Лекція 3. Точні та узагальнені розв’язки диференціальних та різницевих рівнянь в банахових просторах.– 2 **год.** [4, 5]

Поняття точного та узагальненого розв’язків диференціальних та різницевих рівнянь в банахових просторах. Розв’язуючі оператори. Коректність постановок задач. Збіжність та стійкість. Терема Лакса.

Нехай B – нормований банаховий простір. Функції, які залежать від просторових змінних x і координати часу t, при фіксованому t будемо тлумачити як точки цього функціонального простору і позначати їх символом u. Стан фізичної системи зображатимемо точкою функціонального простору, а її положення в часі відображатиме рух цієї точки в функціональному просторі B. Через $\tilde{R}_n$ позначимо n – вимірний комплексний евклідів векторний простір з скалярним добутком $(\vec{a},\vec{b})=\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{b}_j$ і нормою $\|a\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} a_j \bar{a}_j}$. Введемо також допоміжний нормований простір B$'$, елементами якого є довільні неперервні криві, які при кожному $t \in [0,T]$, визначені як функції просторових змінних $w(t) \in$ B. В B$'$ введемо норму так $\|w(t)\|_{B'} = \max_{0\le t\le T} \|w(t)\|_{B}$.

Скінченно-різницеві задачі в абстрактних просторах Банаха.

Точні і узагальнені розв'язки диференціальних рівнянь. Розглянемо однопараметричне сімейство елементів $u(t) \in \mathrm{B}$ з дійсним параметром t таких, що

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = A\,u(t);\ u(0) = u_0;\ 0 \le t \le T\ , \tag{1}$$

де u_0 – заданий елемент з B, який характеризує початковий стан системи; A – лінійний оператор.

Точний розв'язок задачі визначимо як однопараметричне сімейство $u(t)$, кожен елемент якого належить області визначення оператора A $\forall t \in [0,T]$, $u(0) = u_0$ і

$$\left\| (u(t + \Delta t) - u(t)) \,/\, \Delta t - Au(t) \right\| \to 0 \tag{2}$$

при $\Delta t \to 0$ $\forall\ t \in [0,T\,]$.

Позначимо через D множину елементів $u_0 \in \mathrm{B}$, для кожного з яких існує єдиний розв'язок задачі (1) при $u(0) = u_0$, а збіжність в (2) рівномірна за t. Нехай $E_0(t)$ відображає D в B і при фіксованому t встановлює відповідність між u_0 і $u(t)$. Тоді $u(t) = E_0(t)u_0$ є розв'язком задачі для тих $u_0 \in \mathrm{B}$, для яких існує точний розв'язок.

Задачі, визначені лінійним оператором A, назвемо ***коректними за Адамаром***, якщо:

1) область визначення $\mathcal{D}$ перетворення $E_0(t)$ щільна в $\mathcal{B}$;

2) сімейство перетворень $E_0(t)$ рівномірно обмежене, тобто існує така додатна стала $K \in \mathbb{R}$, що $\|E_0(t)\| \le K$ при $0 \le t \le T$.

Перша умова стверджує, що якщо для деякого початкового значення u_0 точний розв'язок не існує, то цей початковий елемент можна апроксимувати як завгодно точно з допомогою тих початкових елементів з $\mathcal{D}$, для яких існує точний розв'язок. З другої умови слідує, що розв'язок задачі неперервно залежить від початкового значення.

Оскільки обмежений лінійний оператор T, область визначення якого щільна в $\mathcal{B}$, має єдине лінійне обмежене розширення T', область визначення якого співпадає з $\mathcal{B}$, і таке, що $\|T\| = \|T'\|$, (теорема про розширення оператора [5]), то обмежений лінійний оператор $E_0(t)$ з щільною в $\mathcal{B}$ областю визначення має єдине розширення $E(t)$, яке назвемо ***узагальненим розв'язуючим оператором***. Оператор $E(t)$ визначений на всьому просторі $\mathcal{B}$ обмежений за нормою тим же числом K, що і оператор $E_0(t)$. Отже, рівність

$$u(t) = E(t)u_0$$

є ***узагальненим розв'язком задачі*** для довільного початкового елемента $u_0 \in \mathcal{B}$.

Якщо оператор A явним чином залежить від часу, то узагальнений розв'язуючий оператор стає функцією двох змінних. Дійсно, оскільки в момент часу t_0 задано початковий стан u_0, то $u(t) = E(t, t_0)u_0$ і в силу напівгрупової властивості $E(t_2, t_0) = E(t_2, t_1)E(t_1, t_0)$ при $t_0 \le t_1 \le t_2$.

