Лекція 4. Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі. – 2 **год.** [4:стор.26-30, 5:174-185]

Багатошарові та багатокрокові чисельні моделі. Методи дослідження. Особливості подання початкових умов. Зведення їх до однокроклвих.

Багатошарові чисельні моделі

Нехай крайова задача

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = A\vec{u}\,; \quad \vec{u}=\vec{u}(t)\,,\ t>0 \qquad (1)$$

апроксимується за допомогою $(q+1)$ – шарової різницевої схеми

$$B_q\vec{u}^{n+q} + B_{q-1}\vec{u}^{n+q-1} + \ldots + B_0\vec{u}^n = 0\,, \qquad (2)$$

де $B_q,\ldots,B_0$ – скінченно–різницеві оператори, а $\vec{u}^n$ – деяка апроксимація $\vec{u}(n\Delta t)$. Припустимо, що рівняння (2) разом з відповідними граничними умовами має єдиний розв'язок відносно $\vec{u}^{n+q}$, залежний від $\vec{u}^{n+q-1},\ldots,\vec{u}^n$. Запишемо еквівалентне до (2) рівняння

$$\vec{u}^{n+q} = C_{q-1}\vec{u}^{n+q-1} + \ldots + C_0\vec{u}^n\,, \qquad (3)$$

де $C_i = C_i(\Delta t) = B_q^{-1}B_i;\ i=\overline{1,q-1}$ – лінійні обмежені оператори, а Δx_j є заданими функціями від Δt.

Уведемо нові залежні змінні: $\vec{v}^n = \vec{u}^{n-1}$, $\vec{w}^n = \vec{v}^{n-1}$ і так далі, тоді рівняння (3) замінено системою

$$\begin{aligned}
\vec{u}^{n+1} &= C_{q-1}\vec{u}^n + C_{q-2}\vec{v}^n + C_{q-3}\vec{w}^n + \ldots,\\
\vec{v}^{n+1} &= \vec{u}^n,\\
\vec{w}^{n+1} &= \vec{v}^n,\\
&\ \vdots
\end{aligned} \qquad (4)$$

Якщо $\tilde{\mathbf{B}}$ це простір, елементами якого є q – вимірні вектор – стовпчики $\vec{\tilde{\phi}} = \begin{bmatrix} \vec{u}^{n+q-1} \\ \vdots \\ \vec{u}^n \end{bmatrix}$, з нормою введеною, наприклад, так

$$\left\| \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vdots \end{bmatrix} \right\| = \left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + \cdots \right)^{\frac{1}{2}}$$ і якщо покласти

$$\tilde{C} = \begin{pmatrix} C_{q-1} & C_{q-2} & \cdots & C_1 & C_0 \\ E & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \cdots & E & 0 \end{pmatrix},$$

де E – тотожний оператор, то рівняння (4) можна записати так

$$\vec{\tilde{\phi}}^{n+1}=\tilde{C}(\Delta t)\vec{\tilde{\phi}}^{n}, \text{ де } \vec{\tilde{\phi}}^{n}=\left[\vec{u}^{n+q},\ldots\vec{u}^{n}\right]^{T}. \quad (5)$$

Тут $\tilde{C}$ – матриця, яка відповідає системі (4).

Тобто $(q+1)$–шарова різницева задача (3) зводиться до системи двошарових схем.

