ДС – АЛГОРИТМИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ПЕРЕНОСУ, ЯКІ ОПИСУЮТЬСЯ ОДНОРІДНИМИ РІВНЯННЯМИ

Центрально–різницеві ДС–алгоритми для розв'язування початково–крайових задач для рівнянь першого порядку

В області $G = \{(x^1, x^2, x^3, t) | \ 0 \le x^i \le 1, \ i = 1,2,3; \ t > t_0\}$, побудуємо розв'язок початково–крайової задачі для рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} k_i \frac{\partial u}{\partial x^i} = 0. \qquad (1)$$

Одновимірна центрально – різницева задача.

Розглянемо спочатку одновимірну задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{в } G = \{(x,t) | 0 \le x \le 1, t > t_0\} \qquad (2)$$

при початкових $u(x,0) = \varphi(x)$ та крайових умовах $u(0,t) = \phi(t)$ при $k > 0$, (або $u(1,t) = \phi(t)$ при $k < 0$).

Область зміни неперервних аргументів покриваємо сітковою областю $\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, t_n) | \ x_i = ih; t_n = n\tau; i = \overline{0,m}; \ n = 0,1,2..; \ h = l/K\}$ ($\tau > 0$), яку розщеплюємо на дві підобласті

$\Omega_h^{(1,n)} = \{(x_i, t_n) | \ x_i = ih; \ t_n = n\tau; i = \overline{0,M}; \ n = 0,1,2..;$
$h = 1/M; \ i + n - \textit{непарне}\}$ і

$\Omega_h^{(2,n)} = \{(x_i, t_n) | \ x_i = ih; t_n = n\tau; i = \overline{0,M}; n = 0,1,2,.;$
$h = 1/M; i + n - \textit{парне}\}.$

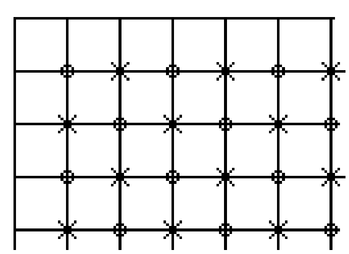

Рис. 2.1 $\Omega_{h\tau}^{(1)}$ **та** $\Omega_{h\tau}^{(2)}$ **для** $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

.

I. Нехай $k = const$. На часовому кроці $2n+1$ точкам з підобласті $\Omega_h^{(1,\,2n+1)}$ ставимо у відповідність явні різницеві рівняння

$$u_{2i}^{2n+1} = u_{2i}^{2n} - 0{,}5k\tau\left(u_{2i+1}^{2n} - u_{2i-1}^{2n}\right) / \ h; \quad \left(i = \overline{1, \left[\left(M-1\right)/\ 2\right]}\right), \tag{3}$$

а вузлам області $\Omega_h^{(2,\,2n+1)}$ – різницеві рівняння з вагою $\sigma \ge 0$

$$u_{2i+1}^{2n+1} = u_{2i+1}^{2n} - 0{,}5k\tau(\sigma(u_{2i+2}^{2n} - u_{2i}^{2n}) / h - (1+\sigma)(u_{2i+2}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1}) / h)$$

$$\left(i = \overline{1, \left[M\ /\ 2\right] - 1}\right). \tag{4}$$

На кроці $2n+2$ у точках з $\Omega_h^{(1,\,2n+2)}$ записуємо рівняння

$$u_{2i+1}^{2n+2} = u_{2i+1}^{2n+1} - 0{,}5\,k\ \tau\left(u_{2i+2}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1}\right) / \ h; \ \left(i = \overline{1, \left[M\ /\ 2\right] - 1}\right), \tag{5}$$

а точкам з $\Omega_h^{(2,\,2n+2)}$ –

$$u_{2i}^{2n+2} = u_{2i}^{2n+1} - 0{,}5k\tau(\sigma(u_{2i+1}^{2n+1} - u_{2i-1}^{2n+1}) / h + (1-\sigma)(u_{2i+1}^{2n+2} - u_{2i-1}^{2n+2}) / h)$$

$$\left(i = \overline{1, \left[M\ /\ 2\right] - 1}\right). \tag{6}$$

Обчислення розв'язку починаємо з точок області $\Omega_h^{(1,\,2n+1)}$ за явною різницевою схемою (3). Після обходу всіх точок цієї множини значення функції u_{2i}^{2n+1} будуть визначені. Тоді формально неявні різницеві схеми (4) дозволяють розв'язок у вузлах з $\Omega_h^{(2,2n+1)}$ знайти явно. Результати розрахунків, проведених за формулами (3),(4), сприймаються як допоміжні. На наступному часовому кроці виконаємо цикл розрахунків за формулами (5), (6) і одержимо значення u_i^{2n+2}, які приймаємо за розв'язок задачі. Обчислення за формулами (3)–(6) проводяться в усіх внутрішніх вузлах сітки.

