

Міністерство освіти і науки, молоді та спорту України  
Київський національний університет імені Тараса Шевченка

*На правах рукопису*

**Оноцький В'ячеслав Валерійович**

УДК 517.977.58

**Чисельне та комп'ютерне моделювання  
процесів переносу з використанням  
двокрокових симетризованих алгоритмів**

01. 05. 02 – математичне моделювання та обчислювальні методи

**ДИСЕРТАЦІЯ**

на здобуття наукового ступеня  
кандидата фізико-математичних наук

Науковий керівник

доктор фіз.-мат. наук, професор

**Грищенко Олександр Юхимович**

Київ-2013

## ЗМІСТ

<b>Вступ .....</b>	<b>5</b>
<b>Розділ 1. Основні поняття та математичні моделі .....</b>	<b>15</b>
1.1. Узагальнені розв’язки .....	15
1.2. Постановка задач ідентифікації та алгоритм знаходження розв’язку .....	18
1.2.1. Моделювання інтенсивностей джерел при відомих координатах їх розташування .....	20
1.2.2. Визначення потужностей та уточнення координат джерел.....	24
1.3. Моделювання процесу проявлення прихованого голографічного зображення на термопластичних носіях .....	31
1.4. Висновки .....	34
<b>Розділ 2. ДС-алгоритми для модельних рівнянь переносу .....</b>	<b>35</b>
2.1. ДС-алгоритми для лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами .....	36
2.1.1. Загальна схема побудови ДС-алгоритмів .....	36
2.1.2. Побудова та аналіз граничних умов для ДС-алгоритмів .....	42
2.2. ДС-алгоритми для лінійних рівнянь із керованою штучною в’язкістю .....	46
2.2.1. ДС-алгоритми із штучною схемною в’язкістю .....	47
2.2.2. ДС-алгоритми із керованою штучною в’язкістю.....	51
2.3. ДС-алгоритми для деяких нелінійних крайових задач .....	55
2.3.1. Нелінійне параболічне рівняння в n-вимірному просторі .....	55
2.3.2. ДС-алгоритм для рівняння Бюргерса .....	61
2.4. Висновки .....	67
<b>Розділ 3. Застосування ДС-алгоритмів для розв’язування задачі ідентифікації точкових джерел забруднень .....</b>	<b>69</b>
3.1. Чисельне моделювання процесу забруднення при відомих координатах розташування точкових джерел та невідомих інтенсивностях .....	70
3.2. Чисельне моделювання процесу забруднення при невідомих координатах розташування точкових джерел та їх інтенсивностях .....	73

3.3. Регуляризація точкових джерел забруднень .....	74
3.3.1. Постановка задачі .....	74
3.3.2. Побудова і дослідження регуляризованої задачі .....	76
3.3.3. Алгоритм побудови розв'язку задачі оптимального керування .....	80
3.3.4. Дискретна модель крайової задачі .....	81
3.4. Висновки .....	83

## **Розділ 4. ДС-алгоритми для моделювання процесів, що описуються системою рівнянь Нав'є-Стокса .....84**

4.1 ДС-алгоритми для нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса та теплопровідності моделювання динамічних процесів ньютонівської рідини .....	86
4.1.1. Математична модель з періодичними крайовими умовами .....	86
4.1.2. Різницева модель .....	87
4.2. Побудова різницевої апроксимації граничних умов та дослідження їх впливу на стійкість ДС-алгоритму ... ..	94
4.3. Задача оптимального точкового керування лінеаризованою нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса .....	97
4.4. Висновки .....	106

## **Додатки. Обчислювальні експерименти з використанням ДС-алгоритмів .....107**

5.1. Апробація дискретних моделей масопереносу на основі ДС-алгоритмів ...	115
5.1.1. Початково-крайові задачі розповсюдження профілів для гіперболічних рівнянь 1-го порядку .....	115
5.1.2. Початково-крайові задачі розповсюдження профілів великих градієнтів для гіперболічного рівнянь 1-го порядку із штучною в'язкістю .....	110
5.1.3. Аналіз обчислювальних експериментів розв'язання початково-крайової задачі з нелінійним рівнянням Бюргерса .....	113
5.2. Обчислювальні експерименти з ідентифікації зосереджених джерел забруднень .....	115
5.2.1. Результати чисельного моделювання при невідомих інтенсивностях та відомих координатах .....	115

5.2.2. Результати чисельного моделювання при невідомих інтенсивностях та невідомих координатах .....	118
5.2.3. Обчислювальні експерименти з регуляризованою моделлю .....	119
5.3. Етапи чисельного моделювання процесу проявлення прихованого голографічного зображення. Нестационарна система рівнянь Нав'є-Стокса .....	122
5.3.1. Чисельний розв'язок задачі для лінеризованої системи із складними крайовими умовами в контексті задачі проявлення прихованого голографічного зображення .....	122
5.3.2. Чисельний розв'язок задачі для лінеризованої системи із складними крайовими умовами в контексті задачі проявлення прихованого голографічного зображення з урахуванням теплового балансу .....	124
<b>Висновки .....</b>	<b>126</b>
<b>Список використаних джерел .....</b>	<b>127</b>

## ВСТУП

**Актуальність теми.** Останнім часом значно розширилася сфера застосування математичного моделювання і, як наслідок, за допомогою цього інструменту була розв'язана велика кількість проблем прикладних наук. Цьому сприяв стрімкий розвиток обчислювальної техніки та комп'ютерних систем. Математичне моделювання стало одним з основних методів вивчення процесів природи, людської діяльності і суспільства в таких галузях як фізика, економіка, екологія, соціологія тощо. Зокрема, за допомогою моніторингових та моделюючих систем, систем підтримки та прийняття рішень ефективно вирішуються складні екологічні проблеми, пов'язані із забрудненням навколишнього середовища, складається прогноз екологічної ситуації в майбутньому у масштабах локального регіону, країни і навіть планетарному масштабі. Математичне моделювання використовується для прогнозування політичної ситуації, допомагає приймати рішення з оцінювання ситуацій, у відпрацюванні стратегічних напрямків для розвитку економічного та соціального потенціалу країни [1].

Об'єкти дослідження математичного моделювання в багатьох випадках описуються системами лінійних або нелінійних диференціальних рівнянь з розподіленими параметрами. Часто в праві частини рівнянь входять узагальнені функції скінченного порядку [2-6]. Моделювання і керування такими системами залишається однією з актуальних проблем прикладної математики і кібернетики. Значний вклад у розвиток методів розв'язування класів таких задач внесли А. Бенсусан, Б.М. Бублик, В.П. Діденко, Ж.-Л. Ліонс, С.І. Ляшко, О.Г. Наконечний, А.О. Чикрій [137-142]. Методам розв'язування задач оптимізації присвячено роботи Ю.М. Єрмольєва, Ю.М. Даниліна, Б.Н. Пшеничного та їх учнів [13-15].

У роботах І.І. Ляшка [7-9], Я.М. Григоренка [10], І.В. Сергієнка [11, 12], О.Ю. Грищенко [135], В.С. Дейнеки, В.В. Скопечького, В.А. Стояна [16, 17], Ю.А. Белова [9] розроблено ефективні моделі для складних процесів гідродинаміки та фільтрації підземних вод, механіки деформованого середовища, релаксаційної газової динаміки, екологічних процесів тощо. Значний внесок у розвиток чисельного

моделювання та розвинення чисельних методів для процесів газової динаміки зробили А.А. Самарський, Ю.П. Попов, А.Н. Тихонов [173, 119], О.Ю. Грищенко [122, 131, 135] та інші вчені.

Методи моделювання процесів динаміки в'язких рідин для задач, які розглянуто у дисертації, описуються нелінійними системами та системами рівнянь Нав'є-Стокса, започатковано О.М. Белоцерковським [18, 19], І.Ю. Брайлівською [20-22], С.К. Годуновим, Ю.М. Давидовим, О.А. Ладиженською [23-27], Ж.-Л. Ліонсом [2, 28, 29], Г.І. Марчуком [30], М.М. Яненком [93, 94], Р. Темамом [31] та їх учнями. Задачі оптимального керування для рівнянь Нав'є-Стокса вивчалися в роботах [148-150].

Часто виникає необхідність у встановленні невідомих параметрів математичної моделі на основі експериментальних даних. При цьому об'єкт або процес, що досліджується, є принципово недоступним для безпосереднього спостереження, або ж дослідження пов'язано з дуже великими витратами. Отже, на основі отриманих в результаті експерименту наслідків вимагається визначити причини, що обумовили ці наслідки. Приходимо до обернених задач, розв'язання яких часто пов'язано з великими складнощами, зокрема, некоректністю математичних постановок [176-178]. Методам розв'язання таких задач присвячено роботи А.Н. Тихонова [119], В.Г. Романова В.Г. [175], А.М. Денисова [176], А.Б. Куржанського [178, 179] та інших вчених [17, 98, 120, 177, 180].

У кібернетиці оберненій задачі відповідає задача ідентифікації динамічних об'єктів [112, 181], а саме, процедура визначення структури та параметрів їх математичних моделей, які при однакових входному сигналі об'єкта та моделі забезпечують близькість виходу моделі до виходу об'єкта при наявності деякого критерія якості. Ідентифікацію можна поділити на три основні етапи: 1) структурну ідентифікацію, що полягає у визначенні структури математичної моделі на основі теоретичних міркувань; 2) параметричну ідентифікацію або проведення експерименту та визначення оцінок параметрів моделі за експериментальними даними; 3) перевірку адекватності, тобто перевірку якості моделі у розумінні обраного критерія близькості виходів моделі і об'єкта.

Труднощі, пов'язані з некоректністю математичних постановок обернених задач, задач ідентифікації, задач оптимального керування, долаються використанням таких підходів як переосмислення поняття самого розв'язку, введення неklasичного, узагальненого розв'язку [6, 148, 151] та регуляризація математичної моделі [4, 119, 179].

В останні десятиріччя розвиток математичного моделювання динамічних і кінетичних процесів у гідродинаміці відбувається у напрямку розширення і поглиблення досліджень за рахунок використання більш повних систем рівнянь, зменшення кількості обмежень, пов'язаних з ідеалізацією моделей руху рідини і рівнянь стану.

Одночасно з розвиненням методів математичного моделювання у прикладних галузях науки, виробництва та суспільства виникає значна кількість нових актуальних задач, пов'язаних із складними фізичними процесами, які описуються системами нелінійних рівнянь переносу та системами рівнянь Нав'є – Стокса.

Велика кількість фізичних і конструктивних параметрів, невизначеність функціональних зв'язків між окремими складовими процесу та нерівноцінність впливу різних факторів на кінцевий результат вимагають при моделюванні проведення глибокого аналізу, обґрунтованої декомпозиції задачі, побудови ієрархічної структури допоміжних (агрегованих) задач та розробки схеми синтезу основної моделі. Виникає необхідність в удосконаленні та розробці нових чисельних методів моделювання [32-34].

Серед таких нових і актуальних задач є задачі створення носіїв запису та збереження інформації на основі оптико-голографічного методу на тонких термопластичних середовищах (ТПС) та задача ідентифікації зосереджених джерел забруднень та прогнозування екологічного стану.

Мета математичного дослідження процесу рельєфоутворення полягає у визначенні таких теплофізичних і динамічних характеристик ТПС, які при відповідному режимі проявлення, залежному від властивостей речовини та способу утворення температурного поля в ТПС, дозволяють отримати якісне зображення [35,36]. В основу такої моделі покладено систему рівнянь Нав'є-Стокса [37]. Велика

в'язкість речовини, малі за розмірами області та проміжки часу протікання процесу, не повністю визначені параметри початкового стану процесу та наявність теплового впливу з класу узагальнених функцій скінченного порядку істотно ускладнюють процес побудови моделі.

