Лекція 6. Дослідження стійкості різницевих схем. Метод фон Неймана. Коефіцієнт та матриця переходу. – 2 **год.** [1, 4, 5: стор.69-]

http://www.unicyb.kiev.ua/Library/Methods_dif_sheems/zmist.htm

Метод фон Неймана. Коефіцієнт та матриця переходу. Явні та неявні різницеві схеми, алгоритми дослідження. Теореми про збіжність ряду Фур'є та стійкість явної та неявної різницевих схем.

Метод фон Неймана (метод Фур'є) для дослідження стійкості скінченно–різницевих рівнянь із сталими коефіцієнтами.

Подання функцій у вигляді рядів та інтегралів Фур'є.

Якщо вектор – функція $\vec{u}(\vec{x})$ $\left(x=(x_1,x_2,...x_d)\right)$ з простору B періодична за кожним з аргументів x_j з періодом L_j, то її *ряд Фур'є* має вигляд

$$\vec{u}(\vec{x})=\left(\frac{1}{L_1L_2\ldots L_d}\right)^{1/2}\sum_{\vec{k}\in L}\vec{\tilde{u}}(\vec{k})e^{I\vec{k}\vec{x}}, \qquad (4.1)$$

де $I^2=-1$, $\vec{k}$ є d–вимірний вектор, який при підсумуванні пробігає множину L, складену з векторів $\vec{k}_i$, компоненти k_j яких незалежно один від одного приймають всі можливі значення вигляду $2\pi r_j / L_j$, де r_j – довільне ціле число.

Векторний коефіцієнт Фур'є $\vec{\tilde{u}}(\vec{k})$, розглянутий як функція аргументу $\vec{k}$ на множині L, визначає точку в просторі B'

$$\vec{\tilde{u}}(\vec{k})=\left(\frac{1}{L_1L_2\ldots L_d}\right)^{1/2}\int_0^L\vec{u}(\vec{x})e^{-I\vec{k}\vec{x}}d\vec{x}. \qquad (4.2)$$

Тут позначено $\int_0^L d\vec{x}=\int_0^{L_1}dx_1\ldots\int_0^{L_d}dx_d$.

В просторах B і B' введемо середньоквадратичні норми. Тоді *рівність Парсеваля*

$$\int_0^L\left|\vec{u}(\vec{x})\right|^2d\vec{x}=\sum_{k\in L}\left|\vec{\tilde{u}}(\vec{k})\right|^2, \quad \text{де} \quad \left|\vec{u}\right|^2=\sum_{j=1}^{p}\left|u_j\right|^2 \qquad (4.3)$$

встановлює однозначну відповідність між елементами цих просторів із збереженням норми (ізоморфізм).

Довільну інтегровну з квадратом вектор – функцію $\vec{u}(\vec{x})$ можна подати у вигляді інтегралу Фур'є

$$\vec{u}(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int\vec{\tilde{u}}(\vec{k})e^{I\vec{k}\vec{x}}d\vec{k}, \qquad (4.4)$$

де інтегрування ведеться по всьому простору змінних $k_1,k_2,\ldots k_d$, а функція

$\vec{\tilde{u}}(\vec{k})$ визначається рівністю

$$\vec{\tilde{u}}(\vec{k})=\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int \vec{u}(\vec{x})e^{-i\vec{k}\vec{x}}d\vec{x} \qquad (4.5)$$

Рівність Парсеваля в цьому випадку має вигляд

$$\int\left|\vec{u}(\vec{x})\right|^2 d\vec{x}=\int\left|\vec{\tilde{u}}(\vec{k})\right|^2 d\vec{k}. \qquad (4.6)$$

Під функцією e^X, аргументом якої є $p\times p$ матриці, будемо розуміти степеневий ряд

$$e^X=1+X+\frac{1}{2!}X^2+\frac{1}{3!}X^3+\ldots+\frac{1}{N!}X^N+\ldots.$$

Для достатньо гладких функцій всі ці рівності можна розуміти буквально. Але може виявитись, що простори B і B' не будуть повними. Тому для збереження необхідного рівня строгості доцільно прийняти всі положення теорії гільбертового простору L_2.

Зокрема будемо вважати: дві функції рівними, якщо вони різняться одна від одної на множині міри нуль; інтеграли розуміти як інтеграли Лебега; збіжність до границі – як збіжність в середньо квадратичному.