Стійкість алгоритмів за початковими даними. Дослідження стійкості за початковими даними рівносильне визначенню умов, при яких справедлива нерівність $\left\|u^{2n}\right\|_{L_{2h}} \le c\left\|u^{0}\right\|_{L_{2h}}$, де u_i^0 – початкове значення розв'язку; $\|\cdot\|_{L_{2h}}$ –дискретний аналог норми в просторі L_2; $c>0$ – обмежена додатна стала, незалежна від h, τ і u_i^0. Умова стійкості різницевої задачі Коші із сталими коефіцієнтами (умова фон Неймана) стверджує, що для виконання умови стійкості необхідно, щоб спектр матриці переходу різницевого рівняння на наступний часовий шар повністю лежав в крузі комплексної площини з радіусом $1+\tilde{n}_1\tau$ (тобто, щоб модуль коефіцієнта переходу не перевищував $1+O(\tau)$, а зростання збурення не перевищувало експоненційного). Якщо спектр не залежить від часу, то ця умова набуває вигляду $\max_m |g(m)| \le 1$, де $g(m)$ – коефіцієнт переходу m–ї гармоніки точного розв'язку різницевої задачі.

Стійкість задачі із сталим коефіцієнтом. Покладемо для визначеності в задачі (2) $\phi = 0$. Для різницевої задачі (3)–(6) доведемо твердження

Теорема. *Якщо величина* τ *стала або змінюється не частіше ніж через парне число часових кроків, а функція* $u(x,0)=\varphi(x)$ *з умови* (7) *може бути розвинена в абсолютно збіжний ряд Фур'є і* $u_i^0 = \varphi(ih) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{I\pi(ihm)}$, *то при* $\sigma = 0$ *ДС–схема* (3)–(6) *безумовно стійка за початковими даними, а при* $\sigma > 0$ *– умовно стійка при* $\tau \le h\sqrt{2}\,/\,(|k|\sqrt{\sigma})$.

Доведення. Припустимо, що функція дискретного аргументу u_i^n розвивається в ряд [148]

$$u_i^n = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} C^{(s)}(n\tau)e^{Iihk_1}, I=\sqrt{-1}, \tag{8}$$

де B_m– коефіцієнти розвинення в ряд Фур'є початкової умови $\varphi(x)$, а $\varsigma(m)$ – невідомі поки що коефіцієнти $\left(\varsigma(x) = \varsigma_1(x)\varsigma_2(x)\right)$. Визначимо їх так, щоб ряд (8) був збіжний і був розв'язком задачі (3)–(6).

Нехай $(x_{i,}t_{2n+1}) \in \Omega_h^{(1,\,2n+1)}$. Гармоніки точного розв'язку явних різницевих схем (3),(5) позначимо $\tilde{u}_{2i}^{2n+1} = B_m \cdot \varsigma_1^n(m) \cdot e^{I\,2\pi i h\ m}$, а неявних (3,4), (6) відповідно $\tilde{u}_{2i}^{2n+2} = B_m \cdot \varsigma_2^n(m) \cdot e^{I\,2\pi i h\ m}$. Підставимо гармоніки $\varsigma_1(m)$ і $\varsigma_2(m)$ в рівняння (3) і (6). Після нескладних перетворень з (3) дістанемо, що

$$\varsigma_1^{n+1}(m) = \left[1 + I\ k\ \tau\, h^{-1}\sin(mh)\right]\varsigma_2^n(m) \equiv g_1(m)\,\varsigma_2^n(m). \tag{9}$$

Використавши неявну схему (6), для переходу з кроку $2n$+1 на крок $2n$+2 при $\sigma = 0$ маємо

$$\varsigma_2^{n+1}(m) = \left[1 - I\ k\ \tau\, h^{-1}\sin(mh)\right]^{-1}\varsigma_1^n(m) \equiv g_2(m)\,\varsigma_1^n(m). \tag{10}$$