Необхідно відзначити, що методи дослідження задач, побудованих на основі системи рівнянь Нав'є-Стокса, надзвичайно складні і мало розроблені [37-43, 48, 52, 54-58, 61,62, 64-69,71,72,74]. У роботах О.А. Ладиженської [23-27], Ж.–Л. Ліонса [28], Р.Темама [31] та інших вчених досліджено лише окремі випадки проблеми існування та єдиності розв'язків таких задач [39-43].

На даний час не існує загальних підходів обґрунтування стійкості та оцінок похибок нелінійних різницевих схем, які апроксимують нелінійні диференціальні рівняння та системи рівнянь в частинних похідних.

Побудову моделі ускладнює наявність розривів розв'язку задач переносу, які породжені нелінійним характером процесів. При дослідженні таких розв'язків використовують локалізацію розривів із забезпеченням на них виконання законів збереження; вводять у рівняння штучну в'язкість або переходять до узагальнених рівнянь, які випливають з інтегральних законів збереження. У першому випадку аналіз динаміки течій значно ускладнюється. Перехід до інтегральних співвідношень для системи рівнянь Нав'є-Стокса чи гіперболічних рівнянь газової динаміки у загальному випадку далеко нетривіальний. Тому при чисельних розрахунках на розривах, як правило, у системі різницевих рівнянь використовують оператори згладжування [88], вводять штучну в'язкість [75,81,142], або будують схеми з внутрішньою в'язкістю [37,89].

При застосуванні неявних різницевих схем у нелінійних задачах необхідно розв'язувати великі системи нелінійних різницевих рівнянь. Умова збіжності ітераційного процесу накладає обмеження на вибір початкового наближення розв'язку, а отже, і на часовий крок різницевого рівняння. Ці обмеження еквівалентні умовам стійкості явних схем. Останнє пояснює широке використання при розв'язуванні задач для систем Нав'є-Стокса двокрокових схем Мак-Кормака [90], Браїловської [91], Лакса-Вендроффа [89], Алена-Чена [92], Дюфорта-

Франклена [37], методів дробових кроків [93], розщеплення [94], змінних напрямків [75,81] тощо. Іноді двокрокова структура алгоритму дозволяє визначити чисельний розв'язок без розв'язання систем рівнянь. Таким зокрема, є двокроковий симетризований алгоритм, запропонований у роботах О.Ю. Грищенка [122], який розвинуто і застосовано в даній роботі.

При вивченні процесів переносу часто виникає необхідність встановлення певних параметрів відповідних моделей. Це призводить до обернених задач, задач ідентифікації [32, 96-99, 112, 114-116] та оптимального керування [2-6, 100, 118].

Обернені задачі для диференціальних рівнянь в частинних похідних досліджено в [17], зокрема для лінійних гіперболічних систем [175], обернені задачі відновлення правих частин для параболічних рівнянь та систем вивчено в [98, 99]. Задачам ідентифікації для диференціальних рівнянь в частинних похідних присвячено ряд робіт [114-116, 152, 170, 171], чисельні методи для таких задач розроблено в [96, 97]. Оптимальне керування зосередженими джерелами вивчено в роботах [6, 16].

Такі задачі ускладнюються сингулярністю, імпульсним характером, точковою зосередженістю джерел [6] і є мало дослідженими.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Дисертаційну роботу виконано у відповідності до плану наукових досліджень кафедри обчислювальної математики факультету кібернетики Київського національного університету імені Тараса Шевченка в межах держбюджетних науково-дослідних тем: ТЗ НДР №01БФ015 “Моделювання та оптимізація інформаційних систем” (державний номер реєстрації 0101U002178), зокрема, етапу №03ДП015-06 “Система підтримки прийняття оптимальних рішень для захисту підземних вод від забруднень” за проектом №06.02/03182 (державний номер реєстрації 0103U004577); №01БП015-07 “Нові підходи ко комп'ютерного моделювання складних середовищ і систем, розробка на їх основі високоефективних методів і алгоритмів для інформаційно-аналітичних систем”; №06БФ015-04 “Теорія сингулярного оптимального керування системами з розподіленими параметрами” (державний номер реєстрації 0106U05857); №11БФ015-03 “Алгоритм керування і розпізнавання в складних системах” (державний номер реєстрації 0111U06679).

**Мета і задачі дослідження.** Метою дисертаційної роботи є побудова чисельних моделей та програмного забезпечення для процесів тепло- та масопереносу, процесу рельєфоутворення та розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел для параболічних рівнянь.

Для досягнення цієї мети розв'язувалися наступні проблеми:

- 1) розробка ефективних двокрокових симетризованих різницевих алгоритмів для чисельного моделювання процесів, які описуються системою рівнянь Нав'є-Стокса;
- 2) дослідження та обґрунтування виконання законів збереження на сітці (консервативності), дисипативності, дисперсійності, транспортивності; проведення дослідження впливу апроксимацій граничних умов на стійкість побудованих алгоритмів;
- 3) встановлення умови стійкості для лінеаризованих моделей переносу;
- 4) проведення експериментального дослідження алгоритмів на тестових задачах;
- 5) проведення регуляризації некоректної постановки задачі ідентифікації точкових джерел забруднень та розробити метод ідентифікації;
- 6) застосування двокрокових симетризованих алгоритмів у практичному розв'язанні задач ідентифікації для параболічних рівнянь;
- 7) побудова та обґрунтування алгоритму розв'язання задачі оптимального керування для лінеаризованої системи рівнянь Нав'є-Стокса;
- 8) комп'ютерне моделювання процесів рельєфоутворення та розповсюдження забруднень з точковими джерелами.

*Об'єктом дослідження* дисертаційної роботи є процеси тепло- та масопереносу, зокрема динаміка нестислої ньютонівської рідини та розповсюдження забруднень у пористих середовищах та атмосфері.

*Предметом дослідження* є математичні моделі тепло- та масопереносу, актуальні на даний час розвитку прикладної математики, зокрема, лінеаризовані та нелінійні системи диференціальних рівнянь в частинних похідних та системи рівнянь Нав'є-Стокса, нестационарні рівняння гіперболічного та параболічного типів, початкові та крайові умови; також предметом дослідження є відповідні

чисельні конструкції, зокрема, скінченно-різницеві рівняння, ітераційні алгоритми ідентифікації та пошуку оптимального керування.

**Методами дослідження** є методи функціонального аналізу, адаптовані до розглянутих математичних моделей; класичні теоретичні підходи дослідження різницевих схем, зокрема метод Фон-Неймана, метод першого диференціального наближення для встановлення умов стійкості та порядку апроксимації різницевих алгоритмів, теорія узагальненого керування лінійними системами; чисельні експерименти, що у випадку нелінійних моделей, таких як система рівнянь Нав'є-Стокса з нелінійними граничними умовами, є одним з елементів обґрунтування розроблених моделей.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає в наступному.

– Побудовано та реалізовано чисельні моделі для нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса з нелінійними граничними умовами. У певних випадках знайдено точний аналітичний розв'язок, який використано для обґрунтування збіжності запропонованих алгоритмів.

– Досліджено стійкість, дисипативність двокрокових алгоритмів із симетричними різницями та різницями проти потоку для розв'язування гіперболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами та деяких нелінійних рівнянь. Вивчено питання застосування штучної в'язкості в запропонованих ДС-алгоритмах. Розроблено програмні модулі, які апробовано на тестових задачах і зроблено порівняльний аналіз з іншими алгоритмами, що широко використовуються на даний час.

– Побудовано та математично обґрунтовано регуляризовану задачу ідентифікації точкових джерел для рівняння конвекції-дифузії, встановлено збіжність розв'язку регуляризованої задачі до початкової задачі ідентифікації, побудовано алгоритм розв'язання задачі ідентифікації, особливістю якого є одночасний пошук невідомих координат та інтенсивностей точкових джерел

– Побудовано новий чисельний метод розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел.

– Для задачі оптимального керування лінеаризованою системою рівнянь Нав'є-Стокса побудовано та обґрунтовано алгоритм знаходження розв'язку.

– Побудовано нові комп'ютерні моделі процесів рельєфоутворення та розповсюдження забруднень з точковими джерелами.

Достовірність одержаних результатів забезпечується як строго доведеними лемами та теоремами, так і чисельними розрахунками, проведеними на тестових задачах з відомими аналітичними розв'язками.

**Практичне значення одержаних результатів.** Розроблені в дисертації чисельні моделі та методи їх реалізації можуть бути застосовані для достатньо широкого класу фізичних процесів, а саме: задачі гідро- і газової динаміки, теплофізики, екології тощо.

**Особистий внесок здобувача.** Основні результати дисертаційної роботи одержані особисто автором. На захист виносяться результати, опубліковані у 13 роботах [101-110,183,185,186], з яких 8 надруковано у фахових виданнях ВАК України. У роботах, які написано у співавторстві, науковому керівнику професору, доктору фіз.-мат. наук Грищенку О.Ю. належать постановка проблеми, ідея алгоритму та доведення стійкості ДС-алгоритму, обговорення результатів [101-102,105-110,183]; академіку НАН України Ляшко І.І. належить загальна постановка проблеми [105], член-кореспондент НАН України Ляшко С.І окреслив загальну схему (методику) встановлення питань існування та єдиності оптимального імпульсного керування гіперболічними системами [102]; в роботі [109] Н.І. Ляшко належить постановка задачі, ідея регуляризації правої частини дифференціального уравнения, формула для апроксимації дельта-функції, доведення існування і збіжності керування регуляризованої задачі до оптимального керування початкової задачі, аналіз результатів чисельних розрахунків; в роботі [183] Д.А. Ключину належить загальна постановка задачі, Стешенку Г.М. належить внесок в побудову прямої та спряженої задач.

**Апробація результатів дисертації.** Матеріали дисертації доповідалися на: міжнародній науковій конференції “Dynamical systems modeling and stability investigation” (22-25 травня 2001 р., м. Київ), міжнародній конференції “Обчислювальна та прикладна математика” (9-10 вересня 2002 р., м. Київ),

наукових семінарах кафедри обчислювальної математики: “Двокрокові симетризовані алгоритми в чисельному моделюванні процесів переносу” (22.11.2001 р.), “Застосування двокрокових симетризованих алгоритмів в моделюванні та оптимізації процесів переносу” (17.09.2003 р.), XII Всеукраїнській науковій конференції “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики” (4-6 жовтня 2005 року, м. Львів), міжнародному симпозіумі “Питання оптимізації обчислень” (ПОО-XXXV, 24-29 вересня 2009 р.).

**Публікації.** Основні положення дисертації висвітлено у 13 наукових працях, з яких 8 статей надруковано в наукових журналах України та 5 наукові роботи надруковано в збірниках тез доповідей конференцій.

**У вступі** обґрунтовано актуальність напрямку досліджень; сформульовано мету, задачі та методи досліджень; висвітлено наукову новизну отриманих результатів та їх зв'язок із науковими програмами, темами та планами; відзначено їх практичну цінність; наведено відомості про апробацію; зроблено огляд основних результатів автора; описано структуру дисертації за розділами.

**У першому розділі** висвітлюються математичні моделі та задачі теорії тепло- та масо- переносу. Зокрема, наведено моделі, що описують процес проявлення голографічного зображення та задачі ідентифікації, розглянуто задачі оптимального керування для параболічних рівнянь та лінеаризованих систем рівнянь Нав'є-Стокса.