Під рівністю (4.1) будемо розуміти $\|u-u_n\|\to 0$ при $n\to\infty$, якщо під u_n розуміємо послідовність часткових сум ряду, для яких індекс підсумування змінюється від $-n$ до n. Аналогічно, під рівністю (4.4) розуміємо границю $\|u-u_K\|\to 0$ при $K\to\infty$, в якій u_j – це інтеграл, для якого кожна змінна k_j пробігає інтервал $-K\le k_j\le K$.

При прийнятті цих умов простори B і B' є повними банаховими просторами. Перетворення (4.2) відображає весь простір B в B' і в силу теореми Фур'є є оберненим по відношенню до (4.1), а за теоремою Рісса – Фішера, перетворення (4.1) переводить весь простір B' в B, так що довільна визначена на L послідовність $\vec{\tilde{u}}(\vec{k})$, для якої збігається сума в правій частині рівності (4.3), є послідовністю коефіцієнтів Фур'є деякої функції $\vec{u}(\vec{x})\in B$. Аналогічно, (4.4) в силу теореми Планшереля є взаємно однозначним відображенням простору B' на простір B, а (4.5) – оберненим до нього.

Далі при використанні перетворення Фур'є ми будемо неявно використовувати усі прийняті положення, а під множиною L розуміти або увесь простір змінних $k_1,k_2,\ldots,k_d$, або описану вище дискретну решітку.

Нагадаємо, що *носієм функції* називається замикання множини тих точок, у яких вона відмінна від нуля. Кажуть, що функція має *компактний носій*, якщо її носієм є компактна множина.

Зауваження відносно **коректності** постановок задач. Перша вимога коректності крайових задач про щільність області визначення розв'язуючого оператора $E_0(t)$ в B, випливає з того, що початковий елемент $\vec{u}(\vec{x},0)$ можна як завгодно точно наблизити тригонометричним поліномом або функцію $\vec{u}(\vec{x},0)$ можна подати за допомогою перетворення Фур'є з компактним носієм. Такі початкові множини у обох випадках є щільними в B.

Друга умова коректності у даному разі полягає в тому, що $\left\| e^{tp(Ik)} \right\|$ повинна бути рівномірно обмеженою за усіма k, тоді

$$\|E(t)\| = \max_{k\in L} \left\| e^{tp(Ik)} \right\|.$$

Виконання цієї умови потрібно перевіряти у кожному конкретному випадку окремо.

Надалі ми будемо вважати, що маємо справу тільки з коректно поставленими задачами. У цьому випадку вибір банахового простору є частиною постановки задачі. Як ми уже бачили вище, вибір середньоквадратичної метрики визначається бажанням використати перетворення Фур'є, але для самого розв'язку $\vec{u}$, норма якого визначена як середньоквадратична, залишається ще значна свобода вибору. Це відноситься до випадків, коли перед застосуванням загальної теорії диференціальних рівнянь, рівняння високого порядку приводиться до системи рівнянь першого порядку. Так у [5] розглянуто задачу про хвильовий рух, яка є коректною при одному простому виборі банахового простору і не коректною при іншому також простому його виборі.

Для цих простіших випадків перевірка коректності, як правило, порівняно не складна. Проте існують задачі, наприклад задача про багатовимірний рух рідких середовищ, для яких до нашого часу незрозуміло як коректно поставити крайову задачу, не використовуючи додаткових фізичних принципів.

Крім того ми будемо вважати, що усі неявні різницеві рівняння

$$B_1\vec{u}^{n+1} - B_0\vec{u}^n = 0,$$

тобто рівняння у яких оператор B_1 не є діагональною матрицею, мають єдиний розв'язок принаймні для умов періодичності за просторовими змінними.

Умови стійкості чисельних алгоритмів.

Нехай тепер $\vec{u}^n = \vec{u}^n(\vec{x})$ є наближенням розв'язку $\vec{u}(\vec{x}, n\Delta t)$ системи різницевих рівнянь

$$B_1\vec{u}^{n+1} - B_0\vec{u}^n = 0.$$

Ці різницеві рівняння можна записати у вигляді

$$\sum_{\beta\in N_1} B_1^{\beta} T^{\beta} \vec{u}^{n+1} = \sum_{\beta\in N_0} B_0^{\beta} T^{\beta} \vec{u}^n, \qquad (4.7)$$

де підсумування проведене за всіма точками шаблонів N_1 і N_0; через T^{β} позначено складову різницевого оператора, яка замінює значення функції в точці $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots x_d)$ на значення функції в деякій точці шаблона N_j оператора B_j $(j = 0,1)$

$$\left(x_1 + \beta_1 \Delta x_1, x_2 + \beta_2 \Delta x_2, \ldots x_d + \beta_d \Delta x_d\right),$$

а компоненти векторного індексу $\beta = \left(\beta_1, \ldots \beta_d\right)$ приймають певні цілі значення.