Отже

$$\varsigma^{n+1}(m) = g(m)\varsigma^n(m)\,, \tag{11}$$

де $g(m)$ – множник переходу з кроку $2n$ на крок $2n$+2, записаний у вигляді

$$g(m) = g_1(m)g_2(m) = \left(1 + I\ \tau k\ h^{-1}\sin(mh)\right) / \left(1 - I\ \tau k\ h^{-1}\sin(m\,h)\right), \tag{12}$$

а $\varsigma^0(m) \equiv 1$ (умова узгодженості початкових і граничних умов).

Для $(x_{i,}t_{2n+1}) \in \Omega_h^{(2,2n+1)}$ і $(x_{i,}t_{2n+2}) \in \Omega_h^{(1,2n+2)}$ гармоніки (8) подаємо відповідно так: $\tilde{u}_{2i+1}^{2n+1} = B_m \cdot \varsigma_2^n(m) \cdot e^{I\,(2i+1)\,\pi\, h\ m}$ і $\tilde{u}_{2i+1}^{2n+2} = B_m \cdot \varsigma_1^n(m) \cdot e^{I\,(2i+1)\,\pi\, hm}$. З рівнянь (4),(5), повторюючи попередні міркування, для коефіцієнта переходу одержуємо рівності (11) та (12). Отже

$$q = \max_m |g(m)| = 1 .$$

Якщо $\sigma > 0$, то при переході з кроку $2n+1$ на крок $2n+2$ для розглянутих точок області одержимо

$$\varsigma_2^{n+1}(m) = \hat{g}_2(m)\,\varsigma_1^n(m) ,$$

де $\hat{g}_2(m) = \dfrac{\left[1 + I\ \tau\ k\ h^{-1}\sigma \sin(m\,h)\right]}{\left[1 + I\ \tau k\ \ h^{-1}(1+\sigma) \sin(m\,h)\right]}$.

Тобто,

$$\varsigma^{n+1}(m) = \left[(1 - I\ Z\,)(1 + I\ \sigma Z\,)\ /\ (1 + I\,(1+\sigma)Z\,)\right]\varsigma^n(m) = \hat{g}(m)\varsigma^n(m) .$$

Тут $\hat{g}(m) = \left(1 - I\ Z\,\right)\left(1 + I\ \sigma Z\,\right) / \ (1 + I\,(1+\sigma)Z\,)$, а $Z = k\ \tau\, h^{-1} \sin(m\,h)$. З нерівності $q \equiv \max_m |\hat{g}(m)| \le 1$ випливає, що при $\sigma > 0$

$$\tau \le h\sqrt{2}\ /\ (|k|\sqrt{\sigma}) .$$

При виконанні останньої нерівності $q = 1$, а рівняння (3) і (6) та (4),(5) перетворюються на тотожність.

Помножимо обидві частини (11) на $B(m)e^{I\pi mih}$ і підсумуємо одержану рівність за всіма m

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \varsigma^{n+1}(m) e^{I\,\pi mih} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m\, g(m) \varsigma^n(m) e^{I\,\pi mih} .$$

Враховуючи, що $q = 1$, встановимо оцінку

$$\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \varsigma^{n+1}(m) e^{I\pi mih}\right| \le \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| |g(m)| |\varsigma^n(m)| \le \qquad (13)$$

$$\leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| |g(m)|^{n+1} |\varsigma^0(m)| \leq q^{n+1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \leq \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m|.$$

З останньої нерівності в силу умови теореми випливає збіжність ряду (8) $\forall\, n = 1, 2, \ldots$

Оскільки: а) при $n > 0$ ряд (8) абсолютно збіжний;

б) кожен член ряду (8), а отже і його сума задовольняє рівняння (3)–(6);

в) при $n = 0$ ряд співпадає з рядом для $\varphi(x)$ і задовольняє початкові умови,

то сіткова функція (8) є точним розв'язком системи рівнянь (3)–(6).