**У другому розділі** розроблено та проведено дослідження двокрокових симетризованих алгоритмів, які є базовими для проведення чисельного моделювання, для гіперболічних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, нелінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних. Встановлені умови стійкості, вивчені властивості апроксимації, консервативності різницевих схем; досліджено вплив штучної в'язкості на властивості ДС-алгоритмів; проведено ряд обчислювальних експериментів; проведено порівняння розроблених ДС-алгоритмів з іншими сучасними чисельними методами.

**У третьому розділі** побудовано чисельний алгоритм розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел забруднень з відомими координатами та невідомими

інтенсивностями джерел. Дано теоретичне обґрунтування ДС-алгоритму, використаному для розв'язання прямої та оберненої початково-крайових задач, а також встановлено гладкість критерію якості. Розроблено метод розв'язання узагальненої задачі ідентифікації з невідомими інтенсивностями та координатами джерел забруднень і апробовано цей метод на модельних прикладах.

**У четвертому розділі** розглядається нестационарна система диференціальних рівнянь Нав'є-Стокса. Побудовано модельний аналітичний розв'язок для початково-крайової задачі з усталенням із складними граничними умовами, що є однією з підзадач вивчення процесу проявлення прихованого голографічного зображення для оптичного запису/відновлення інформації. Для задачі узагальненого керування для лінеаризованої системи рівнянь Нав'є-Стокса проведено регуляризацію моделі, вивчено диференціальні властивості критерію якості, побудовано ітераційний алгоритм пошуку оптимального керування.

**У додатках** подано результати обчислювальних експериментів з використанням методик та алгоритмів, розроблених та теоретично обґрунтованих в попередніх розділах. Зокрема, знайдено чисельні розв'язки початково-крайових задач для гіперболічних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, рівняння Бюргерса із застосування ДС-алгоритму та проведено їх порівняння з результатами, одержаними іншими сучасними чисельними методами; отримано результати використання алгоритму ідентифікації точкових джерел забруднень з невідомими інтенсивностями, на реально існуючому природньому об'єкті; результати ідентифікації джерел з невідомими координатами; результати чисельного розв'язання нестационарної системи рівнянь Нав'є-Стокса з врахуванням нелінійних доданків та теплового балансу, точковим джерелом тепла, складними крайовими умовами.

Автор висловлює щире подяку науковому керівнику, доктору фіз.-мат. наук, професору Грищенку Олександрю Юхимовичу за постійну увагу та цінні поради, а також батькам, дружині, доньці, колегам з рідної кафедри обчислювальної математики та всім друзям за їх підтримку.

## РОЗДІЛ 1

### ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ

У даному розділі висвітлюються особливості постановок та побудови актуальних на даний час математичних моделей та задач теорії тепло- та масо-переносу, ідентифікації, оптимального керування. Основні ускладнення становлять нелінійність, а також сингулярність диференціальних рівнянь в частинних похідних та крайових умов, які зумовлюють некоректність постановок математичних моделей, зокрема, в задачі ідентифікації зосереджених (точкових) джерел в соленоїдальному полі.

#### 1.1. Узагальнені розв'язки

Існують різні підходи для визначення узагальненого розв'язку [ ]. У даній роботі притримуємося термінології та означень, сформульованих в роботі С.І.-Ляшка [6].

Нехай функціонування системи описується параболічним рівнянням

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n c_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = f(x,t), \quad (1.1)$$

де  $u(x,t)$  - функція, що описує стан системи в області  $Q = \Omega \times (0,T)$ , а  $\Omega$  - обмежена область в  $R^n$  з гладкою межею  $\partial\Omega$ . А коефіцієнти рівняння (1.1)  $k_{ij}(x) = k_{ji}(x)$ ,  $c_i(x)$ ,  $a(x)$  - неперервні функції в замиканні  $\bar{\Omega}$ ; крім того, нехай виконуються співвідношення

$$\sum_{i,j=1}^n k_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha_A \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad a(x) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\partial c_i(x)}{\partial x_i}, \quad a(x) \geq 0, \quad \forall x \in \bar{\Omega}, \quad \forall \xi_i \in R^1,$$

де константа  $\alpha_A > 0$ .

Через  $W_{sp}^+$  позначимо простір, який є поповненням простору нескінченно-диференційовних функцій, що задовольняють граничні умови

$$u|_{t=0} = 0, \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad (1.2)$$

за нормою  $\|u\|_{W_{zp}^+} = \left( \int_Q \left( u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i x_j}^2 \right) dQ \right)^{1/2}$ ,

а  $W_{zp}^+$  - поповнення простору нескінченно-диференційовних функцій, що задовольняють граничні умови спряженої задачі

$$v|_{t=T} = 0, \quad v|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (1.3)$$

Використовуючи пари просторів  $W_{zp}^+, L_2(Q)$  та  $W_{zp}^+, L_2(Q)$ , будемо відповідно негативні простори  $W_{zp}^-$  та  $W_{zp}^-$  як поповнення гладких в  $\bar{Q}$  функцій, що задовольняють умовам (1.2) або (1.3) відповідно за нормами

$$\|f\|_{W_{zp}^-} = \sup_{\substack{u \in W_{zp}^+, \\ u \neq 0}} \frac{|(f, u)_{L_2(Q)}|}{\|u\|_{W_{zp}^+}}, \quad \text{та} \quad \|f\|_{W_{zp}^-} = \sup_{\substack{v \in W_{zp}^+, \\ v \neq 0}} \frac{|(v, f)_{L_2(Q)}|}{\|v\|_{W_{zp}^+}}.$$

Спряжений оператор має вигляд

$$L^*v = -\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( k_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (c_i(x)v) + a(x)v. \quad (1.4)$$

Мають місце подвійні оцінки [172]

$$c_2 \|u\|_{W_{zp}^+} \leq \|Lu\|_{L_2(Q)} \leq c_1 \|u\|_{W_{zp}^+}, \quad c_3 \|v\|_{W_{zp}^+} \leq \|L^*v\|_{L_2(Q)} \leq c_4 \|v\|_{W_{zp}^+}, \quad (1.5)$$

де  $L^*(\cdot)$  - спряжений за Лагранжем до  $L(\cdot)$  оператор,  $u \in D(L)$ ,  $v \in D(L^*)$ ,  $c_1, c_2, c_3, c_4$  - тут і надалі додатні сталі, що не залежать від функцій  $u(x, t)$  та  $v(x, t)$ ,

та мають місце неперервні вкладення просторів

$$W_{zp}^- \supset L_2(Q) \supset W_{zp}^+, \quad W_{zp}^- \supset L_2(Q) \supset W_{zp}^+.$$

Для дослідження процесів функціонування системи використаємо позначення та поняття розв'язку так, як це було введено у роботі [6].

Через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_{zp}^+}$  та  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{W_{zp}^-}$  позначимо білінійні форми, побудовані неперервним продовженням скалярного добутку в  $L_2(Q)$  до білінійної форми на  $W_{zp}^- \times W_{zp}^+$  та  $W_{zp}^- \times W_{zp}^+$  відповідно.

Розв'язки прямої (1.1) та спряженої задачі

$$L^*v = G \quad (1.1')$$

будемо інтерпретувати у розумінні наведених далі означень.

**Означення 1.** Розв'язком задачі (1.1) з правою частиною  $F \in W_{zp+}^-$  будемо називати функцію  $u(x,t) \in W_{zp}^+$ , для якої існує послідовність функцій  $u_i(t,x) \in C_{zp}^{+\infty}(\bar{Q})$ ,  $i = 1, 2, \dots$  таких, що  $\|u_i - u\|_{W_{zp}^+} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ ,  $\|Lu_i - F\|_{W_{zp+}^-} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ .

**Означення 2** (сильного розв'язку). Сильним розв'язком задачі (1.1) з правою частиною  $F \in W_{zp+}^-$  будемо називати функцію  $u(x,t) \in W_{zp}^+$  таку, що  $Lu - F = 0$  у просторі  $W_{zp+}^-$ .

**Означення 3** (слабкого розв'язку). Слабким розв'язком задачі (1.1) з правою частиною  $F \in W_{zp+}^-$  будемо називати функцію  $u(x,t) \in W_{zp}^+$  таку, що рівність

$$\langle Lu, v \rangle_{W_{zp+}^-} = \langle F, v \rangle_{W_{zp+}^-}$$

виконується для довільних функцій  $v \in W_{zp+}^+$ .

**Означення 4.** Розв'язком задачі (1.1) з правою частиною  $F \in W_{zp+}^{-l}$  будемо називати функцію  $u(t,x) \in H_{zp}^+(Q)$ , для якої існує послідовність функцій  $u_i(t,x) \in C_{zp}^{+\infty}(\bar{Q})$ ,  $i = 1, 2, \dots$  таких, що  $\|u_i - u\|_{H_{zp}^+} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ ,  $\|Lu_i - F\|_{W_{zp+}^{-l}} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$ .

Тут  $H_{zp}^+(Q)$  - деякий гільбертовий простір:  $L_2(Q) \supset H_{zp}^+(Q) \supset W_{zp}^+$ .

Мають місце теореми [172]:

**Теорема 1.** Для будь-якого елемента  $f \in L_2(Q)$  існує єдиний розв'язок  $u \in W_{zp}^+$  операторного рівняння (1.1) в нормі простору  $L_2(Q)$  у розуміння означення 1.

**Теорема 2.** Для будь-якого елемента  $f \in W_{zp+}^-$  існує єдиний слабкий розв'язок  $u \in L_2(Q)$  задачі (1.1).

**Теорема 3.** Для будь-якого елемента  $g \in L_2(Q)$ . існує єдиний розв'язок  $v \in W_{zp+}^+$  операторного рівняння (1.1') у розуміння означення 1.

**Теорема 4.** Для будь-якого елементу  $g \in W_{pp}^-$  існує єдиний слабкий розв'язок  $v \in L_2(Q)$  задачі (1.1').

## 1.2. Постановка задач ідентифікації та алгоритм знаходження розв'язку

Розглядається задача відновлення точкових джерел для параболічного рівняння другого порядку, яка є оберненою до задачі знаходження стану системи

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 c_{\alpha} \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} k_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + a(x)u = - \sum_{\beta=1}^p \delta(x - r^{\beta}) q^{\beta}(t), \quad (1.6)$$

$$\Omega = \{x = (x_1, x_2) \mid 0 \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha}, \alpha = 1, 2\}, \quad k_{\alpha}(x) \geq k_0 > 0, \alpha = 1, 2; \quad c = (c_1, c_2).$$

Коефіцієнти  $k(x)$ ,  $c(x)$ ,  $a(x)$  зберігають всі властивості, зазначені в пункті 1.1.

Тут  $r^{\beta}$  – координати джерел,  $q^{\beta}(t)$  – потужності,  $\beta = \overline{1, p}$ .

Крім того, у початковий момент часу відоме значення розв'язку в області  $\Omega$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.8)$$

А на границі області у кожен момент часу  $t \in [0, T]$  відомий стан системи

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \quad (1.7)$$

Відомими вважаємо вимірювання  $\varphi_j(t)$ ,  $j = \overline{1, J}$  функції  $u(x, t)$  в деяких окремих точках  $z_j$  області  $\Omega$

$$u(z_j, t) = \varphi_j(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad j = \overline{1, J}. \quad (1.9^*)$$

У такій постановці виникає ускладнення, пов'язане з тим, що єдиність розв'язку задачі (1.6) у розумінні означень з пункту 1.1.1 встановлено лише для простору  $L_2(\Omega)$ . Тому замість (1.9\*) надалі використовуємо умову

$$\tilde{u}(z_j, t) = \varphi_j(t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad j = \overline{1, J}, \quad (1.9)$$

де  $\tilde{u}(z_j, t) \equiv \int_{\sigma_j} u(x, t) dx / \int_{\sigma_x} dx$ . - усереднення  $u(x, t)$  в деякому околі  $\sigma_j$  точки  $z_j$

[152,170/171].