Коефіцієнти матриці B_1^{β} і B_0^{β}, які ставляться у відповідність значенням функції в кожній точці шаблона, можуть залежати від приростів координат Δt і Δx, але не залежать від самих координат.

При виконанні таких умов щодо функцій $\vec{\mathrm{u}}^{n}$ і $\vec{\mathrm{u}}^{n+1}$ можна застосувати перетворення Фур'є [8].

Нехай задача (4.7) має розв'язок, тобто існує обмежений обернений оператор B_1^{-1} і

$$\vec{\mathrm{u}}^{n+1} = B\vec{\mathrm{u}}^{n}, \qquad (4.8)$$

де $B = B_1^{-1}B_0 = \sum_{\beta\in N} B^{\beta}T^{\beta}$, N – шаблон оператора B.

Уважаємо, що розв'язок задачі – періодична вектор – функція. В іншому разі її можна продовжити в деяку область, таким чином, щоб в цій області вона стала періодичною.

Відзначимо, що функцію f, визначену на напіввідкритому інтервалі довжини $2l$, тобто на $[a,a+2l)$ або $(a,a+2l]$, можна продовжити (причому єдиним чином) на всю числову вісь так, що одержана функція буде періодичною з періодом $2l$, а будь-яка періодична функція, яка має на проміжку $\left(a,a+2l\right)$. не більше ніж скінчене число точок розривів і абсолютно інтегровна на цьому сегменті, у всіх внутрішніх точках диференційованості з цього сегмента може бути розвинутою в ряд Фур'є.

Уведемо банаховий простір B' сіткових векторних функцій

$$\vec{\phi}(m_s) = \{\xi^{(1)}(m_s),...,\xi^{(d)}(m_s)\}^T$$

амплітудних членів m_s –тих гармонік розвинення розв'язку в збіжні ряди Фур'є

$$\vec{u}_i^{n+1} = \sum_{s=1}^{d}\sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s)\vec{\phi}^{n+1}(m_s)e^{I\sum_{l=1}^{d} i_l m_l h_l}, \qquad (4.9)$$

де $A(m_s)$ –діагональна матриця, складена з коефіцієнтів розвинення вектор – функції $\vec{u}(x,0)$ в ряди Фур'є, а $\vec{\phi}(m_s)$ – вектори, які підлягають визначенню у процесі розв'язування різницевого рівняння (4.8)

$$\sum_{s=1}^{d}\sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s)\vec{\phi}^{n+1}(m_s)e^{I\sum_{l=1}^{d} i_l m_l h_l} = B\left(\sum_{s=1}^{d}\sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s)\vec{\phi}^{n}(m_s)e^{I\sum_{l=1}^{d} i_l m_l h_l}\right).$$

Оскільки оператор B лінійний і B^{β} не залежить від координат, то обидві частини рівняння мають типовий множник

$$e^{I\sum_{l=1}^{d} i_l m_l h_l} \neq 0.$$

Розділивши обидві частини останнього рівняння на цей множник, одержимо

$$H_1\vec{\phi}^{n+1}(\vec{\mathrm{k}}) - H_0\vec{\phi}^{n}(\vec{\mathrm{k}}) = 0,$$

де

$$H_1 = \sum_{\beta \in N_1} B_1^{\beta} e^{I\{k_1\beta_1\Delta x_1 + \ldots + k_d\beta_d\Delta x_d\}}$$

і

$$H_0 = \sum_{\beta \in N_0} B_0^{\beta} e^{I\{k_1\beta_1\Delta x_1 + \ldots + k_d\beta_d\Delta x_d\}}$$

