) = 0\}$.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 234 (нерівність Шварца)**.** Нехай H — передгільбертовий простір. Доведіть, що виконується нерівність

$$|(x,y)| \leq \|x\|\|y\| \quad \forall x, y \in H.$$

Задача 235 (теорема Ріса)**.** Нехай $f \in H^*$. Доведіть, що існує єдиний елемент $y \in H$ такий, що $f(x) = (x,y)$ для довільного $x \in H$ та $\|f\|_* = \|y\|$.

Задача 236 (нерівність Бесселя)**.** Нехай $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — ортонормована система елементів передгільбертового простору H. Покажіть, що для довільного $x \in H$ має місце нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x,e_n)|^2 \leq \|x\|^2.$$

Задача 237. У просторі ℓ_2 введемо новий скалярний добуток $(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n y_n$, $\lambda_n \in (0, 1)$. Чи буде отриманий простір гільбертовим?

Задача 238. Нехай H — передгільбертовий простір, а x, $y \in H$. Доведіть, що x, y ортогональні тоді й тільки тоді, коли $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

Задача 239. Нехай x, y, x_n, $y_n \in H$ і $x_n \to x$, $y_n \to y$. Доведіть, що $(x_n, y_n) \to (x, y)$.

Задача 240. Для того, щоб лінійний нормований простір H був передгільбертовим, необхідно й достатньо, шоб для всіх x та y виконувалась рівність

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Задача 241. Доведіть, що в $C([0, 1])$ неможливо ввести скалярний добуток, породжуючий норму цього простору.

Задача 242. Доведіть твердження:

(1) для довільної множини $M \subseteq H$ її ортогональне доповнення $M^{\perp}$ — лінійний підпростір;

(2) $M \subseteq M^{\perp\perp}$;

(3) $M = M^{\perp\perp} \Leftrightarrow M$ — лінійний підпростір;

(4) $M \subseteq N \Rightarrow N^{\perp} \subseteq M^{\perp}$.

Задача 243. Нехай L — лінійний підпростір у H. Доведіть, що $\overline{L} = H$ тоді й тільки тоді, коли $L^{\perp} = \{0\}$.

Задача 244. Для $L = \{x = (x_n) \in \ell_2 : \ x_2 = x_4 = ... = 0\}$ знайдіть ортогональне доповнення в гільбертовому просторі ℓ_2.

Задача 245. Нехай $L = \{x = (x_n) \in \ell_2 : \ \sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\}$. Доведіть, що L скрізь щільна в просторі ℓ_2.

Задача 246. Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H, $x \in H$. Доведіть, що існує єдиний елемент $z = P_C x \in C$ такий, що $\|z - x\| = \min_{y \in C} \|y - x\|$.

Задача 247. Нехай H — гільбертовий простір, $a, b, c \in H$. Знайдіть ортогональну проекцію елемента $x \in H$ на лінійний підпростір $L =$ л. о. $\{a, b, c\}$.

Задача 248. Доведіть, що в гільбертовому просторі довільна послідовність непорожніх вкладених опуклих замкнених обмежених множин має непорожній перетин.

Завдання для самостійної роботи

Задача 249. Доведіть, що в ℓ_p ($p \geq 1$, $p \neq 2$) норма не породжується жодним скалярним добутком.

Задача 250. Нехай H — гільбертовий простір, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. Довести, що
$$(x_n, y_n) \to 1 \Rightarrow \|x_n - y_n\| \to 0.$$

Задача 251. Нехай H — гільбертовий простір, $\|x_n\| = \|y_n\| = 1$. Довести, що
$$||x_n + y_n|| \to 2 \Rightarrow ||x_n - y_n|| \to 0.$$

Задача 252. Довести, що в передгільбертовому просторі:

(1) тотожність Аполлонія
$$\|z - x\|^2 + \|z - y\|^2 = \frac{1}{2}\|x - y\|^2 + 2\|z - \frac{x + y}{2}\|^2$$
виконується для довільних елементів x, y і z;

(2) нерівність Птолемея
$$\|x - z\|\|y - v\| \leq \|x - y\|\|z - v\| + \|y - z\|\|x - v\|$$
виконується для довільних елементів x, y, z і v.

Задача 253. У гільбертовому просторі $H = L_2([0,1])$ знайти відстань від елемента $y = t^3 \in H$ до підпростору $L =$ л.о.$\{1, t, t^2\}$.

Задача 254. Знайти в ℓ_2 ортогональне доповнення до множини $A = \{(a, a^2, a^3, a^4, ...) : \ a \in [0, 1]\}$.