Оскільки $\left\| u^n \right\|_{L_{2h}}^2 = \sum_{i=1}^{M} \left| u_i^n \right|^2 h$ є дискретним аналогом норми в просторі $L_2[-\pi, \pi]$, то після нескладних перетворень і використання рівності Парсеваля, для точного розв'язку різницевої (3) – (6) задачі маємо

$$\left\| u^{2n} \right\|_{L_{2h}}^2 = \sum_{i=1}^{M} \left| \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m (\varsigma(m))^n e^{I\pi m jh} \right|^2 h \leq q^{2n} \sum_{i=1}^{M} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| B_m e^{I\pi m jh} \right|^2 h = \tag{14}$$

$$= q^{2n} \sum_{j=1}^{M} \left| u_j^0 \right|^2 h = q^{2n} \left\| u^0 \right\|_{L_{2h}}^2.$$

З оцінки (14) випливає стійкість алгоритму.

Теорему доведено.

Точність, дисипативність і дисперсійність алгоритму.

Теорема 2. *ДС–алгоритм* (3)–(6)*:*

1) при $\sigma = 0$ *апроксимує рівняння з другим порядком, дисперсійний і бездисипативний, а при* $\sigma \neq 0$ *він дисипативний і має сумарну похибку апроксимації*

$O(\tau + h^2)$; 2) відносно еволюційного розв'язку задачі u_i^{2n+2} він має похибку апроксимації $O(\tau + h^2)$.

Доведення. 1). Спершу розглянемо просторові точки, для яких алгоритм будується за схемою (3) та схемою (6) при $\sigma = 0$. Складемо ці рівняння і одержимо тришарову шеститочкову схему

$$u_{2i}^{2n+2} - u_{2i}^{2n} = -0{,}5\,k\,\tau\left[\left(u_{2i+1}^{2n+2} + u_{2i+1}^{2n}\right) - \left(u_{2i-1}^{2n+2} + u_{2i-1}^{2n}\right)\right] /\ h\,.$$

Визначимо сумарну похибку апроксимації відносно часового шару $2n+1$. П–форма першого диференціального наближення [94] цієї схеми має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial u}{\partial x} = -k\left[\frac{h^2}{6} + \frac{k^2\tau^2}{3}\right]\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - k\left[\frac{\tau^4}{120} + \frac{k^2\tau^2 h^2}{12} + \frac{k^4\tau^4}{30}\right]\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \dots\,.$$

Головний член похибки апроксимації не містить похідних парного порядку, отже, схема бездисипативна. Присутність похідних непарного порядку вказує на її дисперсійність.

При $\sigma = 0$ з різницевої схеми (4) маємо

$$u_{2i+1}^{2n+2} = u_{2i+1}^{2n+1} - 0{,}5\ k\ \tau\left(u_{2i+2}^{2n+1} - u_{2i}^{2n+1}\right) /\ h\,, \tag{16}$$

а ПДН алгоритму (16).(5) записується у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial u}{\partial x} = -k\left[\frac{h^2}{6} - \frac{k^2\tau^2}{6}\right]\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - k\left[\frac{h^4}{120} - \frac{k^4\tau^4}{120}\right]\frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + \dots\,.$$

Це вказує на його дисперсійність та бездисипативність.

Якщо $\sigma \neq 0$, то для точок з $\Omega_h^{(2,2n+2)}$ одержимо, що

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{2i}^{2n+1} = -k\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{2i}^{2n+1} + 0{,}5\tau k\,\sigma\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{2i}^{2n+1} + O\left(\tau^2 + h^2\right) \tag{17}$$

Головний член похибки апроксимації містить другу похідну і, отже, алгоритм дисипативний.

Аналогічні твердження встановлюються для точок з $\Omega_h^{(1,2n+2)}$.

2). Оцінимо головний член похибки відносно розв'язку задачі в точках (x_i, t_{2n+2})

$$\left(u_t' + k u_x'\right)\Big|_i^{2n+2} = u_x'\left\{O(h^2)\right\} + u_{xx}''\left\{\frac{\sigma\tau k^2}{2} + O\left(h^2, h\tau, \tau^2\right)\right\} + \ldots \ .$$

При усталенні розв'язку

$$\left(u_t' + k u_x'\right)\Big|_i^{2n+2} = u_x'\left\{O(h^2)\right\} + u_{xx}''\left\{\frac{\sigma\tau^2 k^2}{2} + O\left(h^2, h\tau, \tau^2\right)\right\} + \ldots . \qquad (18)$$

Теорему доведено.