Тоді оператори H_1 і H_0 не залежать від x_s та t і залежать тільки від Δt та m для всіх s. Якщо матриця H_1 має обернену і виконується умова узгодженості розв'язку різницевого рівняння (4.8) з початковою умовою, тобто $\left\|\vec{\phi}^{\,0}\right\| = 1$, то з останнього рівняння маємо рекурентну формулу для визначення $\vec{\phi}(m_s)$

$$\vec{\phi}^{\,n+1}(m_s) = G(m_s, \Delta t, \Delta x)\vec{\phi}^{\,n}(m_s), \qquad (4.10)$$

де $G(m_s, \Delta t, \Delta x) = H_1^{-1}H_0$ – ***матриця переходу***. Оскільки рівність (4.10) є аналогом рівності $u^{n+1} = C(\Delta t)u^n$ в просторі B і визначає в просторі перетворень Фур'є B' оператор, що відповідає оператору $C(\Delta t)$ в просторі B, то умова стійкості рівняння (4.7) полягає в тому, що для деякого числа $\tau > 0$ нескінченна множина матриць $G^n(m_s, \Delta t, \Delta x)$ при $0 < \Delta t < \tau$, $0 \le n\Delta t \le T$ і $\forall \vec{k} \in L$ повинна бути рівномірно обмеженою.

Враховуючи збіжність ряду (4.9), після очевидних перетворень маємо

$$\sum_{s=1}^{d} \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s) e^{I\sum_{l=1}^{d} i_l m_l h_l} \left(\vec{\phi}^{\,n+1}(m_s) - G\left(m_s, \Delta t, \Delta x\right)\vec{\phi}^{\,n} \right) = 0.$$

Теорема. *Якщо норма матриці переходу менша від одиниці, а функції початкового розподілу розв'язку $\vec{u}(x,0)$ розвиваються в абсолютно збіжний ряд Фур'є, то точний періодичний розв'язок різницевого рівняння (4.8) із сталими коефіцієнтами може бути поданий у вигляді ряду Фур'є (4.9).*

Для доведення цього твердження обидві частини (4.10) помножимо на $A(m_s)e^{I\sum_{l=1}^{d} i_l m_l h_l}$, і підсумуємо результат за всіма значеннями m_s та s. Тоді, маємо

$$\vec{u}^{\,n+1} = \sum_{s=1}^{d} \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s)\vec{\phi}^{\,n+1}(m_s) e^{I\sum_{l=1}^{d} i_l m_l h_l} =$$

$$= \sum_{s=1}^{d} \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} A(m_s) G(m_s, \Delta t, \Delta x)\vec{\phi}^{\,n}(m_s) e^{I\sum_{l=1}^{d} i_l m_l h_l}.$$

Отже

$$\left\|\vec{u}^{\,n+1}\right\| \le \sum_{s=1}^{d} \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \left\|A(m_s)\right\| \left\|G(m_s, \Delta t, \Delta x)\right\| \left\|\vec{\phi}^{\,n}(m_s)\right\| \le$$

$$\le q^n \sum_{s=1}^{d} \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} \left\|A(m_s)\right\|.$$

Оскільки $q = \max\limits_{m_s} \left\| G(m_s, \Delta t, \Delta x) \right\| \le 1$, а ряд Фур'є для початкової функції абсолютно збіжний, то остання нерівність є мажорантою для збіжності ряду (4.9).

Отже ряд (4.9) збіжний, задовольняє початкові умови різницевої задачі та різницеве рівняння (4.8) оскільки вектори $\vec{\phi}(m_s)$ є розв'язками різницевого рівняння (4.10). Тобто він є точним розв'язком задачі (4.7), а умова

$$q = \max_{m_s} \left\| G(m_s, \Delta t, \Delta x) \right\| \le 1$$

є необхідною умовою стійкості різницевої схеми (4.7). Теорему доведено.

Тут і далі норму лінійного оператора P, заданого в B' за допомогою матриці $A(\vec{\mathrm{k}})$ визначаємо так

$$\left\| P \right\| = \max_{\vec{\mathrm{k}} \in \mathrm{L}} \left\| A(\vec{k}) \right\|,$$

де при фіксованому $\vec{\mathrm{k}}$

$$\left\| A(\vec{\mathrm{k}}) \right\| = \max_{|\vec{\mathrm{V}}|=1} \left| \left(A(\vec{\mathrm{k}}), \vec{\mathrm{V}} \right) \right| = \max_{\vec{\mathrm{V}}=0} \frac{\left| \left(A(\vec{\mathrm{k}}), \vec{\mathrm{V}} \right) \right|}{\left| \vec{\mathrm{V}} \right|},$$

а під $|\cdot|$ розуміємо норму в евклідовому векторному просторі.