Задача 255. У просторі ℓ_2 розглянемо послідовність $x_n = \left(1, \frac{1}{2^k}, \frac{1}{2^{2k}}, \frac{1}{2^{3k}}, ...\right)$, $k \in \mathbb{N}$. Доведіть, що лінійна оболонка цієї послідовності скрізь щільна в просторі ℓ_2.

Задача 256. Знайдіть ортогональну проекцію елемента $x = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, ...\right)$ на лінійний підпростір $L = \{x = (x_n) \in \ell_2 : \ x_1 = x_3 = ... = 0\}$ гільбертового простору ℓ_2.

Задача 257. Нехай C — замкнена опукла підмножина гільбертового простору H, $x \in H$, $z \in C$. Доведіть рівносильність умов: 1) $z = P_C x$; 2) $(z - x, y - z) \geq 0 \ \forall y \in C$.

Задача 258. Нехай L — лінійній підпростір гільбертового простору H, $x \in H$, $z \in L$. Доведіть рівносильність умов: 1) $z = P_L x$; 2) $(z - x, y) = 0 \ \forall y \in L$.

Задача 259. Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — замкнена опукла множина та $x \in H \setminus C$. Доведіть, що існує елемент $z \in H \setminus \{0\}$ такий, що $(z, x) > \sup_{y \in C}(z, y)$.

Задача 260. Нехай H — гільбертовий простір, (x_n) — послідовність елементів простору H така, що для довільного $y \in H$ існує $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) \in \mathbb{R}$. Доведіть, що існує $x_0 \in H$ такий, що $\lim_{n\to\infty}(x_n, y) = (x_0, y)$ для довільного $y \in H$.

Задача 261. Нехай E — банаховий простір, $L \subset E$ — підпростір. Чи правильно, що для довільного $f \in L^*$ існує єдиний $F \in E^*$ такий, що $F|_L = f$ та $\|F\|_{E^*} = \|f\|_{L^*}$? А як у випадку, коли E — гільбертовий простір?

Задача 262. Доведіть ізоморфність двох сепарабельних гільбертових просторів.

3.4. Слабка збіжність

Теоретичні відомості

Означення. Послідовність (x_n) елементів лінійного нормованого простору E слабко збігається до елемента $x \in E$, якщо для довільного функціонала $f \in E^*$ маємо $f(x_n) \to f(x),\ n \to \infty$.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 263. Доведіть, що у скінченновимірному лінійному нормованому просторі сильна та слабка збіжності рівносильні.

Задача 264. Нехай E — лінійний нормований простір, послідовність (x_n) $(x_n \in E)$ слабко збігається до $x \in E$. Доведіть, що

$$\|x\| \leq \underline{\lim}_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Задача 265. Нехай H — гільбертовий простір, послідовність (x_n) $(x_n \in H)$ слабко збігається до $x \in H$ та $\|x_n\| \to \|x\|$. Доведіть, що $x_n \to x$.

Задача 266. Нехай послідовність (x_n) точок гільбертового простору H слабко збігається до точки $x \in H$. Доведіть, що для довільної точки $y \in H \backslash \{x\}$ має місце нерівність

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n - y\|.$$

Задача 267. Нехай $x_n \rightharpoonup x$ у гільбертовому просторі H. Доведіть, що існує підпослідовність (x_{n_k}) така, що $\frac{\sum_{k=1}^m x_{n_k}}{m} \to x$ при $m \to \infty$.

Задача 268. Доведіть, що одинична куля $B = \{x : \|x\| \leq 1\}$ сепарабельного гільбертового простору секвенційно слабко компактна.

Задача 269. Нехай $x_n = (\xi_k^{(n)}) \in \ell_p$, $x = (\xi_k) \in \ell_p$, $1 < p < +\infty$. Доведіть, що $x_n \rightharpoonup x$ в ℓ_p тоді й тільки тоді, коли:

(1) $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|x_n\| \leq M$;

(2) $\forall k \in \mathbb{N}\ \xi_k^{(n)} \to \xi_k$ при $n \to \infty$.

Задача 270. Дослідити послідовність (x_n) на слабку та сильну збіжність у просторі H, якщо:

(1) $H = L_2([0,1])$, $x_n(t) = \sqrt{n} \cdot \chi_{[0,1/n]}(t)$;

(2) $H = L_2([0,1])$, $x_n(t) = 2n(1-nt) \cdot \chi_{[0,1/n]}(t)$.