Розглянемо неоднорідну крайову задачу

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t) - Au(t) = g(t), \quad u(0) = u_0, \tag{3}$$

де u_0 і $g(t)$ задані, а $g(t)$ рівномірно або кусково рівномірно неперервна (в нормі простору B) за часом t функція на відрізку $0 \le t \le T$. Вважаємо, що оператор A, який визначає коректно поставлену однорідну задачу, замкнений, а області визначення всіх його степенів щільні в B . Тоді [5], якщо

1) u_0 і $g(t) \in \mathrm{D}(A)$;

2) $g(t) \in \mathrm{D}(A^2)$;

3) функції $Ag(t)$ і $A^2 g(t) -$ неперервні,

то

$$u(t) = E(t)u_0 + \int_0^t E(t-s)g(s)ds \tag{4}$$

є ***точним розв'язком задачі*** (3). Якщо на u_0 і $g(t)$ не накладено ніяких обмежень, крім неперервності $g(t)$, або ці умови зводяться тільки до умови існування інтегралу в (4), то (4) є ***узагальненим розв'язком задачі*** (3).

При вказаних вимогах відносно оператора A і функції $g(t)$ узагальнений розв'язок існує [5]. Єдиність розв'язку випливає з єдиності розв'язку однорідної задачі, яка за припущенням поставлена коректно.

Скінченно – різницеві задачі. Розглянемо однорідне скінченно-різницеве рівняння

$$B_1 u^{n+1} = B_0 u^n\,, \tag{4'}$$

де $B_0 = B_0(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, ...)$ і $B_1 = B_1(\Delta t, \Delta x_1, \Delta x_2, ...)$ – лінійні скінченно–різницеві оператори, залежні від приростів $\Delta t,\ \Delta x_1,\ \Delta x_2, ...$ і можливо від просторових змінних. Обидві частини рівняння є лінійними функціями значень u, визначених в точках з деякої множини (шаблону).

Нехай існує обернений оператор B_1^{-1}, $B_1^{-1} B_0$ обмежений і вони визначені на всьому B , а $\Delta x_i = q_i(\Delta t),\ i = \overline{1, d},$ де d – розмірність простору. Позначимо $B_1^{-1}\left(\Delta t, q_1(\Delta t), q_2(\Delta t), ...\right) \cdot B_0\left(\Delta t, q_1(\Delta t), q_2(\Delta t), ...\right) = C(\Delta t)$, тоді

$$u^{n+1} = C(\Delta t) u^n\,. \tag{5}$$

Сімейство операторів $C(\Delta t)$ ***узгоджено апроксимує*** крайову задачу (1), якщо для довільного $u(t)$ з деякого класу U точних розв'язків, початкові елементи яких утворюють в B щільну множину, справедлива ***умова узгодження***

$$\left\| \left\{ \left(C(\Delta t) - I \right) / \Delta t - A \right\} u(t) \right\| \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0,\ 0 \le t \le T\,. \tag{6a}$$

Тут I - одиничний оператор.

Враховуючи (2), маємо

$$\left\| \left\{ u\left(t + \Delta t\right) - C\left(\Delta t\right) u\left(t\right) \right\} / \Delta t \right\| \to 0 \text{ при } \Delta t \to 0,\ 0 \le t \le T\,, \tag{6b}$$

в якому вираз під знаком норми є ***похибкою апроксимації***.

Якщо $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta > 0$ таке, що

$$\left\| \left\{ C(\Delta t) - E(\Delta t) \right\} u(t) \right\| < \varepsilon \Delta t \text{ при } 0 \le t \le T,\ \ 0 < \Delta t < \delta, \tag{6c}$$

то *збіжність рівномірна* за часом t .

Сімейство $C(\Delta t)$ забезпечує ***збіжну апроксимацію*** задачі, якщо для будь–

якого фіксованого $t \in [0,T]$, для кожного $u_0 \in$ B і для кожної збіжної до нуля послідовності приростів $\{\Delta_j t\}$ $(j = 1,2,...;\Delta_j t > 0)$ має місце граничне відношення

$$\left\| C(\Delta_j t)^{n_j} u_0 - E(t)u_0 \right\| \to 0 \text{ при } j \to \infty, \qquad (7)$$

де $n_j \in \mathrm{N}$ таке, що $n_j \Delta_j t \to t$ при $j \to \infty$. Апроксимацію $C(\Delta t)$ назвемо ***стійкою***, якщо для деякого $\tau > 0$ нескінченна множина операторів

$$C(\Delta t)^n, (0 \le n\Delta t \le T,\ 0 < \Delta t < \tau\ ) \qquad (9)$$

рівномірно обмежена.

Теорема Лакса (про еквівалентність [5, стор 54]). *Нехай задача (1),(2) коректно поставлена та її скінченно-різницева апроксимація задовольняє умову узгодження; тоді стійкість необхідна і достатня для збіжності.*

Доведення. Необхідність.