Задача ідентифікації полягає у визначенні невідомих параметрів точкових джерел: інтенсивностей  $q^{\beta}(t)$  та координат  $r^{\beta}$  за додатковим спостереженням (1.8) у деяких точках області.

Як вже було зазначено, на даний час питання існування та єдиності розв'язку для задачі (1.6)-(1.8) з правими частинами, які є узагальненими функціями з негативних просторів Соболева, зокрема,  $\delta$ -функціями Дірака, у загальному випадку все ще залишаються відкритими. Разом з цим для диференціальних рівнянь в частинних похідних та інших типів рівнянь з правою частиною з простору  $L_2(\Omega \times [0, T])$  у роботі [9] доведено існування та єдність розв'язку у відповідних просторах. Це дозволило у розділі 4 побудувати коректну регуляризовану модель задачі ідентифікації.

Для розв'язування таких задач здебільшого використовують чисельні методи. У роботі [96] запропоновано методіку розв'язання задачі ідентифікації (відновлення) інтенсивностей точкових джерел за відомими спостереженнями в деякій скінченній кількості точок для параболічного рівняння, де для чисельного розв'язання прямих задач було використано класичну різницеву схему з вагою. Дана методика полягає в використанні варіаційного формулювання оберненої задачі, а саме, переході до задачі оптимального керування для відповідного рівняння (рівнянь) з частинними похідними та застосуванні методу регуляризації А.Н.Тихонова [119]. У дисертаційній роботі поширено цей підхід на випадок невідомих координат та інтенсивностей зосереджених джерел для рівняння переносу, а саме 1) лінеаризованої системи рівнянь Нав'є-Стокса в  $R^2$ ; 2) параболічного рівняння другого порядку в  $R^n$ .

Для частинних випадків наведеної задачі використовуються і більш прості обчислювальні алгоритми, засновані, наприклад, на прямій реалізації методу Гальоркіна – лінійної суперпозиції розв'язків від пробних точкових джерел. Варіаційний підхід, що розглядається, можна застосувати до більш широкого класу обернених задач [32,96,97].

Варіаційна задача розв'язується на основі градієнтних варіаційних методів [120]: формулюються умови оптимальності (рівняння Ейлера для згладжуючого функціоналу) і застосовуються ітераційні методи [121] для його наближеного розв'язування.

### 1.2.1. Моделювання інтенсивностей джерел при відомих координатах їх розташування

Наведемо схему чисельного розв'язання задачі ідентифікації точкових джерел на основі варіаційного підходу, запропонованого в роботі [96].

Перепишемо рівняння (1.1) у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 c_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} k_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} + a(x)u = F(x)V(t), \quad (1.10)$$

де  $V(t) = \{V^1(t), V^2(t), \dots, V^p(t)\}$  – вектор керування системою, а  $F(x) = \{\delta(x-r^1), \delta(x-r^2), \dots, \delta(x-r^p)\}$  – вектор  $\delta$ -функцій,  $x \in \Omega \subseteq R^2$ ,  $0 < t \leq T$ .

Ця математична модель доповнюється початковими та граничними умовами (1.7), (1.8).

Нехай  $H_V = \{V(t) | V(t) = \{V^{\beta}(t)\}, V^{\beta}(t) \in L_2(0, T)\}$  – гільбертів простір із скалярним добутком

$$\langle V, W \rangle = \sum_{\beta=1}^p \int_0^T V_{\beta}(t) W_{\beta}(t) dt$$

і нормою

$$\|V\|_p = \langle V, V \rangle^{1/2}.$$

Оптимальне керування  $V^*(t)$  системою (1.10), (1.7), (1.8) визначаємо з умови мінімуму функціонала

$$\mathcal{I}_{\alpha}(V) = \sum_{j=1}^J \int_0^T (\tilde{u}(z_j, t; V) - \varphi_j(t))^2 dt + \alpha \|V\|_p^2 \xrightarrow{V} \min, \quad (1.11)$$

де  $\alpha$ - параметр регуляризації, який вибирається з урахуванням похибок спостережень [119]. Розв'язком задачі (1.10), (1.7), (1.8), (1.11) вважаємо пару  $(u(x, t) = u(x, V^*; t), V^*(t))$ .

Розв'язок  $u(x, t; \vec{V}, r)$  варіаційної задачі (1.10)-(1.11), (1.7), (1.8) шукаємо в просторі  $L_2(\Omega)$  (при фіксованих  $t, V(t)$ ) [6, 170]. Згідно теореми 3 такий розв'язок існує та єдиний. Рівняння (1.10) з урахуванням граничних умов (1.8) записується в  $H_V$  у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{C}u + \mathcal{D}u + au = FV, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.13)$$

Оператор дифузійного переносу  $\mathcal{D}$  самоспряжений та додатньо визначений в  $L_2(\Omega)$ :  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq k_0 E$ , де  $E$ - тотожній оператор. Вважаємо, що середовище є

нестислим, тому маємо  $\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$ ,  $x \in \Omega$ .

Оператор конвективного переносу є кососиметричним:  $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^*$ .

Нехай вектор-функція  $\vec{\varphi}(t) \in [L_2(\Omega)]^J$ .

Введемо позначення  $(\chi, \tilde{u}(x, t; \vec{V}) - \vec{\varphi}(t))^2 = \sum_{j=1}^J (\tilde{u}(z_j, t; \vec{V}) - \varphi_j(t))^2$ .

З урахуванням цих позначень функціонал (1.11) набуває вигляду

$$\mathcal{I}_\alpha(V) = \int_0^T (\chi, \tilde{u}(x, t; V) - \varphi(t))^2 dt + \alpha \|V\|_p^2. \quad (1.14)$$

Через  $(\cdot, \cdot)$  позначено скалярний добуток в  $L_2(\Omega)$ , відповідну норму будемо позначати через  $\|\cdot\|$ . Рівняння (1.13) з урахуванням (1.8) доповнюється початковою умовою

$$u(0) = g. \quad (1.15)$$

Отже, приходимо до задачі мінімізації функціоналу (1.14) на розв'язках задачі (1.13), (1.15).

### **Умови оптимальності.**

Для даної задачі оптимального керування сформулюємо умови оптимальності, надамо конкретний зміст рівнянню Ейлера для квадратичного функціоналу  $\mathcal{I}_\alpha(V)$ , яке має вигляд

$$\text{grad } \mathcal{I}_\alpha(V^*) = 0 \quad (1.16)$$

Для знаходження градієнта функціоналу  $\mathcal{I}_\alpha(V)$  розглянемо приріст  $\delta \mathcal{I}_\alpha(V) = \mathcal{I}_\alpha(V + \delta V) - \mathcal{I}_\alpha(V)$ . Визначимо розв'язок задачі (1.13), (1.15), який відповідає правій частині з  $V + \delta V$  через  $u + \delta u$ . Внаслідок лінійності задачі маємо

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \mathcal{C} \delta u + \mathcal{D} \delta u + a \delta u = \sum_{\beta=1}^p \delta V^\beta \delta(x - r^\beta), \quad 0 < t \leq T, \quad (1.17)$$

$$\delta u(0) = 0. \quad (1.18)$$

Для приросту функціоналу отримуємо

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I}_\alpha(V) &= \int_0^T (\chi, (u + \delta u - \varphi))^2 dt + \alpha \|V + \delta V\|_p^2 - \int_0^T (\chi, u - \varphi)^2 dt - \alpha \|V\|_p^2 = \\ &= 2 \int_0^T (\chi, (u - \varphi) \delta u) dt + \int_0^T (\chi, (\delta u)^2) dt + 2\alpha \langle V, \delta V \rangle + \alpha \|\delta V\|_p^2. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Для того, щоб з (1.19) знайти вираз для градієнта функціоналу  $\mathcal{I}_\alpha(V)$ , необхідно визначити залежність між приростом  $\delta u$  та приростами керування. З цією метою введемо нову функцію  $\psi(t) \in L_2(\Omega)$ , що визначає спряжений стан і перетворюється в нуль на границі  $\partial\Omega$ .

Помножимо рівняння (1.17) скалярно в  $L_2(\Omega)$  на  $\psi(t)$  і проінтегруємо за часом від 0 до  $T$ .

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \psi \right) + (\mathcal{C} \delta u, \psi) + (\mathcal{D} \delta u, \psi) + (a \delta u, \psi) \right) dt = \\ = \int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p \delta V^\beta \delta(x - r^\beta), \psi \right) dt. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Для першого доданку з урахуванням (1.5) маємо

$$\int_0^T \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \psi \right) dt = (\delta u(T), \psi(T)) - \int_0^T \left( \delta u, \frac{d\psi}{dt} \right) dt. \quad (1.21)$$

Ураховуючи те, що

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \text{ та } \mathcal{C} = -\mathcal{C}^* \quad (1.22)$$

отримаємо

$$(\mathcal{C} \delta u, \psi) + (\mathcal{D} \delta u, \psi) + (a \delta u, \psi) = -(\delta u, \mathcal{C} \psi) + (\delta u, \mathcal{D} \psi) + (\delta u, a \psi). \quad (1.23)$$

Будемо вважати, що

$$\psi(T) = 0. \quad (1.24)$$

Тоді при підстановці (1.21)-(1.24) в (1.20) приходимо до рівності

$$\int_0^T \left( \delta u, \left( -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{C}\psi + \mathcal{D}\psi + a\psi \right) \right) dt = \int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p \delta V^\beta \delta(x - r^\beta), \psi \right) dt =$$

$$= \int_0^T \sum_{\beta=1}^p \delta V^\beta \psi(r^\beta) dt \quad (1.25)$$

Функції  $\psi$  будемо визначати так, щоб ліва частина (1.25) дорівнювала першому доданку в (1.19), тобто

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{C}\psi + \mathcal{D}\psi + a\psi = 2\chi(u - \varphi(t)), \quad T > t \geq 0. \quad (1.26)$$

Для перетворення правої частини (1.26) введемо вектор-функцію

$\Psi(r, t) = (\psi(r^1, t), \psi(r^2, t), \dots, \psi(r^p, t))$ , яка є спряженим станом в точках, що відповідають поточним координатам. Тоді для правої частини (1.25) маємо

$$\int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p \delta V^\beta \delta(x - r^\beta), \psi \right) dt = \int_0^T \langle \delta V, \Psi \rangle dt. \quad (1.27)$$

З оцінок (1.5) випливає, що задача (1.17), (1.18) поставлена коректно [6], тобто мають місце нерівності  $\|\delta u\| \leq \text{const}_1 \|\delta V\|_p$ . Згідно теореми 4 такий розв'язок існує та єдиний. Отже, для задачі (1.17)-(1.18), з (1.19) та (1.25)-(1.27) отримуємо вираз для градієнта функціоналу (1.14) та відповідне рівняння Ейлера:

$$\text{grad } \mathcal{I}_\alpha(V^*) \equiv \Psi(t) + \alpha V^*(t) = 0 \quad (1.28)$$

де  $\Psi(r, t)$  визначається за розв'язком задачі (1.24), (1.26).