Задача 271. Доведіть, що будь-яка слабко замкнена підмножина лінійного нормованого простору є замкненою.

Задача 272. Доведіть, що лінійний підпростір банахового простору слабко замкнений.

Задача 273. Нехай $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \to y$ в гільбертовому просторі H. Доведіть, що
$$\lim_{n\to\infty} (x_n, y_n) = (x, y).$$
Побудуйте приклад послідовностей (x_n) і (y_n) таких, що $x_n \rightharpoonup x$, $y_n \rightharpoonup y$ та $(x_n, y_n) \not\to (x, y)$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 274. Нехай $F \subseteq H$ — непорожня підмножина гільбертового простору H, (x_n) — послідовність елементів H. Припустимо, що:

(1) границя довільної слабко збіжної підпослідовності (x_{n_k}) належить F;

(2) для довільної точки $y \in F$ існує $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y\| \in \mathbb{R}$.

Доведіть, що послідовність (x_n) слабко збігається до деякої точки $z \in F$.

Задача 275. Доведіть, що $x_n \rightharpoonup x$ в $C([0,1])$ тоді й тільки тоді, коли:

(1) $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \|x_n\| \le M$;

(2) $\forall t \in [0,1]\ x_n(t) \to x(t)$ при $n \to \infty$.

Задача 276. Дослідити послідовність (x_n) на слабку та сильну збіжність у просторі H, якщо:

(1) $H = \ell_2$, $x_n = \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ...\right)$;

(2) $H = \ell_2$, $x_n = \left(\underbrace{0,...,0}_{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+2}, ...\right)$;

(3) $H = L_2([0,1])$, $x_n(t) = \cos(2\pi n t)$.

Задача 277. Доведіть, що в нескінченновимірному гільбертовому просторі H замикання одиничної сфери $S = \{x \in H : \|x\| = 1\}$ відносно слабкої збіжності збігається з кулею $B = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$.

Задача 278. Доведіть, що в банаховому просторі ℓ_1 послідовність елементів слабко збіжна тоді й лише тоді, коли ця послідовність сильно збіжна.

Задача 279. Нехай (x_n) — ортогональна послідовність елементів гільбертового простору H. Довести еквівалентність таких тверджень: a) ряд $\sum x_n$ збігається сильно; b) ряд $\sum x_n$ збігається слабко; c) ряд $\sum \|x_n\|^2$ збігається.

3.5. Лінійні неперервні оператори

Теоретичні відомості

Означення. Нормою лінійного неперервного оператора $A : E \to F$ називається число

$$\|A\| = \sup_{x\in E, x\neq 0} \frac{\|Ax\|_F}{\|x\|_E}.$$

Лінійний нормований простір усіх лінійних неперервних операторів, що діють із простору E у простір F, позначається $L(E, F)$.
Означення. Нехай H — гільбертовий простір. Оператор $A^* \in L(H, H)$ називається спряженим до оператора $A \in L(H, H)$, якщо

$$\forall x, y \in H : \ (Ax, y) = (x, A^* y).$$

Теорема (Банаха)**.** Нехай E, F — банахові простори та оператор $A \in L(E, F)$ — бієкція. Тоді $A^{-1} \in L(F, E)$.

Завдання для аудиторної роботи

Задача 280. Доведіть, що лінійний оператор, заданий на лінійному нормованому просторі, є неперервним тоді й тільки тоді, коли він обмежений.

Задача 281. Нехай (α_n) — обмежена послідовність. Довести, що оператор

$$Ax = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ...),$$

який діє в ℓ_p $(1 < p < \infty)$, є лінійним, неперервним, і знайти його норму.

Задача 282. Нехай $Ax(t) = t \cdot x(t)$. Знайдіть норму оператора A у випадках:

(1) $A : C([0, a]) \to C([0, a])$;

(2) $A : L_2([0, a]) \to L_2([0, a])$.

Задача 283. Довести лінійність і неперервність інтегрального оператора A з неперервним ядром K, тобто оператора $A : C([a, b]) \to C([a, b])$, що діє за формулою

$$(Ax)(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)ds, \ \ t \in [a, b], \ \ K \in C([a, b]^2).$$

Задача 284. Доведіть, що оператор $A : C([0,1]) \to C([0,1])$ є лінійним, неперервним, і знайдіть його норму, якщо:

(1) $Ax(t) = \int_0^1 e^{t-s}x(s)ds$;

(2) $Ax(t) = \int_0^t x(s)ds$;

(3) $Ax(t) = \int_0^t sx(s)ds$;

(4) $Ax(t) = \int_0^t f(s)x(s)ds$, де $f \in C([0,1])$, $f \geq 0$.