Спочатку ми покажемо, що збіжна схема необхідно є стійкою. Ми стверджуємо, що для всякої збіжної схеми й для довільного початкового фіксованого елемента $u_0 \in B$ величини

$\left\| C(\Delta t)^n u_0 \right\|, (0 < \Delta t < \tau,\ 0 \le n\Delta t \le T),$

обмежені при деякому $\tau > 0$. Дійсно, якщо це не так, то знайдуться дві послідовності $\Delta_1 t,\ \Delta_2 t, ...,\ \Delta_j t, ...$ і $n_1,\ n_2, ...,\ n_j, ...$, для яких норми елементів $C(\Delta_1 t)^{n_1} u_0,\ C(\Delta_2 t)^{n_2} u_0, ...,\ C(\Delta_j t)^{n_j} u_0, ...$

необмежено зростають (при цьому $\Delta_j t$ повинні прямувати до нуля в силу припущення про неперервну залежність $C(\Delta t)$ від додатних значень Δt); із цих елементів ми можемо вибрати підпослідовність, для якої величини $n_j \Delta_j t$ збігаються до деякого t з відрізка $0 \le t \le T$;

але це суперечить припущенню про збіжність схеми, оскільки при наявності збіжності норми елементів цієї підпослідовності повинні були б прямувати до кінцевої границі $\left\| E(t)u_0 \right\|$. Отже, існує така функція $K_1(u)$, що нерівність $\left\| C(\Delta t) n u_0 \right\| \le K_1(u)$ виконується для всіх операторів з множини (9) і всіх $u \in B$, отже множина (9) рівномірно обмежена. Таким чином, апроксимація стійка.

Достатність.

Щоб довести зворотне твердження, припустимо, що $u(t)=E(t)u_0$ є точним розв'язком, що належать класу U, про який йшла мова при визначенні узгодженості. Нехай ε,δ ті ж, що й в умові узгодженості у формі (6с), n_j і $\Delta_j t$ обрані так само, як і при визначенні збіжності, а ψ_j позначає різницю між обчисленим і точним значенням і в момент часу $n_j\Delta_j t$, тобто

$$\begin{aligned}\psi_j &= \left[C\left(\Delta_j t\right)^{n_j} - E\left(n_j\Delta_j t\right)\right]u_0 = \\ &= \sum_{k=0}^{n_j-1} C\left(\Delta_j t\right)^k \left[C\left(\Delta_j t\right) - E\left(\Delta_j t\right)\right] E\left(\left(n_j-1-k\right)\Delta_j t\right)u_0\end{aligned} \tag{10}$$

Третя частина цієї рівності, співпадає з другою: після приведення подібних залишаються тільки перший і останній члени. Норму величини ψ_j можна оцінити за допомогою (6с) і нерівності трикутника: якщо $0<\Delta_j t<\delta$, то

$$\left\|\psi_j\right\| \le K_2 \sum_{k=0}^{n_j-1} \varepsilon\Delta_j t = K_2\varepsilon n_j\Delta_j t \le K_2\varepsilon T, \tag{11}$$

де K_2 позначає рівномірну границю множини (9). Так як ε довільно, то $\left\|\psi_j\right\| \to 0$ при $\Delta_j t\to 0$, $n_j\Delta_j t\to t$. Для доведення збіжності покажемо, що в граничному переході при $j\to\infty$ в (10) можна замінити $E\left(n_j\Delta_j t\right)$ на $E\left(t\right)$. Якщо $s=\left|t-n_j\Delta_j t\right|$, $t'=\min\left\{t,n_j\Delta_j t\right\}$, то в силу напівгрупової властивості сімейства $E\left(t\right)$ маємо $E\left(s+t'\right)=E\left(s\right)E\left(t'\right)$ так що $E\left(n_j\Delta_j t\right)-E\left(t\right)=\pm\left[E\left(s\right)-I\right]E\left(t'\right)$, причому знак визначається знаком різниці $t-n_j\Delta_j t$. У будь-якому випадку

$$\left\|\left[E\left(n_j\Delta_j t\right)-E\left(t\right)\right]u_0\right\| \le K_E\left\|\left[E\left(s\right)-I\right]u_0\right\|,$$

де K_E позначає границю для $\left\|E\left(t\right)\right\|$ при $0\le t\le T$. Але права частина останньої нерівності прямує до нуля, якщо $s\to 0$, тобто якщо $j\to\infty$. Отже, величина

$$\left\|\left[E\left(s\right)-I\right]u_0\right\|$$

може бути зроблена як завгодно малою вибором достатньо малих $\Delta_j t$ і $\left|t-n_j\Delta_j t\right|$. Це справедливо для будь-якого u_0, що є початковим елементом точного розв'язку із класу U: але такі елементи щільні в B, так що для будь-якого $u\in B$ з них можна вибрати послідовність $u_1,u_2,...,$ збіжну до u. Тому

$$\begin{aligned}\left[C\left(\Delta_j t\right)^{n_j} - E\left(t\right)\right]u &= \left[C\left(\Delta_j t\right)^{n_j} - E\left(t\right)\right]u_m + \\ &+ C\left(\Delta_j t\right)^{n_j}\left(u-u_m\right) - E\left(t\right)\left(u-u_m\right)\end{aligned} \tag{12}$$