Виконання нерівності

$$\rho\left(G^n (m_s, \Delta t, \Delta x)^n \right) = \max_j \left| \lambda_j \right| \le 1 + O(\Delta t)$$

при $0 < \Delta t < \tau$, $0 \le n\Delta t \le T$ і $\forall \vec{k} \in L$,
де λ_j – власні числа матриці $G(m_s, \Delta t, \Delta x)$, є *необхідною умовою стійкості фон Неймана.*

Таке визначення стійкості при малих τ допускає скінчене зростання значення похибки за часом.

Якщо матриця $G(m_s, \Delta t, \Delta x)$ нормальна, то умова фон Неймана є не тільки необхідною, але й достатньою умовою.

Зокрема, при $p = 1$, тобто коли матриця переходу вироджується у множник переходу, умова фон Неймана для двошарової різницевої схеми з однією залежною змінною є необхідною і достатною умовою стійкості.

Оскільки

$$\rho\left(G(m_s, \Delta t, \Delta x) \right) \le \left\| G(m_s, \Delta t, \Delta x) \right\|_{B'},$$

то розв'язок відповідного різницевого рівняння стійкий, якщо для деякого додатного числа M і деякого $\tau > 0$ при $0 < \Delta t < \tau$ виконується нерівність

$$\left\| G(m_s, \Delta t, \Delta x) \right\|_{B'} \le 1 + M\Delta t. \qquad (4.11)$$

В цьому випадку при $0 \le n\Delta t \le T$ $0 < \Delta t < \tau$ маємо

$$\left\| G(m_s, \Delta t, \Delta x) \right\|_{B'} \le e^{MT}.$$

Малі збурення оператора $C(\Delta t)$ не порушують стійкості розв'язку різницевого оператора, що випливає з твердження.

Теорема Крайса [5]. Якщо розв'язок різницевого рівняння $\vec{u}^{n+1} = C(\Delta t)\vec{u}^{n}$ стійкий, а сімейство операторів $Q(\Delta t)$ – обмежене, то розв'язки рівнянь

$$\vec{u}^{n+1} = \left[C(\Delta t) + \Delta t Q(t)\Delta\right]\vec{u}^{n}$$

також стійкі.

У ряді випадків уводиться більш жорстка умова, а саме $\max\limits_{j}\left|\lambda_j\right| \le 1$. Це виправдовується тим, що у цих випадках граничні умови задачі не залежать від часу, тобто розв'язок задачі прямує до деякої стаціонарної функції не зростаючи.

Кажуть, що розв'язок різницевої задачі *слабко стійкий*, якщо розв'язуючий оператор схеми задовольняє нерівності

$$\left\|C^{n}(\Delta t)\right\| \le const(\Delta t)^{-\alpha} = const(n)^{\alpha}$$

$$\text{при } 0 \le n\Delta t \le T \text{ та } 0 < \Delta t < \tau$$

для деякого фіксованого скінченого $\alpha \ge 0$ (традиційно $\alpha = 0$).

Деякі визначення стійкості дозволяють розв'язку задачі бути більш чутливий до збурень. Так, якщо замість рівномірної обмеженості операторів $C^{n}(\Delta t)$ вимагається щоб їх зростання за нормою не перевищувало швидкість зростання деякого степеня $1/\Delta t$ при $\Delta t \to 0$, то просте збурення може привести до невиправданого зростання норм відповідної множини операторів переходу.

Якщо для крайової задачі область визначення оператора $E_0(t)$ щільна в B , але $E_0(t)$ не обмежений ні в одному з інтервалів $0 < t < \tau$, то не існує різницевої схеми, апроксимація якої була б узгодженою з цією задачею і стійкою.

При дослідженні стійкості розв'язків практичних задач необхідно слідкувати, щоб обмеження, які накладаються на початкову функцію, виконувались для розв'язку цієї задачі.

Резюмуючи, доцільно відзначити, що існують випадки, коли жодне з наведених нами визначень стійкості різницевих схем не може бути використане для практичних задач. Такою задачею є, наприклад, задача про спільне розповсюдження звуку та теплоти та інші [5].