Задача 285. Нехай $A : C^1([a,b]) \to C([a,b])$ — оператор диференціювання $Ax(t) = x'(t)$. Знайдіть норму оператора A, якщо в $C^1([a,b])$ норма задана рівністю $\|x\| = \max_{t\in[a,b]} |x(t)| + \max_{t\in[a,b]} |x'(t)|$.

Задача 286. Розглянемо співвідношення $y_n = \sum_{j=1}^{\infty} a_{nj}x_j$, $n \in \mathbb{N}$. Знайдіть необхідні та достатні умови на матрицю (a_{nj}), за яких оператор A, діючий за правилом $A(x_1, x_2, ...) = (y_1, y_2, ...)$, є неперервним:

(1) у просторі c_0;

(2) у просторі ℓ_1.

Знайдіть норму цього оператора в кожному з просторів.

Задача 287. Знайдіть оператор A^*, спряжений до оператора A, визначеного в попередній задачі в п. (1).

Задача 288. Якщо $A \in L(E, F)$, де E, F — лінійні нормовані простори, то $\|A\| = \|A^*\|$.

Задача 289. Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A \in L(\ell_2, \ell_2)$, якщо:

(1) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$;

(2) $Ax = (x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$.

Задача 290. Доведіть, що якщо послідовність лінійних обмежених операторів $A_n : E \to F$, де E, F — лінійні нормовані простори, є такою, що послідовність $(\|A_n\|)$ необмежена, то послідовність $(\|A_n x\|)$ необмежена на будь-якій замкненій кулі.

Задача 291. Нехай послідовність лінійних обмежених операторів (A_n), що відображають банаховий простір E в лінійний нормований простір F, поточково збігається. Доведіть, що послідовність $(\|A_n\|)$ є обмеженою.

Задача 292. Нехай E, F — банахові простори. Доведіть, що простір $L(E,F)$ повний відносно поточкової збіжності.

Задача 293. Нехай E — банаховий простір, $A \in L(E,E)$ та $\|A\| < 1$. Доведіть, що оператор $(I-A)^{-1}$ існує, обмежений і може бути поданий у вигляді

$$(I-A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} A^n.$$

Задача 294. Чи є оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$ неперервно оборотним, якщо:

(1) $Ax = (0, x_1, x_2, x_3, ...)$;

(2) $Ax = (x_2, x_3, x_4, ...)$;

(3) $Ax = (x_1 - x_2, x_2, x_3, x_4, ...)$?

Знайти A^{-1}, якщо він існує.

Задача 295. Які умови існування неперервного оберненого оператора порушено в попередній задачі?

Задача 296. Нехай $X = C^1([0,1])$ з нормою $\|x\| = \max_{t\in[0,1]} |x(t)| + \max_{t\in[0,1]} |x'(t)|$. Розглянемо оператор $A : X \to C([0;1])$, $(Ax)(t) = 2x'(t) - 3x(t)$. Доведіть, що оператор A є неперервно оборотним, і знайдіть A^{-1}.

Задача 297. Нехай E — лінійний нормований простір, $A \in L(E,E)$, існує послідовність $x_n \in E$ така, що $\|x_n\| = 1$ та $Ax_n \to 0$. Доведіть, що A не є неперервно оборотним.

Задача 298. Нехай X та Y — банахові простори, $A : X \to Y$ — лінійний оператор. Доведіть, що такі твердження рівносильні:

(1) оператор A неперервний;

(2) якщо (x_n) — послідовність елементів із X таких, що $x_n \to x$ та $Ax_n \to y$, то $Ax = y$.

Задача 299. Дослідіть на рівномірну, сильну та слабку збіжність послідовність операторів A_n у просторі ℓ_2:

(1) $A_n(x_1, x_2, ...) = \left(\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n}, ...\right)$;

(2) $A_n(x_1, x_2, ...) = \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_{n+1}, x_{n+2}, ...\right)$;

(3) $A_n(x_1, x_2, ...) = \left(\underbrace{0, ..., 0}_{n}, x_1, x_2, ...\right)$.

