

Лекція 7. Аналіз стійкості за Хьортом. Дослідження стійкості різницевих алгоритмів для рівнянь з багатьма незалежними змінними. – 2 год. [1:стор:83-95., 5]

Метод Хьорта. Загальна схема дослідження стійкості багатовимірних задач.

Аналіз стійкості за Хьортом [1:стор.73-77]

Третій метод аналізу стійкості був запропонований Хьортом [1968]. У цьому методі члени, що входять у скінчено-різницеві рівняння, розкладаються в ряди Тейлора для того, щоб одержати диференціальне рівняння в частинних похідних. Стійкість потім визначається з відомих властивостей стійкості диференціальних рівнянь. (Аналогічний підхід до вивчення кінцево-різницевих рівнянь за допомогою отриманих у такий спосіб диференціальних рівнянь був використаний у роботі Сайруса й Фалтона [1967] для дослідження не стійкості, а точності скінчено-різницевих методів, застосовуваних для еліптичних рівнянь).

Розглянемо знову схему з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторовій змінній для модельного рівняння, що включає конвективний і дифузійний члени, припускаючи, що u постійно:

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -u \left(\frac{\zeta_{i+1}^n - \zeta_{i-1}^n}{2 \Delta x} \right) + \alpha \left(\frac{\zeta_{i+1}^n + \zeta_{i-1}^n - 2\zeta_i^n}{\Delta x^2} \right). \quad (3.114)$$

Розкладемо кожний член рівняння (3.114) у ряди Тейлора в околі точки (x, t) , тобто відносно ζ_i^n тоді

$$\zeta_i^{n+1} = \zeta_i^n + \Delta t \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_i^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta t^3),$$

$$\zeta_{i+1}^n = \zeta_i^n \pm \Delta x \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_i^n + \frac{1}{2} \Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_i^n \pm O(\Delta x^3). \quad (3.115), (3.116)$$

Підставляючи ці розкладання в (3.114) і приводячи подібні члени, одержуємо

$$\frac{1}{\Delta t} \left[\Delta t \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} \right|_i^n + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right|_i^n + O(\Delta t^3) \right] =$$

$$= -\frac{u}{2 \Delta x} \left[2 \Delta x \left. \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right|_i^n + O(\Delta x^3) \right] + \frac{\alpha}{\Delta x^2} \left[\Delta x^2 \left. \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right|_i^n + O(\Delta x^4) \right], \quad (3.117)$$

або, опускаючи індекси i і n ,

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + O(\Delta t^2, \Delta x^2) \quad (3.118)$$

При $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$ це рівняння переходить у вихідне диференціальне рівняння в частинних похідних (2.18). Але при $\Delta t > 0$ рівняння (3.118) приймає вид

$$\frac{\Delta t}{2\alpha} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{u}{\alpha} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0. \quad (3.119)$$

Це рівняння, отримане збереженням усіх членів першого порядку в розкладаннях ряду Тейлора, є гіперболічним

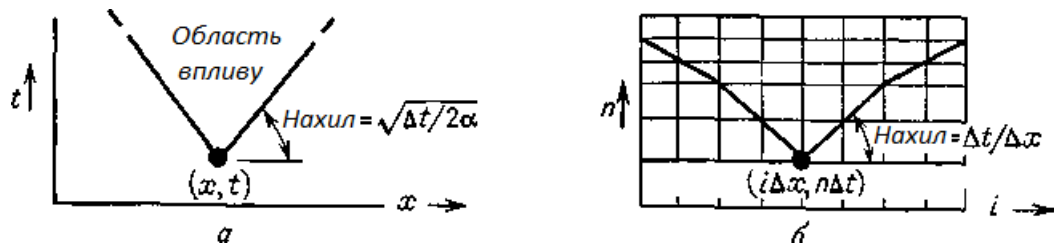


Рис. 3.9. Область впливу точки (x, t) для рівняння (3.118) гіперболічного типу, а — область впливу для диференціального рівняння; б — область впливу для скінчено-різницевого рівняння.

Як показано на мал. 3.9, а, для таких рівнянь існує область впливу довільної точки (x, t) , що обмежена характеристиками, що мають нахил $\pm\sqrt{\Delta t / (2\alpha)}$ і проходять через цю точку. Збурювання, що виникають у точці (x, t) , проявляються тільки усередині цієї області. Частину площини (x, t) , розташовану поза цією областю, іноді називають зоною мовчання.