Приклади застосування методу фон Неймана

1. Розглянемо початково – крайову задачу теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le T, \ \alpha = const > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad -\pi \le x \le \pi$$

з періодичним за просторовою змінною розв'язком.

Явна різницева схема, яка апроксимує цю диференціальну задачу, має вигляд

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \alpha \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \ i = \overline{-M+1, M-1}, \ n = \overline{1, N},$$

$$u_0^n = u_M^n, \quad u_1^n = u_{M+1}^n, \quad n = \overline{1, N},$$

$$u_i^0 = \varphi_0(ih), \quad i = \overline{-M+1, M-1}.$$

Будемо уважати, що початкова функція $\varphi_0(jh)$ розвивається у абсолютно збіжний ряд Фур'є, а сам розв'язок різницевої задачі можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$u_j^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^n(m) \exp(I m j h) \quad (4.12).$$

Тут I – уявна одиниця ($I^2 = -1$), A_m – коефіцієнти Фур'є початкової функції $\varphi_0(jh)$, $V(m)$ – амплітудні коефіцієнти, які підлягають подальшому визначенню.

Нехай ряд, яким подано розв'язок, збіжний. Підставимо шуканий розв'язок у різницеве рівняння і враховуючи, що $\forall m \ \ A_m \exp(I m j h) \ne 0$, для визначення $V(m)$ одержимо рівняння

$$V(m) - 1 = \frac{\alpha\tau}{h^2}\left(e^{Imh} - 2 + e^{-Imh}\right).$$

Оскільки $e^{Imh} + e^{-Imh} = 2\cos(mh)$, то

$$V = V(m) = 1 + d\left(\cos(mh) - 1\right), \ \ d = 2\alpha\tau / h^2.$$

При виконанні останньої рівності сіткова функція (4.12) буде розв'язком різницевого рівняння, задовольняти граничні умови періодичності, а також початкові умови.

Очевидно, що при $\max\limits_m |V(m)| \le 1$ ряд Фур'є (4.12) є збіжним. Легко також переконатися, що

$$G = V(m) = 1 + d\left(\cos(mh) - 1\right)$$

є коефіцієнтом переходу розв'язку різницевого рівняння з часового шару $t_n = n\tau$ на шар $t_{n+1} = (n+1)\tau$, а умова $q \equiv \max\limits_m |G(m)| \le 1$ є умовою стійкості різницевого розв'язку.

Дійсно, обидві частини очевидної рівності

$$V^{n+1}(m) = GV^n(m)$$

розділимо на $A_m \exp(I m j h) \ne 0$, підсумуємо результат за усіма m

$$u_j^{n+1} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^{n+1}(m) \exp(I m j h) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m G(m) V^n(m) \exp(I m j h)$$

і зробимо оцінку

$$\left|u_j^{n+1}\right| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^{n+1}(m)\exp(Imjh)\right| = \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m G(m) V^n(m)\exp(Imjh)\right| \le$$

$$\le \max_m \left|G(m)\right| \left|\sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^n(m)\exp(Imjh)\right| \le q\left|u_j^n\right|,$$

або

$$\left\|u^{n+1}\right\| = h\left(\sum_{j=-M+1}^{M-1}\left(u_j^{n+1}\right)^2\right)^{1/2} \le q^n h\left(\sum_{j=-M+1}^{M-1}\left(u_j^{0}\right)^2\right)^{1/2} = q^n\left\|u^0\right\|.$$

Отже, $\left\|u^{n+1}\right\| \le q^n \left\|u^0\right\|$ і умовою стійкості різницевої схеми є $\max_m\left|G(m)\right| \le 1$. Звідси випливає, що для усіх m

$$-1 \le 1 + d\left(\cos(mh) - 1\right) \le 1 \text{ або } -1 \le 1 - 2d\sin^2(mh/2) \le 1$$

тобто $d \le 1/2$, або

$$\tau \le h^2/(2\alpha).$$

2. До апроксимації початково – крайової задачі теплопровідності

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\pi \le x \le \pi, \quad 0 \le t \le T, \quad \alpha = const > 0,$$

$$u(x,0) = \varphi_0(x), \quad -\pi \le x \le \pi$$

з періодичним за просторовою змінною розв'язком застосуємо <u>неявну різницеву схему</u>