Завдання для самостійної роботи

Задача 300. Доведіть, що оператор $A : X \to X$ є лінійним, неперервним, і знайдіть його норму, якщо:

(1) $X = \ell_p$ $(p \geq 1)$, $Ax = (0, x_1, x_2, ...)$;

(2) $X = \ell_p$ $(p \geq 1)$, $Ax = (x_2, x_3, ...)$;

(3) $X = \ell_p$ $(p \geq 1)$, $Ax = (x_1, 0, x_3, 0, ...)$;

(4) $X = \ell_2$, $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{n}x_n, ...\right)$;

(5) $X = C([-1, 1])$, $Ax(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$;

(6) $X = C([-1, 1])$, $Ax(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$;

(7) $X = C([0, 1])$, $Ax(t) = \int_0^1 \cos t \cdot \sin s \cdot x(s)ds$;

(8) $X = C([0, 1])$, $Ax(t) = t^2 \cdot x(0)$;

(9) $X = \ell_2$, $Ax = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{k}, x_1, x_2, x_3, ...)$.

Задача 301. Знайти норму оператора вкладення $Ax = x$, який діє з $L_p([0, 1])$ у $L_q([0, 1])$, де $p > q$.

Задача 302. Доведіть, що оператор $(Ax)(t) = \arctan tx(t)$, який діє на $L_4(\mathbb{R})$, є лінійним і неперервним, і знайдіть його норму.

Задача 303. Нехай A — лінійний оператор у лінійному нормованому просторі E. Доведіть, що A неперервний тоді й лише тоді, коли множина $\{x \in E : \ ||Ax|| < 1\}$ має хоча б одну внутрішню точку.

Задача 304. Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A \in L(\ell_2, \ell_2)$, якщо:

(1) $Ax = \left(x_1, \frac{1}{2}x_2, ..., \frac{1}{n}x_n, ...\right)$;

(2) $Ax = (x_1, 0, x_3, 0, ...)$;

(3) $Ax = (2x_1 + 3x_2, 3x_1 + 5x_2, x_3, 0, 0, ...)$.

Задача 305. Знайти спряжений оператор до $A : L_2([0,1]) \to L_2([0,1])$, де $(Ax)(t) = \int_0^t x(s)ds$.

Задача 306. Нехай A — лінійний оператор у банаховому просторі, який переводить сильно збіжні послідовності у слабко збіжні. Доведіть, що A — неперервний.

Задача 307. Дослідіть послідовність операторів $A_n : \ell_p \to \ell_p$ $(1 < p < +\infty)$ на рівномірну, сильну та слабку збіжність, якщо:

(1) $A_x = (\frac{x_1}{n}, \frac{x_2}{n+1}, \frac{x_3}{n+3}, ...)$;

(2) $A_n x = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, ..., x_1, 0, 0, 0, ...)$;

(3) $A_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$;

(4) $A_n x = (x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}, ...)$;

(5) $A_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n-1}, x_n, 0, 0, ...)$;

(6) $A_n x = (\underbrace{0, 0, ..., 0}_{n}, x_1, x_2, x_3, ...)$.

Задача 308. Чи є оператор $A : \ell_2 \to \ell_2$ неперервно оборотним, якщо:

(1) $Ax = (x_1, x_3, x_2, x_4, x_5, ...)$;

(2) $Ax = (x_1, \frac{1}{2}x_2, \frac{1}{3}x_3, \frac{1}{4}x_4, ...)$;

(3) $Ax = (x_1 + x_2, x_2 - x_3, x_3, x_4, ...)$;

(4) $Ax = (x_1 + x_2, x_3, 2x_1 + 2x_2, x_4, ...)$;

(5) $Ax = (0, x_1, x_2, ...)$;

(6) $Ax = (x_2, x_3, x_4, x_5, ...)$;

(7) $Ax = (x_1 - x_2, 2x_2 - 2x_1, x_3, ...)$;

(8) $Ax = (x_1, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, ...)$?

Задача 309. Нехай E — банаховий простір. Доведіть, що оператор $A \in L(E, E)$ має неперервний обернений тоді й тільки тоді, коли A^2 має неперервний обернений.

Задача 310. Навести приклад лінійного неперервного оператора A; у якого область значень: а) замкнена; б) незамкнена.

Задача 311. Нехай X — банаховий простір. Припустимо, що білінійне відображення $B : E \times E \to \mathbb{R}$ неперервне за кожною змінною. Довести неперервність B за сукупністю змінних.

Задача 312. Нехай A — лінійний оператор у гільбертовому просторі H, причому

$$\forall x, y \in H \;\; (Ax, y) = (x, Ay).$$

Доведіть, що оператор A неперервний.

Задача 313. Нехай H — гільбертовий простір, y, $z \in H$, $Ax = (x, y)z$, $x \in H$. Доведіть, що $A \in L(H, H)$, і знайдіть $||A||$.