Проблема постановки початкових умов для багатошарових різницевих схем

Початкові дані для диференціальної задачі задаються в момент часу t_0, а дані для різницевої задачі в точках сітки повинні бути визначені через початкові дані за допомогою апроксимації, яка дозволяє починати обчислення розв'язку за рівнянням (3). Припустимо, що значення $\vec{\tilde{\phi}}$ обчислені точно, тобто

$$\vec{\tilde{\phi}}^{0}=\begin{bmatrix} E\big((q-1)\Delta t\big)\vec{u}^{0} \\ E\big((q-2)\Delta t\big)\vec{u}^{0} \\ \vdots \\ \vec{u}^{0} \end{bmatrix},$$

де $\vec{u}^{0}\in\mathbf{B}$, а $E(t)$ – розв'язуючий оператор для (1). Тоді

$$\vec{\tilde{\phi}}^{0}=\tilde{S}\ \vec{\tilde{u}}^{0},$$

$$\vec{\tilde{u}}^{0}=\begin{bmatrix} \vec{u}^{0} \\ \vec{u}^{0} \\ \vdots \\ \vec{u}^{0} \end{bmatrix};\ \tilde{S}=\begin{pmatrix} E\big((q-1)\Delta t\big) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E\big((q-2)\Delta t\big) & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & E \end{pmatrix}$$

– діагональна матриця.

Отже, наближений розв'язок крайової задачі (1) визначається формулою

$$\vec{\tilde{\phi}}^{n}=\tilde{C}(\Delta t)^{n}\tilde{S}\ \vec{\tilde{u}}^{0},$$

яка є апроксимацією виразу

$$\begin{bmatrix} \vec{u}\big((n+q-1)\Delta t\big) \\ \vec{u}\big((n+q-2)\Delta t\big) \\ \vdots \\ \vec{u}\big(n\Delta t\big) \end{bmatrix}=E(n\Delta t)\tilde{S}\vec{\tilde{u}}^{0}.$$

Порівняємо $\tilde{C}(\Delta t)^{n}\tilde{S}\vec{\tilde{u}}^{0}$ з $E(n\Delta t)\tilde{S}\vec{\tilde{u}}^{0}$. При $\Delta t\to 0$ приходимо до підпростору $\tilde{\mathbf{B}}^{0}$ простору $\tilde{\mathbf{B}}$, елементами якого є вектори, всі q компонент яких рівні між собою. Тоді

$$\begin{bmatrix} \vec{u}(t) \\ \vec{u}(t) \\ \vdots \\ \vec{u}(t) \end{bmatrix}=E(t)\begin{bmatrix} \vec{u}^{0} \\ \vec{u}^{0} \\ \vdots \\ \vec{u}^{0} \end{bmatrix}.$$

До цієї ж границі прямує і $E(n\Delta t)\tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$ при $\Delta t \to 0 \left(\tilde{S} \to E\right)$. Елементи $\vec{u}(t)$ і $\vec{u}^0$ належать простору $\mathbf{B}^0$, але їх апроксимації – ні, вони лежать поза цим простором. При практичних обчисленнях, початкові значення отримуємо не з допомогою обчислення $\tilde{\vec{\phi}}^0 = \tilde{S}\tilde{\vec{u}}^0$, а з допомогою апроксимації $\tilde{\vec{\phi}}^0 = \vec{\psi}$. Для того, щоб наближене значення розв'язку $\tilde{\vec{u}}^n$ збігалось до точного розв'язку, необхідно, щоб $\vec{u}^n \to \vec{u}(t)$, а $\tilde{\vec{\phi}}^0 = \vec{\psi} \to \vec{u}(0)$ при $\Delta t \to 0$ незалежно одне від одного.

Властивості багатошарових різницевих схем

Багатошарову різницеву схему (5) називають *стійкою*, якщо для деякого додатного τ при $0 < \Delta t < \tau$ і $0 \le n\Delta t \le T$ сімейство операторів $\tilde{C}^n(\Delta t)$ з (5) рівномірно обмежене $\forall n$.