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \alpha\frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2}, \quad i = \overline{-M+1, M-1}, \quad n = \overline{1, N},$$

$$u_0^n = u_M^n, \quad u_1^n = u_{M+1}^n, \quad n = \overline{1, N},$$

$$u_i^0 = \varphi_0(ih), \quad i = \overline{-M+1, M-1}.$$

Як і раніше вважаємо, що початкова функція $\varphi_0(jh)$ розвивається у абсолютно збіжний ряд Фур'є, а сам розв'язок різницевої задачі можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$u_j^n = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m V^n(m)\exp(Imjh) \qquad (4.13).$$

Після підстановки шуканого розв'язку у різницеве рівняння і врахування, що $A_m\exp(Imjh) \ne 0 \quad \forall m$, для визначення $V(m)$ маємо рівність

$$V(m) = \left(1 + d\left(1 - \cos(mh)\right)\right)^{-1}.$$

Очевидно, що у цьому випадку $\max_m\left|V(m)\right| \le 1 \ \forall m$ і отже ряд Фур'є (4.13) є збіжним, а функція (4.13) розв'язком різницевої задачі.

Оскільки модуль коефіцієнта переходу $\left|G\right| = \left|V(m)\right|$ розв'язку різницевого рівняння з часового шару $t_n = n\tau$ на шар $t_{n+1} = (n+1)\tau$ менший від одиниці для усіх m, то різницева схема буде безумовно стійкою.

3. Розглянемо задачу Коші для рівняння конвективного переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k\frac{\partial u}{\partial x}, \quad u(x,0) = u_0,$$
$$-\infty < x < \infty,\ 0 < t < \infty$$

і запишемо для неї <u>явну центрально різницеву схему</u>

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = -k\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h}.$$

Стійкість цієї схеми дослідимо застосовуючи метод фон Неймана. Розв'язок задачі будемо шукати у вигляді ряду Фур'є (4.13). Після підстановки розв'язку у різницеве рівняння і проведення перетворень аналогічних до проведених у першому прикладі, для визначення множника переходу одержимо

$$V(m) = 1 - \frac{k\tau}{2h}\left(e^{Imh} - e^{-Imh}\right) = 1 + IC\sin mh.$$

Тут $C = k\tau / h$ число Куранта. Оскільки

$$\left|V(m)\right|^2 = 1 + C^2\sin^2 mh \geq 1,$$

то цей чисельний алгоритм не буде стійким ні при яких значення τ та h.

Стійкою для цієї задачі є різницева схема з різницями проти потоку. Для одновимірного хвильового рівняння цю різницеву схему можна подати як схему з односторонніми різницями першого порядку апроксимації за просторовими змінними

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \begin{cases} -k(u_i^n - u_{i-1}^n)/h & \text{k} > 0 \\ -k(u_{i+1}^{n+1} - u_i^n)/h & \text{k} < 0 \end{cases}.$$

Така схема має перший порядок апроксимації. Використовуючи метод фон Неймана, легко переконатися, що умовою стійкості цієї схеми буде $\left|C\right| \leq 1$, де $C = k\tau / h$ – число Куранта.

4. Простіша тришарова схема другого порядку апроксимації

Для рівняння конвективного переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

запишемо <u>тришарову різницеву схему</u>

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\Delta t} = -k\,\frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{\Delta x}.$$

За допомогою безпосередньої перевірки легко переконатися, ця схема має другий порядок апроксимації за обома змінними.

Дослідження цієї схеми проведемо за методом фон Неймана. Для цього записане різницеве рівняння подаємо у вигляді

$$u_i^{n+1} = u_i^n - C\left(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n\right)$$

ду $C = u\Delta t / \Delta x$ – число Куранта. Після підстановки в останню формулу гармоніку ряду Фур'є (4.13) та виконання елементарних перетворень, приходимо до рівності

$$V^{n+1} = aV^n + V^{n-1},$$

де $a = -2IC\sin\theta$, а $\theta = m\Delta x$.

Для того, щоб одержати рівняння для визначення матриці переходу додатково розглянемо тотожність

$$V^n = 1 \cdot V^n + 0 \cdot V^{n-1}.$$

Об’єднавши ці дві рівності одержуємо векторне рівняння

$$\begin{bmatrix} V^{n+1} \\ V^n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} V^n \\ V^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Тут матриця $G(m) = \begin{pmatrix} a(m) & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ є матрицею переходу.