Для скінчено-різницевого рівняння (3.114) також існує область впливу. Кожне нове розраховане значення ζ_i^{n+1} залежить від значень $\zeta_{i\pm 1}^n$ у сусідніх точках $i \pm 1$ у попередній момент часу. Інакше кажучи, кожне значення ζ_i^n впливає на значення $\zeta_{i\pm 1}^{n+1}$ в сусідніх точках на наступному шарі за часом. Цей вплив у свою чергу поширюється на значення $\zeta_{i\pm 2}^{n+2}$ і т.д. Таким чином, область впливу дискретизованого рівняння (3.118) обмежується скінчено-різницевиими «характеристичними лініями» з нахилом $\Delta t / \Delta x$ (див. мал. 3.9,б). Умова Куранта (Курант, Фрідріху й Леви [1928]) стійкості скінчено-різницевого аналога таких гіперболічних рівнянь вимагає, щоб область впливу скінчено-різницевого рівняння принаймні містила в собі область впливу диференціального рівняння. З мал. 3.9 видно, що це накладає умову $\Delta t / \Delta x \leq \sqrt{\Delta t / (2\alpha)}$,

або

$$\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\alpha}. \quad (3.120)$$

Але це обмеження на Δt в точності збігається з обмеженням, обумовленим дифузійним членом у рівнянні й отриманим раніше з аналізу стійкості як за допомогою методу дискретних збурювань, так і за допомогою методу фон Неймана.

Щоб визначити іншу необхідну умову стійкості, обчислимо член $\partial^2 \zeta / \partial t^2$ у рівнянні (3.119), диференціюючи вихідне диференціальне рівняння з урахуванням припущення $u = \text{const}$:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (3.121)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -u \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t \partial x} + \alpha \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t \partial x^2}. \quad (3.122)$$

Змінюючи порядок диференціювання й підставляючи $\partial \zeta / \partial t$ з вихідного диференціального рівняння в частинних похідних,

отримаємо

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -u \frac{\partial}{\partial x} \left(-u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right) + \alpha \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(-u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right), \quad (3.123)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = u^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - 2u\alpha \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} + \alpha^2 \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}. \quad (3.124)$$

Підставляючи цей вираз в (3.119) і перетворюючи результат, одержуємо

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\alpha - \frac{u^2 \Delta t}{2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + u\alpha \Delta t \frac{\partial^3 \zeta}{\partial x^3} - \frac{\alpha^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}. \quad (3.125).$$

Далі в рівнянні (3.125) відкидаємо доданки з похідними порядку вище другого по кожній незалежній змінній (x і t). Є дві причини такого підходу. По-перше, похідні вищих порядків звичайно менші. По-друге, а posteriori відомо, що умова стійкості, отримана в результаті цього аналізу, буде сильніше за обмеження, що накладається на крок за часом при наявності тільки дифузійного члена, лише для течій з малою в'язкістю, тобто для $\alpha \ll u$, коли коефіцієнти при вищих похідних у рівнянні (3.125) стають малими. У результаті виходить диференціальне наближення

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \alpha_{\text{эфф}} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad \text{де} \quad (3.126).$$

$$\alpha_{\text{эфф}} = \alpha - u^2 \Delta t / 2. \quad (3.127).$$

Оскільки рівняння (3.126) еквівалентно вихідному модельному диференціальному рівнянню, будемо називати $\alpha_{\text{эф}}$ ефективною в'язкістю.

З математичної (і фізичної) точки зору роль в'язкості (дифузії) полягає в «розмазуванні» (дифузії) збурювання величини ζ , у прагненні зробити розподіл ζ ; однорідним. Негативна в'язкість фізично неможлива, тому що вона приводила б до концентрації будь-яких малих збурень, що виникли в однорідному розподілі, і створювала б у такий спосіб монотонну нестійкість. Для стійкості необхідно, щоб виконувалася умова $\alpha_{\text{эф}} \geq 0$, або умова

$$\Delta t \leq 2\alpha/u^2,$$

що співпадає з умовою, отриманою за допомогою методу фон Неймана. У комбінації з умовою (3.120) вона включає умову Куранта $C = u\Delta t / \Delta x \leq 1$. Цей аналіз забезпечує необхідні, але не достатні умови стійкості для модельного рівняння з конвективним і дифузійним членами.

Вправа. Повторити попередні дві вправи по визначенню умові стійкості для схеми з різницями проти потоку, використовуючи метод Хьорта.