Задача 314. Нехай H — гільбертовий простір, $G \subset H$ — лінійний підпростір, $Px = P_G x$. Доведіть, що оператор проектування P є лінійним і неперервним. Знайдіть норму P.

Задача 315. Нехай H — гільбертовий простір. Довести, що коли $U : H \to H$, $R(U) = H$ і $(Ux, Uy) = (x, y)$ для всіх x, $y \in H$, то U — лінійний неперервний оператор і $\|U\| = 1$.

Програма курсу та типові завдання

Варіанти програми курсу «Функціональний аналіз»

Піврічний курс «Функціональний аналіз» (спеціальність «Прикладна математика»)

1. Топологічні простори. Приклади. Замикання, внутрішність. Бази. Аксіоми зліченності.
2. Неперервні відображення. Збіжність послідовностей.
3. Аксіоми віддільності. Приклади.
4. Компактні топологічні простори. Різні типи компактності. Теорема Тихонова про компактність добутку.
5. Метричні простори. Приклади.
6. Повні метричні простори. Існування поповнення. Теорема про вкладені кулі. Теорема Бера. Принцип стискаючих відображень.
7. Компактні метричні простори. Цілком обмежені множини. Теорема Хаусдорфа. Критерії компактності в ℓ_2 і $C([a,b])$.
8. Лінійні нормовані простори. Приклади.
9. Лінійні неперервні функціонали та спряжені простори.
10. Теорема Хана – Банаха. Наслідки. Рефлексивність.

11. Слабка топологія, слабка збіжність та $*$–слабка збіжність.
12. Лінійні неперервні оператори.
13. Теорема Банаха – Штейнгауза. Наслідки.
14. Принцип відкритості відображення. Теорема Банаха про обернений оператор.
15. Компактні оператори.
16. Геометрія гільбертових просторів. Теорема фон Неймана – Йордана. Існування ортогональної проекції. Теорема Ріса.
17. Ортонормовані системи. Ряди Фур'є. Нерівність Бесселя та рівність Парсеваля.
18. Ізометричний ізоморфізм сепарабельних гільбертових просторів.

Піврічний курс «Функціональний аналіз» (спеціальність «Системний аналіз»)

1. Метричні простори (МП), приклади МП, нерівності Гьольдера і Мінковського, підпростір, неперервні відображення, гомеоморфізм, ізометрія, ізометричні простори.
2. Відкриті та замкнені кулі в МП, граничні точки, точки дотику, ε-окіл, замикання, властивості замикання, ізольовані точки, збіжність у МП, характеристика точок дотику в термінах послідовностей.
3. Неперервність відображення, щільні підмножини, сепарабельні простори, приклади сепарабельних і несепарабельних МП, внутрішні точки, відкриті множини в МП, властивості відкритих множин у МП.
4. Повні метричні простори, приклади, принцип вкладених куль, теорема Бера, поповнення МП, принцип стискаючих відображень.
5. Топологія, топологічний простір (ТП), приклади ТП, відкриті множини в ТП, замкнені множини, окіл, точки дотику, граничні точки, замикання.

6. Слід топології, підпростір, аксіоми зліченності, збіжність у ТП, аксіоми віддільності, неперервні відображення, ТП, що можуть бути метризовані, формулювання теореми Урисона.
7. Компактність у МП.
8. Лінійні простори, норма, скалярний добуток, лінійні нормовані простори (ЛНП), передгільбертові простори, гільбертові простори (ГП), лінійна залежність та незалежність систем векторів, підпростір, ортогональність, розкладення ГП в пряму суму $H = L \bigoplus L^{\perp}$.
9. Теорема про поповнення, лінійна оболонка, замкнена лінійна оболонка, тотальні множини.
10. Ряди в ЛНП, збіжний ряд, абсолютно збіжний ряд, теорема про еквівалентність у банахових просторах, базис Шаудера.
11. Ортогональні системи, лема Піфагора, ортонормовані системи (ОНС), лінійна незалежність ОНС, ряд Фур'є, теорема про проекцію, мінімальна властивість ряду Фур'є, нерівність Бесселя, теорема про збіжність ряду Фур'є, рівність Парсеваля, повні ОНС, теорема про базис, замкнені ОНС, теорема про еквівалентність повноти та замкненості.
12. Приклади базисів, ортогоналізація Гільберта – Шмідта, теорема про існування ортонормованого базису в сепарабельному ГП, ізометрія сепарабельних ГП.
13. Означення лінійного функціонала, неперервність, обмеженість, норма, приклади.
14. Спряжений простір, повнота спряженого простору, теорема Ріса, приклади інших теорем про загальний вигляд лінійних функціоналів у ЛНП.
15. Продовження лінійного неперервного функціонала за неперервністю, теорема Хана – Банаха, наслідки.
16. Теорема Банаха – Штейнгауза, канонічне вкладення $E \to E^{**}$, рефлексивні простори.
17. Слабка збіжність функціоналів, властивості (обмеженість, зв'язок зі збіжністю за нормою), слабка повнота спряженого простору, критерій слабкої збіжності в ЛНП, слабка компактність кулі в сепарабельному просторі.