Отже, необхідну і достатню умову (1.16) мінімуму функціоналу (1.14) в покомпонентному вигляді запишемо так

$$\psi(r^\beta, t) + 2\alpha V^\beta(t) = 0 \quad (1.29)$$

З наведеного вище випливає наступний ітераційний алгоритм.

При переході з  $k$ -ї на  $(k+1)$  ітерацію:

1. Розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + \mathcal{C}u^k + \mathcal{D}u^k + au^k = \sum_{\beta=1}^p V^{\beta, k} \delta(x - r^\beta), \quad 0 < t \leq T, \quad (1.30)$$

$$u^k(0) = 0. \quad (1.31)$$

2. Знаходиться спряжений стан  $\Psi^k$  системи з системи рівнянь

$$-\frac{d\Psi^k}{dt} - \mathcal{C}\Psi^k + \mathcal{D}\Psi^k + a\Psi^k = 2\chi(u - \bar{\varphi}(t)); \quad T > t \geq 0 \quad (1.32)$$

$$\Psi^k(T) = 0. \quad (1.33)$$

3. Визначаються нові наближення для потужностей  $\mathbf{V}$

$$\frac{V^{\beta,k+1} - V^{\beta,k}}{s_{k+1}} + \Psi^k(r^\beta) + 2\alpha V^{\beta,k} = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \quad (1.34)$$

Тут  $s_{k+1}$  – крокові множники, що обираються з умов  $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = +\infty$ ;  $s_k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ ;

4. Обчислюємо значення  $\mathcal{Z}_\alpha(V^{k+1})$  за формулою (1.14) та при умові  $|\mathcal{Z}_\alpha(V^{k+1})| < \varepsilon$  зупиняємося – інтенсивності  $V^{k+1}$  – шукані, інакше переходимо на крок 1. Тут  $\varepsilon$  – величина, що характеризує точність отриманого розв’язку.

### 1.2.2. Визначення потужностей та уточнення координат джерел

Розглядається задача (1.10), (1.11). Але на відміну від попереднього параграфу обернена задача полягає в відновленні координат та потужностей точкових джерел для задачі конвекції-дифузії на основі спостережень  $u(x, t)$ . При цьому кількість джерел та початкові наближення координат джерел вважаються відомими.

Згідно введених в попередньому пункті позначень стан системи  $u(x, t; V, r)$  описується рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^2 c_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} k(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + au = F(x, r)V(t), \quad (1.35)$$

де  $V(t) = (V^1(t), V^2(t), \dots, V^p(t))$  та  $r = (r^1, r^2, \dots, r^p)$  – вектори керувань,

$F(x, r) = (\delta(x - r^1), \delta(x - r^2), \dots, \delta(x - r^p))$  – вектор дельта-функцій  $x \in \Omega$ ,  $0 < t \leq T$ .

Варіаційна задача доповнюється умовами (1.7), (1.8).

Будемо вважати, що керування  $h = (V(t), r) \in H_{VR}$ , де

$H_{VR} = \{h = \{(V^\beta(t), r^\beta), \beta = \overline{1, p}\}\} \subset L_2^p(0, T) \otimes R^p$  – гільбертів простір із скалярним добутком  $\langle h_1, h_2 \rangle = \sum_{\beta=1}^p \left( \int_0^T V_\beta^{(1)}(t) V_\beta^{(2)}(t) dt + r_\beta^{(1)} r_\beta^{(2)} \right)$  і нормою  $\|h\|_p = \langle h, h \rangle^{1/2}$ ;

Функціонал якості розглядаємо у вигляді

$$\mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r) = \sum_{j=1}^J \int_0^T (\tilde{u}(z_j, t; V, r) - \varphi_j(t))^2 dt + \alpha \|V\|_{L_2^p(0, T)}^2 + \gamma^2 \|r\|_p^2. \quad (1.36)$$

Тут  $\alpha > 0, \gamma > 0$  – параметри регуляризації.

Оптимальне керування  $h^* = (V^*, r^*)$  визначається як мінімум функціоналу  $\mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r)$ , тобто

$$\mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V^*, r^*) = \min_{(V, r) \in H_{VR}} \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r), \quad (1.37)$$

а за розв'язок задачі (1.35)-(1.37), (1.7), (1.8) беремо  $u(x, t; V^*, r^*)$  та сам вектор  $(V^*(t), r^*)$ .

**Теорема 1.1.** *Критерій якості (1.36) для задачі оптимального керування (1.37), (1.35), (1.7), (1.8) диференційовний за Гато. При цьому*

$$\text{grad } \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}}{\partial V} \\ \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(r, t) + 2\alpha V \\ \text{grad} \Psi(r, t) \cdot V + 2\gamma r \end{pmatrix}, \text{ де}$$

$$\text{grad} \Psi(r, t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Psi}{\partial r_1} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r_2} \end{pmatrix}.$$

**Доведення.** Для варіаційної задачі (1.35)-(1.37), (1.7), (1.8) розв'язок  $u(x, t; V, r)$  шукаємо у просторі  $L_2(\Omega)$  (при фіксованих  $t, V(t)$  та  $r$ ). Рівняння (1.35) з урахуванням граничних умов (1.7) записується в  $H_{VR}$  у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{C}u + \mathcal{D}u + au = FV, \quad 0 < t \leq T. \quad (1.38)$$

Оператор дифузійного переносу  $\mathcal{D}$  самоспряжений та додатньо визначений в  $L_2(\Omega)$ :  $\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \geq k_0 E$ , де  $E$  – тотожній оператор. Вважаємо, що середовище є нестислим, тому маємо  $\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial c_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0$ ,  $x \in \Omega$ .

Оператор конвективного переносу є кососиметричним:  $\mathcal{C} = -\mathcal{C}^*$  в  $L_2(\Omega)$ .

Введемо функцію  $\chi = \sum_{j=1}^J \delta(x - z_j)$ , де  $\delta(x)$  – дельта-функція Дірака, і нехай вектор-функція  $\varphi(t) \in [L_2(\Omega)]^J$  така, що

$$\chi\varphi(t) = \sum_{j=1}^J \delta(x - z_j)\varphi_j(t).$$

З урахуванням цих позначень функціонал (1.36) набуває вигляду

$$\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \int_0^T (\chi, u(t; V, r) - \varphi(t))^2 dt + \alpha \|V\|_{L_2^2(0,T)}^2 + \gamma \|r\|_p^2. \quad (1.39)$$

Рівняння (1.38) з врахуванням (1.8) доповнюється початковою умовою

$$u(0) = g. \quad (1.40)$$

Отже, приходимо до задачі мінімізації (1.39) на розв'язках задачі (1.35), (1.7), (1.8).

Для даної задачі оптимального керування сформулюємо умови оптимальності, тобто, надамо конкретного змісту рівнянню Ейлера для квадратичного функціоналу  $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$ , яке в покомпонентному вигляді є системою

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial V}(V^*, r^*) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial r}(V^*, r^*) = 0 \end{cases}. \quad (1.41)$$

Для знаходження градієнта  $\text{grad } \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$  функціоналу  $\mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$  розглянемо приріст  $\delta \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V + \delta V, r + \delta r) - \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r)$ . Визначимо розв'язок задачі (1.35), (1.37), який відповідає правій частині з  $V + \delta V$  та  $r + \delta r$  через  $u + \delta u$ . Внаслідок лінійності задачі маємо

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \mathcal{C} \delta u + \mathcal{D} \delta u + a \delta u = \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta) \delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)], \quad (1.42)$$

$$0 < t \leq T,$$

$$\delta u(0) = 0. \quad (1.43)$$

Тоді для приросту функціоналу отримаємо

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r) &= \int_0^T (\chi, (u + \delta u - \varphi)) dt + \alpha \|V + \delta V\|_{L_2^p(0, T)}^2 + \gamma \|r^\beta + \delta r^\beta\|_p^2 - \\ &- \int_0^T (\chi, u - \varphi)^2 dt - \alpha \|V\|_{L_2^p(0, T)}^2 - \gamma \|r^\beta\|_p^2 = 2 \int_0^T (\chi, (u - \varphi) \delta u) dt + \int_0^T (\chi, (\delta u)^2) dt + \\ &+ 2\alpha \langle V, \delta V \rangle + \alpha \|\delta V\|_{L_2^p(0, T)}^2 + 2\gamma \langle r, \delta r \rangle + \gamma \|\delta r\|_p^2. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Для того, щоб з (1.44) отримати вираз для градієнту функціоналу  $\mathcal{I}_{\alpha, \gamma}(V, r)$ , необхідно виразити приріст  $\delta u$  через прирости керування. З цією метою введемо нову вектор-функцію  $\psi(t) \in L_2(\Omega)$ , яка визначає спряжений стан і перетворюється в нуль на границі  $\partial\Omega$ .

Помножимо рівняння (1.42) скалярно в  $L_2(\Omega)$  на  $\psi(t)$  і проінтегруємо за часом від 0 до  $T$

$$\begin{aligned} \int_0^T \left( \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \psi \right) + (\mathcal{C} \delta u, \psi) + (\mathcal{D} \delta u, \psi) + (a \delta u, \psi) \right) dt = \\ = \int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta) \delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)], \psi \right) dt. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Для першого доданку з урахуванням (1.43) маємо

$$\int_0^T \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \psi \right) dt = (\delta u(T), \psi(T)) - \int_0^T \left( \delta u, \frac{d\psi}{dt} \right) dt. \quad (1.46)$$

Оскільки

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^* \text{ та } \mathcal{C} = -\mathcal{C}^*, \quad (1.47)$$

то

$$(\mathcal{C} \delta u, \psi) + (\mathcal{D} \delta u, \psi) + (a \delta u, \psi) = -(\delta u, \mathcal{C} \psi) + (\delta u, \mathcal{D} \psi) + (\delta u, a \psi). \quad (1.48)$$

Нехай

$$\psi(T) = 0. \quad (1.49)$$

Тоді після підстановки (1.46)-(1.49) в (1.45) приходимо до рівності

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \delta u, \left( -\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{C}\psi + \mathcal{D}\psi + a\psi \right) \right) dt = \\ & = \int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta) \delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)], \psi \right) dt. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Функції  $\psi$  будемо визначати так, щоб ліва частина (1.50) давала перший доданок в (1.44), тобто

$$-\frac{\partial \psi}{\partial t} - \mathcal{C}\psi + \mathcal{D}\psi + a\psi = 2\chi(u - \varphi(t)), \quad T > t \geq 0. \quad (1.51)$$

Для перетворення правої частини (1.51) введемо вектор-функцію

$\Psi(r, t) = (\psi(r^1, t), \psi(r^2, t), \dots, \psi(r^p, t))$  спряженого стану.