Метод фон Неймана для багатомірних задач

Метод дискретних збурень і метод Хьорта можуть бути поширені на випадок дослідження стійкості в багатомірних задачах. Ми ж як приклад приведемо тут більш просте узагальнення методу Неймана на такий випадок. Використовуючи схему з різницями вперед за часом і із центральними різницями по просторовій змінній для лінеаризованого рівняння переносу вихору з постійними коефіцієнтами в плоскому випадку (коли $\alpha = 1/\text{Re}$), одержуємо

$$\frac{\xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^n}{\Delta t} = -u \frac{\xi_{i+1,j}^n - \xi_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - v \frac{\xi_{i,j+1}^n - \xi_{i,j-1}^n}{2\Delta y} + \alpha \left[\frac{\xi_{i+1,j}^n + \xi_{i-1,j}^n - 2\xi_{i,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{\xi_{i,j+1}^n + \xi_{i,j-1}^n - 2\xi_{i,j}^n}{\Delta y^2} \right]. \quad (3.129)$$

Тепер запишемо кожен Фур'є-компоненту розв'язку у вигляді

$$\xi_{i,j}^n = V^n \exp[I(k_x i \Delta x + k_y j \Delta y)], \quad (3.130)$$

де V^n знову є амплітудою на часовому шарі n окремої Фур'є-компоненти, що має в напрямках x і y хвильові числа k_x й k_y (довжини хвиль $\Lambda_x = 2\pi/k_x$ і $\Lambda_y = 2\pi/k_y$), а $I = \sqrt{-1}$. Уводячи фазові кути $\theta_x = k_x \Delta x$ й $\theta_y = k_y \Delta y$ для координат x і y , запишемо вираз (3.130) як

$$\xi_{i,j}^n = V^n \exp[I(i\theta_x + j\theta_y)]; \quad (3.131)$$

аналогічно

$$\xi_{i+1,j+1}^{n+1} = V^{n+1} \exp\{I[(i+1)\theta_x + (j+1)\theta_y]\} \quad (3.132)$$

і т.д. Відповідні двовимірні аналоги числа Куранта C визначаються як $C_x = u\Delta t / \Delta x$ і $C_y = v\Delta t / \Delta y$, а відповідні аналоги величини d як $d_x = \alpha\Delta t / \Delta x^2$ і $d_y = \alpha\Delta t / \Delta y^2$. Підставляючи ці величини у вираз (3.129), скорочуючи на спільний множник $\exp[I(i\theta_x + j\theta_y)]$ і використовуючи формули Ейлера, знову одержуємо $V^{n+1} = GV^n$, де

$$G = 1 - 2(d_x + d_y) + 2d_x \cos \theta_x + 2d_y \cos \theta_y - I(C_x \sin \theta_x + C_y \sin \theta_y). \quad (3.133)$$

Очевидні необхідні умови виконання нерівності $|G| \leq 1$ будуть

$$d_x + d_y \leq 1/2$$

$$C_x + C_y \leq 1. \quad (3.134), (3.135)$$

В частинному випадку $dx = dy = d$ нерівність (3.134) приймає вигляд

$$d \leq 1/4. \quad (3.136)$$

Ця умова вдвічі сильніше обмеження, отриманого для одномірного рівняння

з одним тільки дифузійним членом. В частинному випадку $C_x = C_y = C$ нерівність (3.135) приймає вигляд

$$C \leq 1/2 \quad (3.137)$$

і знову виявляється вдвічі сильніше відповідної умови в одномірному випадку. Для частинного випадку $\Delta x = \Delta y = \Delta$ й $\theta_x = \theta_y$ обмеження на сіткове число Рейнольдса $Re = (|u| + |v|)\Delta / \alpha$ дається нерівністю

$$Re_c \leq 4, \quad (3.138)$$

яке є менш жорстким, ніж в одномірному випадку.

Вправа. Застосувати метод Неймана для дослідження стійкості схеми з різницями проти потоку для рівняння переносу у випадку нульової в'язкості

$$\frac{\zeta_{i,j}^{n+1} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t} = -u \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i-1,j}^n}{\Delta x} - v \frac{\zeta_{i,j}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \quad u > 0, \quad v > 0.$$

(3.139)

Показати, що умова стійкості має вигляд

$$C_x + C_y \leq 1. \quad (3.140)$$

Вправа. Застосувати метод Неймана до схеми з різницями вперед за часом і центральними різницями по просторових змінних для тривимірного рівняння дифузії

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \alpha \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \right) \quad (3.141)$$

і показати, що умова

$$d_x + d_y + d_z \leq 1/2 \quad (3.142)$$

є необхідною і достатньою для стійкості. В частинному випадку,

коли $dx = dy = dz = d$, умова (3.142) має вигляд

$$d \leq 1/6 \quad (3.143)$$

і виявляється втричі жорсткіше, ніж в одномірному випадку.

Завдання для самостійної роботи. (2 год.)

Побудувати апріорну оцінку кількості арифметичних операцій при використанні явних та неявних різницевих алгоритмів знаходження розв'язків дво і тривимірних рівнянь переносу.