18. Слабка збіжність у ЛНП, властивості, критерій слабкої збіжності в ЛНП, слабка збіжнсть у $\mathbb{R}^n$, ГП, ℓ_p.

19. Продовження операторів за неперервністю, добуток операторів, обернений оператор, неперервно оборотні оператори, критерії неперервної оборотності, теорема Банаха про обернений оператор, теорема про оборотність оператора, близького до одиничного.

20. Спряжений оператор у ГП, властивості.

21. Білінійні форми в ГП, теорема про загальний вигляд білінійної форми в ГП.

22. Самоспряжені оператори, невід'ємні оператори, унітарні оператори, ортопроектори.

23. Компактні оператори, означення, критерії компактності.

Екзаменаційні завдання 2016 року

Екзаменаційний білет № 1

1) Доведіть, що множина A топологічного простору (X, τ) замкнена $\Leftrightarrow A = \mathrm{cl}A$.

2) Нехай (X, d) — компактний метричний простір, $f \in C(X)$. Покажіть, що досягається $\sup_X f$.

3) Доведіть еквівалентність усіх норм у просторі $\mathbb{R}^n$.

4) Нехай A — лінійний оператор у гільбертовому просторі H, причому $\forall x, y \in H \ \ (Ax, y) = (x, Ay)$. Доведіть, що оператор A неперервний.

Екзаменаційний білет № 2

1) Нехай система множин $B \subseteq 2^X$ має властивості:

   (1) $X = \bigcup_{O \in B} O$;

   (2) $\forall (U, V \in B,\ x \in U \bigcap V) \ \ \exists W \in B :\ x \in W \subseteq U \bigcap V$.

   Доведіть, що на X існує єдина топологія τ, для якої система B є базою.

2) Наведіть приклад лінійного неперервного функціонала на просторі c_0, що не досягає своєї норми на одиничній замкненій кулі.

3) Довести, що множина першої категорії в компактному метричному просторі має скрізь щільне доповнення.

4) Нехай у лінійному просторі E задано дві норми $\|\cdot\|_0$, $\|\cdot\|_1$, причому $\|x\|_0 \leq \|x\|_1 \ \forall x \in E$ та простори $(E, \|\cdot\|_0)$, $(E, \|\cdot\|_1)$ банахові. Доведіть еквівалентність цих норм.

Екзаменаційний білет № 3

1) Доведіть, що повний метричний простір є множиною другої категорії.

2) Нехай $Ax(t) = tx(t)$. Знайдіть норму оператора A у випадках:

   (1) $A : C([0, a]) \to C([0, a])$;

(2) $A : L_2([0,a]) \to L_2([0,a])$.

3) Нехай $(\alpha_n) \in \ell_2$, $\alpha_n \geq 0$. Доведіть, що множина

$$B = \{x \in \ell_2 : \ |x_n| \leq \alpha_n\}$$

компактна в просторі ℓ_2.

4) Наведіть приклад лінійного неперервного функціонала на просторі ℓ_1, що не досягає своєї норми на одиничній замкненій кулі.

Екзаменаційний білет № 4

1) Доведіть, що метричний простір є нормальним.

2) Знайдіть оператор, спряжений до оператора $A \in L(\ell_2, \ell_2)$, якщо:

   (1) $Ax = A(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$;

   (2) $Ax = (x_{n+1}, x_{n+2}, ...)$.

3) Нехай $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \to +\infty$. Доведіть, що множина

$$E = \left\{ x \in \ell_2 : \ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n^2 \leq 1 \right\}$$

компактна в ℓ_2.

4) Наведіть приклад лінійного неперервного функціонала на просторі $C([0,1])$, що не досягає своєї норми на одиничній замкненій кулі.

Екзаменаційний білет № 5

1) Нехай (X, τ) — топологічний простір, що задовольняє першу аксіому зліченності, $M \subseteq X$. Доведіть, що для довільної точки $x \in \mathrm{cl}M$ знайдеться така послідовність елементів $x_n \in M$, що $x_n \to x$ при $n \to \infty$.