Важливу роль відіграють *умови узгодженості*, які полягають в тому, що існує щільна в просторі $\mathbf{B}$ множина U^0 можливих початкових елементів для точних розв'язків така, що якщо $\vec{u}^0 \in U^0$ та для $\forall\ \varepsilon > 0$ існує достатньо мале Δt:

$$\left\| \left(\tilde{C}(\Delta t) - E(\Delta t)\tilde{S} \right) \tilde{\vec{u}}(t) \right\| < \varepsilon \Delta t \qquad (6)$$

для $0 \le t \le T$, де

$$\tilde{\vec{u}} = \begin{bmatrix} E(t)\vec{u}^0 \\ \vdots \\ E(t)\vec{u}^0 \end{bmatrix}.$$

Апроксимація є *збіжною*, якщо для довільних послідовностей $\Delta_j t$ і n_j, таких що $\Delta_j t > 0$ і $n_j\,\Delta_j t \to t$ при $j \to \infty$, $(0 \le t \le T)$ та $\forall\ \tilde{\vec{u}} \in \tilde{\mathbf{B}}^0$ буде $\lim\limits_{\substack{j\to\infty \\ \vec{\psi}\to\vec{u}^0}} \left\| \tilde{C}(\Delta_j t)^{n_j}\vec{\psi} - E(t)\tilde{\vec{u}}(t) \right\| = 0.$ Порядок і похибка апроксимації багатошарових різницевих схем визначається звичайним чином.

Мають місце такі твердження [5].

1. Якщо різницева схема стійка і її похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta\ t \to 0$, то умова узгодженості для цієї різницевої схеми виконується.

2. Для коректно поставленої крайової задачі і її багатошарової апроксимації, яка задовольняє умови узгодженості, стійкість є необхідною і достатньою умовою збіжності.

Узгодженість і порядок точності

При дослідженні узгодженості і точності різницевих схем бажано різницеві рівняння подати у формі

$$B_q\vec{\mathrm{u}}^{n+q}+B_{q-1}\vec{\mathrm{u}}^{n+q-1}+\ldots+B_0\vec{\mathrm{u}}^{n}=0,$$

де рівняння не розв'язане відносно $\vec{\mathrm{u}}^{\mathrm{n+q}}$. Невизначеність внаслідок множення зліва на довільну не вироджену матрицю знімається тим припущенням, що для довільної достатньо гладкої функції $u(t)$ різницевий оператор в лівій частині апроксимує оператор $\partial/\partial t-A$, тобто

$$B_q u(t+q\Delta t)+\ldots+B_0 u(t)-\left(\partial/\partial t-A\right)u(t)=o(1)$$

при $\Delta t\to 0$.

Порядок точності різницевої схеми визначимо як найбільше дійсне число ρ, для якого

$$\left\|B_q u(t+q\Delta t)+\ldots+B_0 u(t)\right\|=o\left[(\Delta t)^{\rho}\right] \text{ при } \Delta t\to 0 \qquad (7)$$

для всіх достатньо гладких точних розв'язків диференціального рівняння $\partial u/\partial t=Au$. Вираз у лівій частині (7) є похибкою апроксимації багатошарової різницевої схеми.

Встановимо зв'язок між узгодженістю та порядком точності різницевих схем. Для цього повернемось до рівняння (2) з сталими коефіцієнтами і умові періодичності розв'язку. Розв'язок задачі виразимо через оператори $C_j=-B_q^{-1}B_j$.

Теорема. Якщо різницева схема стійка і похибка апроксимації прямує до нуля при $\Delta t\to 0$, то умова узгодженості (6) виконується.

Доведення.

Виходячи з обмеженості операторів $C_1,\ \ldots C_{q-1}$ та з того, що виконується умова (7), можна показати, що $B_q^{-1}=O(\Delta t)$.

Отже у вектора $\left(\tilde{C}(\Delta t)-E(\Delta t)\right)\tilde{S}\tilde{u}(t)$ відмінною від нуля є тільки перша компонента і нам потрібно показати, що при довільному $\varepsilon>0$

$$\left\|\left[C_{q-1}E((q-1)\Delta t)+\ldots+C_0-E(q\Delta t)\right]u_0(t)\right\|<\varepsilon\Delta t$$

для довільного елемента $u(0)$ з деякої щільної в B множини U^0 і для всіх достатньо малих Δt.