Використаємо відоме твердження:
для стійкості багатошарової різницевої схеми спектральний радіус матриці переходу $\rho(G) = \max_j |\lambda_j|$ (тут λ_j j – те власне значення матриці G) не повинен перевищувати одиниці.

Отже, для установлення умови стійкості необхідно дослідити, при яких усі умовах розв’язки характеристичного рівняння

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

або

$$\lambda^2 - a\lambda - 1 = 0$$

менші від одиниці.

Оскільки $\lambda_\pm = \left[a \pm \sqrt{a^2+4} \right]/2$, а $a = -2IC\sin\Theta$, то при $C^2 \sin^2\Theta > 1$ власні числа матриці G

$$\lambda_\pm = I\left[-C \pm \sqrt{C^2 \sin^2\Theta - 1} \right]$$

є чистп уявними числами, модуль яких більший від одиниці. Якщо $C^2 \sin^2\theta \le 1$, (оскільки умова стійкості повинна виконуватись для всіх гармонік ($\forall m$), це еквівалентно умові $|C| \le 1$) то

$$|\lambda_\pm|^2 = \lambda\bar{\lambda} = 1$$

і отже, різницева схема буде стійкою при $|C| = 1$.

Робити висновок, що така умова є задовільною тільки в крайньому разі невірно. Це граничне значення умови стійкості є навіть бажаним в випадку, коли розв’язок початкового диференціального рівняння не затухає. Дійсно, рівняння конвективного переносу описує простий зсув довільного початкового розподілу $u(x,0)$ функції із швидкістю конвекції k $(k\tau = h)$. Тобто за проміжок часу τ розв’язок переноситься з точки $(x-k\tau, t)$ у точку $(x, t+\tau)$ і при цьому маємо $u(x, t+\tau) = u(x-k\tau, t)$. Якщо $C=1$, то запропонована тришарова різницева схема дає точний розв’язок задачі. Вибираючи $\tau = \Delta t$, маємо $x - k\tau = x - C\Delta x$, а отже, точний розв’язок диференціального рівняння на сітковій множині запишеться відповідно:

$$u_{i+1}^n = u_i^{n-1} \text{ в точці } (x_i + \Delta x, t_n)$$

$$u_i^{n+1} = u_{i-1}^n \quad \text{в точці } \left(x_i, t_n + \Delta t\right).$$

Об'єднавши ці рівності приходимо до рівняння

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} - u_{i+1}^n + u_{i-1}^n,$$

яке відповідає розглянутій трикроковій різницевій схеми при $C = 1$. Тобто у даному разі розв'язок різницевої задачі співпадає з точним розв'язком диференціальної.

Відмітимо, що при $k \neq const$ досягти виконання умови $C = 1$ практично неможливо.

Суттєвим недоліком тришарових схем є те, що для знаходження розв'язку потрібно задавати не один початковий розподіл в момент часу $t = 0$, як це робиться для диференціальної задачі, а задавати значення на двох часових кроках t_0 та t_1. Тобто різницева рівняння є по суті рівнянням другого порядку і вимагає початкових умов, еквівалентних умовам $u(x,0) = \phi(x)$ та $\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi(x)$, які приводять до перевизначеності диференціальної задачі. Для подолання цієї проблеми використовують наближені значення шуканого розв'язку, одержаного за допомогою деякого двошарового різницевого методу. При цьому для збереження другого порядку точності розв'язку в двошаровій схемі використовують значно менший крок $\tau' = \tau / k$ і за значення u_i^1 приймають значення одержане в момент часу $k\tau'$.

Завдання для самостійної роботи. *(4 год.)*

Побудувати та дослідити стійкість різницевих схем, які апроксимують рівняння дифузійного та конвективного переносу з двома та трьома просторовими змінними. Визначити, які з них будуть консервативними та транспортивними. [1: стор. 107, 3]

Рекомендована література

1. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М. "Мир" 1980. с-616.
2. Андерсон Д., Танненхилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидродинамика и теплообмен. т 1, т 2, М. "Мир" ,1990
3. Самарський А.А. Теория разностных схем. М.:"Наука" –1983 –616с.
4. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Методи Фур'є та першого диференціального наближення в теорії різницевих схем. – ВПЦ "Київський університет", 2005 –84 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. –М.: "Мир" 1972 – 418 с.
6. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. – "Мир"
7. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы.– М.:"Наука" –1977 – 440с.

8. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. – М.:Наука, 1989. 384 с.