2) Чи є простір ℓ_1 повним відносно норми $\|x\|_\infty = \max_n |\xi_n|$, $x = (\xi_n) \in \ell_1$?

3) Нехай A, B — компактні підмножини метричного простору (X, d), при цьому $A \cap B = \emptyset$. Доведіть, що існують такі точки $x \in A$, $y \in B$, що $d(x, y) = d(A, B)$.

4) Доведіть, що лінійний функціонал неперервний тоді й тільки тоді, коли його ядро є замкненим.

Екзаменаційний білет № 6

1) Довести, що для того, щоб відображення $f : X \to Y$ було неперервним, необхідно й достатньо, щоб $\forall A \subseteq X \ f(\mathrm{cl}A) \subseteq \mathrm{cl}f(A)$.

2) Нехай $\mathbb{R}^\infty$ — множина всіх послідовностей дійсних чисел $x = (x_n)$ і

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^\infty \quad d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}.$$

Довести, що $(\mathbb{R}^\infty, d)$ — повний метричний простір.

3) Довести, що множина $K \subseteq \ell_2$ компактна тоді й лише тоді, коли множина $K \subseteq \ell_2$ замкнена, обмежена та $\forall \epsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in K \ \sum_{i=n}^{\infty} |x_i|^2 < \epsilon$.

4) З'ясуйте, чи є наведені функціонали лінійними, неперервними. Для лінійних неперервних функціоналів знайдіть норми:

(1) $E = \ell_1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{n}$;
(2) $E = \ell_1$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) x_n$.

Екзаменаційний білет № 7

1) Бієктивне відображення $f : X \to Y$ є гомеоморфізмом тоді й лише тоді, коли воно зберігає операцію замикання, тобто $\forall A \subseteq X \ \ f(\mathrm{cl}A) = \mathrm{cl}f(A)$.

2) Нехай $f \in E^* \setminus \{0\}$ та $L = \{x \in E : f(x) = 1\}$. Доведіть, що $\|f\|^{-1} = \inf_{x \in L} \|x\|$.

3) Доведіть ніде не щільність компактних множин просторів ℓ_2 та $C([0, 1])$ (метрика рівномірна).

4) Нехай H — гільбертовий простір, $C \subseteq H$ — замкнена опукла множина та $x \in H \setminus C$. Доведіть, що існує елемент $z \in H \setminus \{0\}$ такий, що $(z, x) > \sup_{y \in C} (z, y)$.

Література

[1] **Александрян Р. А.** Общая топология / Р. А. Александрян, Э. А. Мирзаханян. — М. : Высш. школа, 1979.

[2] **Архангельский А. В.** Основы общей топологии в задачах и упражнениях / А. В. Архангельский, В. И. Пономарев. — М. : Наука, 1974.

[3] **Банах С.** Теория линейных операций / С. Банах. — Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.

[4] **Березанский Ю. М.** Функциональный анализ / Ю. М. Березанский, Г. Ф. Ус, З. Г. Шефтель. — К. : Вища школа, 1990.

[5] **Богачев В. И.** Действительный и функциональный анализ: университетский курс / В. И. Богачев, О. Г. Смолянов. — М.; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ин-т компьютерных исследований, 2009.

[6] **Гельбаум Б.** Контрпримеры в анализе / Б. Гельбаум, Дж. Олмстед. — М. : Мир, 1967.

[7] **Городецкий В. В.** Методы решения задач по функциональному анализу / В. В. Городецкий, Н. И. Нагнибида, П. П. Настасиев. — К. : Вища школа, 1990.

[8] **Кириллов А. А.** Теоремы и задачи функционального анализа / А. А. Кириллов, А. Д. Гвишиани. — М. : Наука, 1988.

[9] **Колмогоров А. Н.** Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1989.

[10] **Рид М.** Методы современной математической физики. Т.1. Функциональный анализ / М. Рид, Б. Саймон. — М. : Мир, 1977.

[11] **Треногин В. А.** Задачи и упражнения по функциональному анализу / В. А. Треногин, Б. М. Писаревский, Т. С. Соболева. — М. : Наука, 1984.

[12] **Халмош П.** Гильбертово пространство в задачах / П. Халмош. — М. : Мир, 1970.

[13] **Pietsch A.** History of Banach Spaces and Linear Operators / A. Pietsch. — Birkhauser Basel, 2007.

ЗМІСТ