Тоді для правої частини (1.50) маємо

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left( \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta) \delta(x - r^\beta - \delta r^\beta) - V^\beta \delta(x - r^\beta)], \psi \right) dt = \\ & = \int_0^T \sum_{\beta=1}^p [(V^\beta + \delta V^\beta) \psi(r^\beta + \delta r^\beta) - V^\beta \psi(r^\beta)] dt = \\ & = \int_0^T \sum_{\beta=1}^p [V^\beta (\psi(r^\beta + \delta r^\beta) - \psi(r^\beta)) + \delta V^\beta \psi(r^\beta + \delta r^\beta)] dt = \\ & = \int_0^T \sum_{\beta=1}^p \left[ V^\beta \left( \frac{(\psi(r_1^\beta + \delta r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta) - \psi(r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta))}{\delta r_1^\beta} \delta r_1^\beta - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{(\psi(r_1^\beta, r_2^\beta + \delta r_2^\beta) - \psi(r_1^\beta, r_2^\beta))}{\delta r_2^\beta} \delta r_2^\beta + \delta V^\beta \psi(r^\beta + \delta r^\beta) \right) \right] dt \end{aligned} \quad (1.52)$$

Задачу (1.42), (1.43) поставлено коректно, отже, з (1.5) випливає, що  $\|\delta u\| \leq \text{const}_1 \|\delta V\|_p$  та  $\|\delta u\| \leq \text{const}_2 \|\delta r\|_p$ . Тоді з (1.44) та (1.50)-(1.52) для задачі (1.42)-(1.43), отримаємо вираз для градієнта функціоналу (1.39)

$$\text{grad } \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}(V, r) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial V} \\ \frac{\partial \mathcal{I}_{\alpha,\gamma}}{\partial r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Psi(r, t) + 2\alpha V \\ \text{grad} \Psi(r, t) V + 2\gamma r \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

де  $\Psi(r, t)$  визначається за розв'язком задачі (1.49), (1.51).

**Теорему доведено.**

Маємо необхідну і достатню умову (1.41) мінімуму функціоналу (1.39) у вигляді двох рівнянь у векторній формі

$$\begin{cases} \Psi(r, t) + 2\alpha V(t) = 0, \\ \frac{\partial \Psi}{\partial r}(r, t) V(t) + 2\gamma r = 0 \end{cases} \quad (1.54)$$

або системи  $2p$  скалярних рівнянь

$$\begin{cases} \psi(r^\beta, t) + 2\alpha V^\beta(t) = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial r}(r^\beta, t) V^\beta(t) + 2\gamma r^\beta = 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (1.55)$$

Резюмуючи викладене, запишемо ітераційний алгоритм визначення потужностей  $V^\beta$  та координат  $r^\beta$ . Як і в попередньому алгоритмі, при переході з  $k$  ітерації на  $(k+1)$ :

1. Розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} + \mathcal{C}u^k + \mathcal{D}u^k + au^k = \sum_{\beta=1}^p V^{\beta,k} \delta(x - r^{\beta,k}), \quad 0 < t \leq T; \quad (1.56)$$

$$u^k(0) = 0. \quad (1.57)$$

2. Знаходиться спряжений стан, що відповідає  $(V^*, r^*)$

$$-\frac{d\psi^k}{dt} - \mathcal{C}\psi^k + \mathcal{D}\psi^k + a\psi^k = 2\chi(u^k - \varphi(t)), \quad T > t \geq 0 \quad (1.58)$$

$$\psi^k(T) = 0. \quad (1.59)$$

3. Визначаються нові наближення для координат  $r$  та потужностей  $V$  джерел

$$\begin{aligned} \frac{V^{\beta,k+1} - V^{\beta,k}}{s_{k+1}} + \Psi^k(r^{\beta,k}) + 2\alpha V^{\beta,k} &= 0, \\ \frac{r^{\beta,k+1} - r^{\beta,k}}{\sigma_{k+1}} + \frac{\partial \Psi^k(r^{\beta,k})}{\partial r} V^{\beta,k} + 2\gamma r^{\beta,k} &= 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Тут  $s_{k+1}$  та  $\sigma_{k+1}$  – крокові множники, що обираються з умов  $\sum_{k=1}^{\infty} s_k = +\infty$ ,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sigma_k = +\infty, \quad s_k \rightarrow 0, \quad \sigma_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty;$$

4. Обчислюємо значення  $\mathcal{I}_\alpha(V^{k+1})$  за формулою (1.39) та при умові  $|\mathcal{I}_\alpha(V^{k+1})| < \varepsilon$  зупиняємося  $-(V^{k+1}, r^{k+1})$  – шуканий розв'язок, інакше переходимо на крок 1.

### 1.3. Моделювання процесу проявлення прихованого голографічного зображення на термопластичних носіях

Найбільш абстрактною у даній роботі є модель, що описує процес проявлення прихованого голографічного зображення. Вона описується нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса [122]. У фізичних змінних “швидкість–тиск та температура” маємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu(T) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial v}{\partial y} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (1.61)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu(T) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.62)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (x, y) \in \Omega_1 = \{0 \leq x \leq a = \pi d, 0 \leq y \leq d\}, t > 0. \quad (1.63)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c} \Delta T + \nu(T) \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \nu(T) \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + f(x, y, t), \quad (1.64)$$

$$(x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad \Omega_2 = \{0 \leq x \leq a = \pi d, d \leq y \leq d_1 = d + l\}, t > 0$$

при початкових

$$u|_{t=0} = u^0(x, y); \quad v|_{t=0} = v^0(x, y); \quad p|_{t=0} = p^0(x, y); \quad T|_{t=0} = T^0(x, y). \quad (1.65)$$

та граничних умовах

$$u|_{x=0} = u|_{x=a}; \quad v|_{x=0} = v|_{x=a}; \quad p|_{x=0} = p|_{x=a}; \quad (1.66)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=a}; \quad \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{x=a}; \quad \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{x=a}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=a}; \quad (1.67)$$

$$u|_{y=d} = u^{(d)}(x, t); \quad v|_{y=d} = v^{(d)}(x, t); \quad \frac{\partial p}{\partial y} \Big|_{y=d} = p^{(d)}(x, t); \quad (1.68)$$

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Big|_{y=0} = p^{(\tau)}(x, t); \quad (1.69)$$

$$\left( -p + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} - \alpha \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) \Big|_{y=0} = p^{(n)}(x, t), \quad (1.70)$$

$$T|_{y=d_1} = T^{(d_1)}(x, t); \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} = K(T - T^{(0)}(x, t)) \quad (1.71)$$

Тут невідомими функціями є компоненти вектора швидкості рідини  $u(x, y, t)$ ,  $v(x, y, t)$  та гідродинамічний тиск  $p(x, y, t)$ . Заданими величинами є  $\rho$  – густина середовища;  $c$  – питома теплоємність;  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності;  $K = H / \lambda$ ,  $H$  – коефіцієнт теплообміну вільної поверхні з зовнішнім середовищем;  $T^{(0)}$  – температура зовнішнього середовища, яка є початковим розподілом температури рідини;  $\alpha$  – коефіцієнт поверхневого натягу;  $\nu = \mu / \rho$  – коефіцієнт кінематичної в'язкості, де  $\mu = \mu(T)$  – коефіцієнт динамічної в'язкості, який істотно залежить від температури, в даній моделі вона взята у вигляді функції з активаційним характером [122]

$$\mu = \mu_0 \exp(\varepsilon / (K_B T)), \quad (1.72)$$

де  $\mu_0$  не залежить від  $T$ ,  $K_B = 1,380\ 6504(24) \times 10^{-23}$  Дж·К<sup>-1</sup> – стала Больцмана,  $\varepsilon \in (1eV, 2.8eV)$  – енергія активації.  $1eV = 1.6 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $\eta_0(x)$  – початковий геометричний рельєф вільної поверхні;  $p^{(n)}(x, t)$ ,  $p^{(\tau)}(x, t)$  – нормальна і тангенціальна складові сил прихованого зображення.

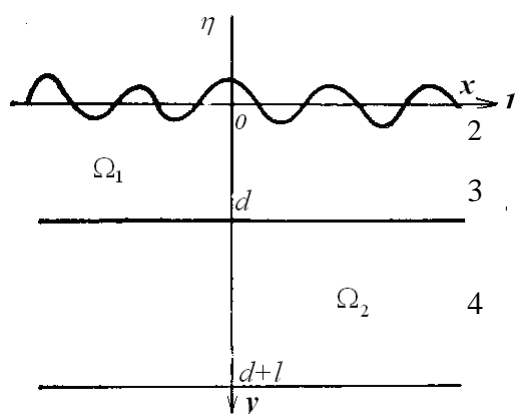
Граничні умови (1.69)-(1.70) відповідають моделі утворення голографічного рельєфу під дією зовнішніх поверхневих сил.

У процесі моделювання потрібно визначити параметри середовища  $\nu(T)$ ,  $\lambda$ , зовнішні параметри  $T^{(0)}$ ,  $T^{(d_1)}$  і потужність джерела  $Q$  (або значення функції  $f$ ) так, щоб при усталенні чи в момент часу  $t^*$

$$J = \int_0^a \left[ \int_0^{t^*} v(x, 0, \tau) d\tau - \eta^*(x) \right]^2 dx \rightarrow \min, \quad (1.73)$$

де  $\eta^*(x)$  – задана функція, а час оптимального проявлення  $t^*$  визначається з умов, що в момент  $t^*$  утворюється максимальна амплітуда рельєфу поверхні. Тобто,

$$t^* = \underset{t > 0}{\text{Arg max}} \{M(t) - m(t)\}, \quad \text{де } M(t) = \max_{x \in [0, \alpha]} \eta(x, t); \quad m(t) = \min_{x \in [0, \alpha]} \eta(x, t).$$



Така постановка задачі пов'язана з актуальною проблемою сучасної технології реєстрації зображення та візуалізації інформації з використанням тонких плівок полімерних напівпровідників.

При такому методі реєстрації інформація записується модульованим за інтенсивністю

**Рис.1.1** Зображення фізичної області електронним чи світловим пучком на поверхні ТПС 2 (рис.1.1, [122]), покритій тонким шаром чутливого до інтенсивності опромінювання діелектрика 1. Це зумовлює зміну щільності поверхневого заряду, а, отже, і величини коефіцієнта поверхневого натягу, і створює зовнішню силу, яка фіксує приховане оптичне зображення у вигляді потенціального рельєфу.

Експериментально встановлено, що в даному випадку розм'якшене ТПС можна розглядати як нестислу теплопровідну в'язку ньютонівську рідину [ ].

При візуалізації зображення реєструюче середовище 2 нагрівається до температури тікучості ( $\mu(T) < \mu_{\max}$  при  $T > T_{\min}$ ) за допомогою імпульсу струму, пропущеного через струмопровідну плівку 3, розташовану між ТПС шаром 2 і жорсткою підкладкою 4. Звільнені при цьому поверхневі сили обумовлюють рух речовини і викликають деформацію його поверхні, яка відтворює зображення. Існують значення  $\mu_{\min}$  і  $T_{\max}$  такі, що при  $\mu(T) \leq \mu_{\min}$  (при  $T > T_{\max}$ ) гідродинамічна система не може утримати рельєф поверхні і він під дією гравітаційних та електростатичних сил згладжується (стирається).

Найбільшу складність при побудові та дослідженні чисельної дискретизації цієї моделі викликають нелінійні доданки, де фігурують похідні в'язкості та нелінійні конвективні доданки в рівняннях (1.61) та (1.62). Разом з тим ця ситуація є типовою для основної частини математичних моделей, які описують динаміку рідини, газу та інших фізичних процесів. Часто апроксимації перших просторових похідних можуть бути причиною нестійкості, осциляцій у результатах обчислень наближеного розв'язку. Тому у розділі 2 параграфи 1 та 2 присвячено саме побудові та дослідженню двокрокового симетризованого різницевого алгоритму для

гіперболічного рівняння першого порядку. Значну складність при апроксимації створюють також умови (1.69) та (1.70), для дослідження апроксимації яких у роботі застосовано експериментальний підхід.

#### **1.4. Висновки**

- Для задач ідентифікації запропоновано методичку, що дозволяє для двох різних за сутністю задач побудувати однотипні алгоритми знаходження розв'язку;
- доведено теорему, що встановлює диференціальні властивості критерію якості у випадку невідомих координат;
- побудовано алгоритми ідентифікації точкових джерел.