Тут два останні члени в правій частині можуть бути зроблені як завгодно малими за допомогою вибору досить великого m, оскільки клас (9) і множина операторів $E(t)$ рівномірно обмежені, а малість першого члена може бути забезпечена за рахунок вибору достатньо малих $\Delta_j t$ і $|t-n_j\Delta_j t|$. Оскільки u - довільний елемент із B , то збіжність встановлена й **теорема про еквівалентність доведена.**

Відзначимо в якості природнього наслідку цієї теореми, що для даного початкового елемента u_0 збіжність рівномірна по t на відрізку $0 \le t \le T$ у тому розумінні, що обмеження, які потрібно накладати на $\Delta_j t$ і $|t-n_j\Delta_j t|$, щоб зробити (12) нескінченно малим, не залежать ні від вибору t , ні від вибору послідовності $\Delta_j t$. Ця обставина має велике практичне значення, тому що дозволяє при чисельному інтегруванні знаходити такий крок Δt, при якому наближений розв'язок виявляється досить точним на всьому відрізку $0 \le t \le T$ одночасно. Часто для досягнення потрібної точності Δt варіюють у процесі обчислень, але існує таке граничне додатнє значення Δt , нижче якого заходити нема рації.

Викладену теорему Лакса можна дуже просто застосувати до неявного різницевого рівняння для одномірного рівняння дифузії

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \sigma \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Насамперед покажемо, що розв'язок цього рівняння задовольняє наступному принципу максимуму. Припустимо, що рівняння розглядається в прямокутнику $0 \le x \le a$, $0 \le t \le T$ і що Δx вибирається рівним a / J , де J - натуральне число. Тоді максимальне значення M_1, що досягається величиною u_j^n усередині цього прямокутника, не може перевищувати максимального значення M_2, що досягається початковими й граничними значеннями (тобто значеннями на відрізках прямих $t=0,\ x=0,\ x=a$). Дійсно, допустимо протилежне, а саме що $M_1 > M_2$, і нехай (n, j)- перша внутрішня точка сітки, у якій $u_j^n = M_1$ (перша в тому розумінні, що індекси n і j мають найменші значення). Тоді в цій точці сітки ліва частина наведеного вище рівняння повинна бути додатна, а права від'ємна, тому що u_j^n за припущенням перевершує сусіднє значення u_{j-1}^n ліворуч і сусіднє значення u_j^{n-1} знизу й щонайменше дорівнює сусідньому значенню u_{j+1}^n праворуч. Отже, наше припущення неправильне, і принцип максимуму встановлений. Очевидно, що ці міркування можна застосувати й до $-u_j^n$ і тим самим установити, що $|u_j^n|$ обмежені при будь-якому виборі сітки, тобто що розглянуте різницеве рівняння стійке.

Система різницевих рівнянь для задачі (3) має вигляд

$$B_1 u^{n+1} - B_0 u^n = g^{n+1}, \quad u^0 = u_0,$$

де B_1 і B_0 – розглянуті раніше різницеві оператори, а g^n апроксимує $g(n\Delta t)$. Якщо величину $\left\| g^n - g(n\Delta t) \right\|$ можна зробити як завгодно малою рівномірно за n при $0 \le n\Delta t \le T$ за допомогою вибору Δt, то останнє різницеве рівняння можна подати у вигляді

$$u^{n+1} - C(\Delta t) u^n = D(\Delta t) g^{n+1}, \tag{6}$$

де $C(\Delta t) = B_1^{-1} B_0$ і $D(\Delta t) = B_1^{-1}$ обмежені і залежать тільки від Δt і, можливо, координат, а Δx_i можуть бути виражені через Δt.

З (6) випливає $u^n = C(\Delta t)^n u_0 + \Delta t \sum_{j=1}^{n} C(\Delta t)^{n-j} g^j$. Якщо виконуються умови теореми Лакса, то остання сума апроксимує інтеграл з (4), звідки випливає збіжність наближеного розв’язку до точного.

4. Грищенко О.Ю., Ляшко С.І. Методи Фур’є та першого диференціального наближення в теорії різницевих схем. – ВПЦ ”Київський університет”, 2005 –84 с.
5. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. –М.: “Мир” 1972 – 418 с.