Нехай B_m підпростір тригонометричних поліномів ступеня m з гільбертового простору B періодичних функцій, а u_0 презентує деяку функцію $u_0(\vec{\mathrm{x}})$ з B_m. Якщо в рівності (7) покласти $u(t)=tu_0$, то

$$Lu_0=o(1) \text{ при } \Delta t\to 0, \qquad (8)$$

де

$$L=\Delta t\left(qB_q+(q-1)B_{q-1}+\ldots+B_1\right)-E. \qquad (9)$$

Оскільки B_m має скінчений базис, кожен елемент якого задовольняє співвідношення (8), то для норми оператора L в просторі B_m маємо $\|L\|_m<\varepsilon_1$ для достатньо малих Δt, де ε_1 – довільне додатне число. Тому оператор $E+L$ має обернений в цьому просторі, а саме

$$\left(E+L\right)^{-1}=E+M\ ,$$

де

$$\left\|M\right\|_m<\varepsilon_2=\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}.$$

Таким чином

$$\left[qB_q+\ldots+B_1\right]^{-1}=\Delta t\left(E+M\right)\ .$$

За визначенням $C_j=-B_q^{-1}B_j$, тому випливає, що

$$B_q^{-1}=\left[qE-(q-1)C_{q-1}-\ldots-C_1\right]\Delta t\left(E+M\right). \qquad (10)$$

Якщо $u_0\in B_m$, а A – диференціальний оператор рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t}=Au$$

із сталими коефіцієнтами, то $u(t)\in B_m$. Крім того, для цього розв'язку буде $\partial u/\partial t-Au=0$, оскільки в силу (7)

$$\left\|\left[B_qE(q\Delta t)+B_{q-1}E((q-1)\Delta t)+\ldots+B_0\right]u(t)\right\|<\varepsilon_0 \qquad (11)$$

для довільного $\varepsilon_0>0$ та для всіх достатньо малих Δt.

Помноживши (10) на (11), одержимо

$$\left\|\left[E(q\Delta t)+C_{q-1}E((q-1)\Delta t)+\ldots+C_0\right]u(t)\right\|<\varepsilon_3\Delta t\ , \qquad (12)$$

де

$$\varepsilon_3=\left\{\max_{0<\Delta t<\tau}\left\|qE-(q-1)C_{q-1}-\ldots-C_0\right\|\right\}\varepsilon_0\left\|I+M\right\|_m.$$

Максимум, який входить в останню рівність існує, оскільки ми припустили, що різницеві рівняння стійкі. Звідси витікає, що оператори $C_{q-1}(\Delta t)$, $\ldots C_1(\Delta t)$ рівномірно обмежені при $0<\Delta t<\tau$.

Нерівність виду (12) має місце для довільного розв'язку, який належить B_m. Якщо розглянути всі можливі підпростори B_m з простору B, то можливі початкові елементи $u(0)$ для цих розв'язків утворять щільну множину в B. Теорему доведено.

Завдання для самостійної роботи. (2 год.)

Побудувати та дослідити тришарові явні та неявні різницеві схеми для рівнянь параболічного та гіперболічного типів другого порядку. [1,4]

Використані джерела

1. Patrick J. Roache. Computational Fluid Dynamics. Hermosa Publishers, 1976 - 446 p.
2. Dale A. Anderson, John C. Tannehill, Richard H. Pletcher. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer (Computational and Physical Processes in Mechanics and Thermal Sciences) 3rd Edition. CRC Press. 2011. - 974 p.
3. Самарський А.А. Теория разностных схем. М.:"Наука" –1983 –616с.
4. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Методи Фур'є та першого диференціального наближення в теорії різницевих схем. – ВПЦ "Київський університет", 2005

–84 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. –М.: “Мир” 1972 – 418 с.