## РОЗДІЛ 2

### ДС-АЛГОРИТМИ ДЛЯ МОДЕЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРЕНОСУ

Для чисельного моделювання нестационарних процесів тепло- та масо-переносу до теперішнього часу використовують здебільше або методи скінченних елементів (МСЕ) [70,113] або методи скінченних різниць (МСР) [81, 121]. Перевага МСР над МСЕ полягає в універсальності застосування, а також у легкості програмування на ЕОМ. МСР поділяються на явні та неявні. Неявні різницеві схеми є абсолютно стійкими або мають великий запас стійкості, що послабляє обмеження на вибір дискретної сітки. Але при використанні неявних різницевих схем необхідно розв'язувати на кожному часовому кроці систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), що вимагає суттєвих обчислювальних ресурсів. Запас стійкості явних різницевих схем суттєво менший, але при цьому не треба розв'язувати СЛАР. Тому проблема побудови ефективних різницевих схем з великим запасом стійкості, які б одночасно влаштовували з точки зору обчислювальних затрат, залишається актуальною.

ДС-алгоритм, який, з одного боку абсолютно стійкий, а з іншого боку не вимагає розв'язування СЛАР на кожному часовому кроці, розглядається в даному розділі для найбільш типових класів рівнянь теорії масопереносу. У роботі, зокрема, досліджено локальну стійкість, дисипативність, встановлено порядок апроксимації ДС-алгоритму для гіперболічних рівнянь 1-го порядку із змінними коефіцієнтами та ДС-алгоритму із штучною в'язкістю, а також ДС-алгоритму для деяких нелінійних рівнянь та рівнянь із комплексною змінною на прикладі тривимірного рівняння типу Шредінгера.

Ідею двокрокового явно-неявного чисельного методу ще в 1962 році запропонував Шелдон для ітераційного розв'язування рівняння Пуассона. Саульєв [123] запропонував різницеву схему, де комбінуються явні та неявні різницеві схеми на сусідніх часових шарах. Скала і Гордон використали цю ідею у 1966-67 роках для рівнянь, що описують рух стислої рідини. Гурлі у 1970 р. узагальнив її для рівнянь багатомірних течій та застосував схему для нестационарного рівняння

теплопровідності, еліптичних рівнянь. Грищенко О.Ю. поширив її для систем гіперболічних рівнянь, лінійних та нелінійних рівнянь переносу та систем рівнянь газової динаміки [122]. Для рівнянь параболічного типу Самарський та Гулін [124,125] поставили проблему та отримали ґрунтовні результати про необхідні та достатні умови стійкості симетризованих різницевих схем, що не є самоспряженими, але приводяться до схем із симетричними операторами, зокрема, вибором спеціальних норм. Вчені показали, що до такого класу відносяться схеми із змінними ваговими множниками [126-129].

## 2.1. ДС-алгоритми для лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами

У даному параграфі проводиться дослідження різних типів ДС-алгоритмів (із центральними різницями, різницями проти потоку тощо), вивчено питання дисипативності, стійкості, транспортивності для однорідних гіперболічних рівнянь, обґрунтовано використання в ДС-алгоритмі штучної в'язкості. Також наведено результати ряду обчислювальних експериментів на тестових задачах для перевірки ДС-алгоритмів, порівняння їх між собою та з іншими чисельними алгоритмами.

### 2.1.1. Загальна схема побудови ДС-алгоритмів

Нехай маємо рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \text{ на } \Omega \subseteq \mathbb{R}^p, \quad t > t_0 \in \mathbb{R}^+, \quad (2.1)$$

де  $L$  - диференціальний оператор за просторовими змінними 1-го або 2-го порядку без мішаних похідних,  $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ . Тут  $\Omega$  -  $p$ -мірний паралелепіпед.

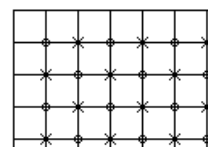
Позначимо  $Q = \Omega \times \{t \in \mathbb{R} \mid t > t_0 \in \mathbb{R}^+\}$ . Область  $Q$  покриваємо сіткою

$$\Omega_{h\tau} = \{x_{i_s}, t_n \mid x_{i_s} = i_s h_s, i_s = \overline{1, M_s}; h_s = 1/M_s; s = \overline{1, p}; t_n = n\tau, \tau > 0, n = 0, 1, 2, \dots\},$$

розбиваємо на дві підобласті (див. рис.1 для  $\Omega \in \mathbb{R}^2$ ):

$$\Omega_{h\tau}^{(1)} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}; t_n) \mid i_1 + \dots + i_p + n - \text{парне}\} \text{ та}$$

$$\Omega_{h\tau}^{(2)} = \{(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_p}; t_n) \mid i_1 + \dots + i_p + n - \text{непарне}\},$$



тобто, до  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  відносимо точки, для яких сума індексів – парне число, а до  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  – точки, для яких сума індексів – непарне число.

*Рис. 2.1*  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  та  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  для  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ .

Алгоритм полягає в наступному.

Для знаходження значень на непарному  $(2m+1)$ -му часовому кроці спочатку обчислюємо значення розв'язку у всіх вузлах множини  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  за явною схемою

$$u_{ij}^{2m+1} = u_{ij}^{2m} + \tau L_h u_{ij}^{2m}. \quad (2.2)$$

Далі, використовуючи отримані значення, знаходимо явно значення розв'язку у вузлах множини  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  за формально неявною схемою

$$u_{ij}^{2m+1} = u_{ij}^{2m} + \tau(-\sigma L_h u_{ij}^{2m} + (1 + \sigma)L_h^* u_{ij}^{2m+1}). \quad (2.3)$$

На  $(2m+2)$ -му кроці спочатку знаходимо значення  $u$  в вузлах  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  за явною схемою (2.2), а потім – значення в вузлах  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  за неявною схемою (2.3).

Тут  $h$  – крок просторової сітки,  $\tau$  – часовий крок,

$L_h$  та  $L_h^*$  – різницеві аналоги оператора  $L$ , можливі варіанти яких представлені нижче;  $\sigma \geq 0$  – ваговий параметр алгоритму.

Отже, у випадку, коли оператор  $L$  – лінійний, при застосуванні неявних схем не виникає проблеми розв'язання систем різницевих рівнянь. Якщо ж оператор  $L$  – нелінійний, то замість системи з  $N^2$  нелінійних рівнянь з  $N^2$  невідомими у випадку  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  потрібно розв'язати лише  $[N/2]$  не пов'язаних між собою нелінійних рівнянь, де  $N$  – кількість вузлів за просторовою змінною.

Зупинимося спочатку на гіперболічних рівняннях

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k(x,t) \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x \in [0,1], t > t_0 \in \mathbb{R}^+ \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(k(x,t)u), \quad (2.5)$$

для яких розглянемо такі типи ДС-схем:

1. Схеми із центральними різницями (симетричними операторами – СО)

$$L_h u_i^m = -k_i^m \frac{u_{i+1}^m - u_{i-1}^m}{2h} \equiv L_h^* \text{ - для рівняння (2.4),}$$

$$L_h u_i^m = -\frac{k_{i+1}^m u_{i+1}^m - k_{i-1}^m u_{i-1}^m}{2h} \equiv L_h^* \text{ - для рівняння (2.5);}$$

## 2. Схеми з різницями проти потоку (ОПП)

$$L_h u_i^m = \begin{cases} -k_i^m \frac{u_{i+1}^m - u_i^m}{h}, & \text{якщо } k < 0, \\ -k_i^m \frac{u_i^m - u_{i-1}^m}{h}, & \text{якщо } k > 0 \end{cases} \equiv L_h^* \text{ - для рівняння (2.4);}$$

та

$$L_h u_i^m = \begin{cases} -\frac{k_{i+1}^m u_{i+1}^m - k_i^m u_i^m}{h}, & \text{якщо } k < 0, \\ -\frac{k_i^m u_i^m - k_{i-1}^m u_{i-1}^m}{h}, & \text{якщо } k > 0 \end{cases} \equiv L_h^* \text{ - для рівняння (2.5);}$$

3. ДС-метод, у якому  $L_h$  - оператор проти потоку, а  $L_h^*$  - оператор з різницями за потоком.

Відносно цих схем доведено такі твердження [122]:

**Теорема.** Якщо величина  $\tau$  стала або змінюється не частіше, ніж через парне число кроків, а початкова функція  $u(x, 0) = \varphi(x)$  може бути розвинена в абсолютно збіжний ряд Фур'є і  $u_i^0 = \varphi(ih) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{lih^m}$ ,  $I = \sqrt{-1}$ , то при  $\sigma = 0$  ДС-алгоритм із центральними різницями (СО) безумовно стійкий за початковими даними, а при  $\sigma > 0$  - умовно стійкий при  $\tau \leq \frac{h\sqrt{2}}{|k|\sigma}$ .

**Теорема.** ДС-алгоритм (2.2),(2.3) з центральними різницями при  $\sigma = 0$  має порядок апроксимації  $O(\tau + h^2)$ , дисперсійний і бездисипативний, а при  $\sigma > 0$  він дисипативний і має похибку апроксимації  $O(\tau + h^2)$ .

Аналогічні результати мають місце й для ДС-алгоритмів з різницями проти потоку.

**Теорема 2.1.** ДС-алгоритм (2.2),(2.3) з різницями проти потоку дисипативний і бездисперсійний і має похибку апроксимації  $O(\tau^2 + h)$  при  $\sigma = 0$  та  $O(\tau + h)$  при  $\sigma > 0$ .

**Доведення.** Нехай  $k > 0$ , тоді маємо (2.2), (2.3) з лівосторонніми різницями

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - \frac{\tau k}{h} (u_i^{2n} - u_{i-1}^{2n}) \quad (2.7)$$

на множині  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$ ,

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \frac{\tau k}{h} \left( \sigma (u_i^{2n} - u_{i-1}^{2n}) - (1 + \sigma) (u_i^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}) \right) \quad (2.8)$$

на множині  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$ ,

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} - \frac{\tau k}{h} (u_i^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}) \quad (2.9)$$

на множині  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$ ,

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \frac{\tau k}{h} \left( \sigma (u_i^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}) - (1 + \sigma) (u_i^{2n+2} - u_{i-1}^{2n+2}) \right) \quad (2.10)$$

на множині  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$ .

Розглянемо точки множини  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$ : складемо (2.7) та (2.10). Отримаємо

$$u_i^{2n+2} - u_i^{2n} = -\frac{\tau k}{h} (u_i^{2n} - u_{i-1}^{2n}) + \frac{\tau k}{h} \sigma (u_i^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}) - \frac{\tau k}{h} (1 + \sigma) (u_i^{2n+2} - u_{i-1}^{2n+2}). \quad (2.11)$$

Розкладаємо  $u$  в ряд Тейлора у точці  $(x_i, t_{2n+2})$ , в результаті отримаємо

$$u'_t + ku'_x = \tau u''_{t^2} + \frac{kh}{2} u''_{x^2} + k\tau \left(1 - \frac{\sigma}{2}\right) u''_{xt}.$$

Оскільки  $u''_{t^2} = k^2 u''_{x^2}$ ;  $u''_{xt} = -k u''_{x^2}$ , то

$$u'_t + ku'_x = \tau k^2 u''_{x^2} + \frac{kh}{2} u''_{x^2} + \tau k^2 \left(\frac{\sigma}{2} - 1\right) u''_{x^2}$$

або

$$u'_t + ku'_x = \left\{ \frac{\sigma \tau k^2}{2} + \frac{kh}{2} \right\} u''_{x^2} + O(\tau^2 + h^2 + h\tau).$$

Аналогічно для пари (2.8), (2.9), отримаємо

$$(u'_t + ku'_x)|_i^{2n+2} = \left\{ \frac{\sigma \tau k^2}{2} + \frac{kh}{2} \right\} u''_{x^2} + O(\tau^2 + h^2 + h\tau)$$

Легко бачити, що при  $k < 0$  отримаємо

$$(u'_i + ku')|_i^{2n+2} = \left\{ \frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{kh}{2} \right\} u''_{x^2} + O(\tau^2 + h^2 + h\tau).$$

З вигляду наведених коефіцієнтів випливає твердження теореми.

**Теорему доведено.**

**Теорема 2.2.** ДС-алгоритми (2.2),(2.3) для рівнянь (2.4) та (2.5) з різницевиими операторами (СО) та (ОПП) дисипативні та дисперсійні.

**Доведення.** Аналогічно доведенню теореми 2.1. Використовуючи метод першого диференціального наближення [87], легко отримати коефіцієнти при  $u''_{x^2}$  у вузлах  $(x_i, t_{2n+2})$ . Одержані результати наведено у таблиці 1, з якої випливає дисипативність розглянутих схем.

При  $k = k(x, t) \neq const$  перше диференціальне наближення для усіх розглянутих схем містить ненульові доданки з непарними похідними функції  $u$  за  $x$ , а, отже, схеми дисперсійні.

**Теорему доведено.**

Таблиця 1. Коефіцієнти при  $u''_{xx}$  для алгоритмів (2.2)-(2.3).

	Недивергентна форма (2.4)		Дивергентна форма (2.5)	
	$\Omega_{h\tau}^{(1)}$	$\Omega_{h\tau}^{(2)}$	$\Omega_{h\tau}^{(1)}$	$\Omega_{h\tau}^{(2)}$
центральна-різницева схема	$\frac{\sigma\tau k^2}{2} + (1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - kk'_x)$	$\frac{\sigma\tau k^2}{2} - (\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - kk'_x)$	$\frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} + (1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - 2kk'_x)$	$\frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} - (\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - 2kk'_x)$
схема з лівосторонніми похідними ( $k > 0$ )	$\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} + (1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - kk'_x) - (\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 2kk'_x)$	$\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} - (\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - kk'_x) - (\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 2kk'_x)$	$\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} + (1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - 2kk'_x) - (\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 5kk'_x)$	$\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} - (\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - 2kk'_x) - (\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 5kk'_x)$
схема з правосторонніми похідними ( $k < 0$ )	$-\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} + (1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - kk'_x) + (\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 2kk'_x)$	$-\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} - (\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - kk'_x) + (\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 2kk'_x)$	$-\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} + (1 - \frac{3\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - 2kk'_x) + (\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 5kk'_x)$	$-\frac{hk}{2} + \frac{\sigma\tau k^2}{2} - \frac{h^2 k'_x}{2} - (\frac{1}{2} + \frac{9\sigma}{4})\tau^2 k(k'_i - 2kk'_x) + (\frac{1}{2} - \frac{\sigma}{4})h\tau(k'_i - 5kk'_x)$

**Зауваження 1.** Враховуючи те, що в коефіцієнтах при  $u''_{xx}$  головні доданки за  $h, \tau$  невід'ємні при  $\sigma \geq 0$ , а також враховуючи початкові обмеження на знак функції  $k(x, t)$  (знакосталість для схем з односторонніми похідними), робимо висновок, що необхідна умова стійкості (невід'ємність коефіцієнту при  $u''_{xx}$ ) для усіх розглянутих схем виконується при достатньо малих значеннях кроків  $h, \tau$ .

У коефіцієнтах при  $u''_{xx}$  похідні функції  $k(x, t)$  присутні лише у доданках другого та вищих порядків за степенями кроків  $h, \tau$  а, отже, вони не впливають істотно на знак коефіцієнту при  $u''_{xx}$  у порівнянні з доданками із  $h, \tau$  у першій степені.

**Зауваження 2.** Підвищення порядку апроксимації ДС-алгоритму із центральними різницями може привести до втрати його дисипативності й звузити межі його застосування. Вибір параметру  $\sigma$  дає змогу знаходити компроміс між порядком апроксимації та дисипативністю. Так, для одержання дисперсійного алгоритму з порядком апроксимації, близьким до другого, й необтяжливою умовою стійкості параметр  $\sigma$  слід вибирати близьким до нуля, але відмінним від нього.

Проте в ряді випадків подолати дисперсійні ефекти, викликані потужними збуреннями, тільки за допомогою введення параметру  $\sigma$  не вдається. Для їх подолання в ДС-алгоритми вводять штучну в'язкість, що буде зроблено у п. 2.2.

### 2.1.2. Побудова та аналіз граничних умов для ДС-алгоритмів

У області  $Q = \{(x, t) | 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$  розглянемо дві початково-крайові одновимірні задачі:

1) рівняння (2.4) у не дивергентній формі при початковій

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (2.12)$$

та граничній

$$\begin{cases} u(0, t) = \psi(t), & \text{якщо } k > 0, \\ u(1, t) = \psi(t), & \text{якщо } k < 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

умовах;

2) рівняння (2.5) у дивергентній формі з початковою (2.12) та граничною (2.13) умовами.

Нагадаємо, що в області  $Q$  введено сіткову множину  $\Omega_{h\tau} = \{(x_i, t_n) | x_i = ih, t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots; h = 1/M\}$ , розбиту на дві підмножини:  $\Omega_{h\tau}^{(1)} = \{(x_i, t_n) | (i+n) - \text{непарне}\}$  та  $\Omega_{h\tau}^{(2)} = \{(x_i, t_n) | (i+n) - \text{парне}\}$ . Покладаємо для визначеності  $M$  - парне.

При чисельному розв'язанні крайових задач для диференціальних рівнянь на обмеженій області з використанням різницевих схем з триточковими шаблонами виникає проблема обчислення значень шуканої дискретної функції в граничних та приграничних вузлах. Для знаходження значень функції  $u_i^{2n+1}$  в приграничному  $i = M - 1$  та в граничному  $i = M$  вузлах у загальному випадку (при відсутності періодичності розв'язку на заданому проміжку) потрібно задати додаткові не природні для диференціального рівняння умови. Ці умови повинні

- давати змогу однозначно визначити невідомі значення;
- не змінювати фізичної сутності задачі;
- не погіршувати апроксимацію диференціального рівняння та стійкість алгоритму.

I. Розглянемо ДС-алгоритми для початково-крайової задачі (2.4), (2.12), (2.13).

Нехай граничну умову задано в точці  $x = 0$ . Задамо на сітці початкову

$$u_i^0 = \varphi(ih); i = \overline{0, M}$$

та граничні умови

$$u_0^{2n+1} = \psi((2n+1)\tau); u_0^{2n+2} = \psi((2n+2)\tau), n = 0, 1, 2, \dots$$

Для знаходження розв'язку у внутрішніх вузлах використовуємо схеми з центральними різницями

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - \frac{\tau}{2h} k_i^{2n} (u_{i+1}^{2n} - u_{i-1}^{2n}), (x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(1)} \quad i = 2, 4, \dots, M - 2, \quad (2.15a)$$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \frac{\tau}{2h} (\sigma k_i^{2n} (u_{i+1}^{2n} - u_{i-1}^{2n}) - (1 + \sigma) k_i^{2n+1} (u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1})),$$

$$(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(2)}, i = 1, 3, \dots, M - 3, \quad (2.16a)$$

де  $\sigma \geq 0$ - ваговий коефіцієнт.

А для знаходження  $u_M^{2n+1}$  і  $u_{M-1}^{2n+1}$  побудуємо допоміжну систему

$$\begin{cases} \frac{u_M^{2n+1} - u_M^{2n}}{\tau} = \sigma_1 k_M^{2n} \frac{3u_M^{2n} - 4u_{M-1}^{2n} + u_{M-2}^{2n}}{2h} - (1 + \sigma_1) k_M^{2n+1} \frac{3u_M^{2n+1} - 4u_{M-1}^{2n+1} + u_{M-2}^{2n+1}}{2h}, \\ \frac{u_{M-1}^{2n+1} - u_{M-1}^{2n}}{\tau} = \sigma_2 k_{M-1}^{2n} \frac{u_M^{2n} - u_{M-2}^{2n}}{2h} - (1 + \sigma_2) k_{M-1}^{2n+1} \frac{u_M^{2n+1} - u_{M-2}^{2n+1}}{2h}, \end{cases} \quad (2.19)$$

у якій перше рівняння є апроксимацією диференціального рівняння (2.4) з похибкою  $O(\tau + h^2)$  у правій граничній точці  $i = M$ , а друге – це рівняння (2.16а) при  $i = M - 1$ . Ця система має трикутну матрицю з ненульовими діагональними елементами, отже, розв'язок її існує і єдиний. Оскільки в точці  $(x_M, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(1)}$  записано явну схему, а в точці  $(x_{M-1}, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(2)}$  – неявну, то загальна схема чергування явних і неявних різницевоїх схем в алгоритмі не порушено.

Як і раніше, значення функції  $u_i^{2n+1}$  ( $i = \overline{0, M}$ ) приймаємо за допоміжні значення, а значення розв'язку в точках множини  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  обчислюємо за явною схемою

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} - \frac{\tau}{2h} k_i^{2n+1} (u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}), \quad i = 1, 3, \dots, M - 1. \quad (2.17a)$$

Після чого значення розв'язку в точках множини  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  явно визначаються з формально неявної схеми

$$\begin{aligned} u_i^{2n+2} &= u_i^{2n+1} + \frac{\tau}{2h} (\sigma k_i^{2n+1} (u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}) - (1 + \sigma) k_i^{2n+2} (u_{i+1}^{2n+2} - u_{i-1}^{2n+2})), \\ &i = 2, 4, \dots, M - 2. \end{aligned} \quad (2.18a)$$

Для знаходження граничного значення  $u_M^{2n+2}$  як допоміжну граничну умову використовуємо різницевий аналог (за неявною схемою) рівняння (2.11) в крайній правій точці з лівосторонніми різницевими похідними другого порядку апроксимації

$$\begin{aligned} \frac{u_M^{2n+2} - u_M^{2n+1}}{\tau} &= -(1 + \sigma_3) k_M^{2n+2} \frac{3u_M^{2n+2} - 4u_{M-1}^{2n+2} + u_{M-2}^{2n+2}}{2h} + \\ &+ \sigma_3 k_M^{2n+1} \frac{3u_M^{2n+1} - 4u_{M-1}^{2n+1} + u_{M-2}^{2n+1}}{2h}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

З урахуванням граничних умов схеми ДС-алгоритму з односторонніми різницями проти потоку мають вигляд

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau Lu_i^{2n}, \quad i = l, (l+2), \dots, M-2+l, \quad (x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(1)}, \quad (2.156)$$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau(-\sigma Lu_i^{2n} + (1+\sigma)Lu_i^{2n+1}), \quad i = 1, 3, \dots, M-1, \quad (x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(2)}, \quad (2.166)$$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau Lu_i^{2n+1}, \quad i = 1, 3, \dots, M-1, \quad (x_i, t_{2n+2}) \in \Omega_{h\tau}^{(1)}, \quad (2.176)$$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau(-\sigma Lu_i^{2n+1} + (1+\sigma)Lu_i^{2n+2}), \quad i = l, (l+2), \dots, M-2+l, \quad (2.186)$$

$$(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega_{h\tau}^{(2)},$$

$$\text{де } Lu_i^n = \begin{cases} -k_i^n \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h}, & k > 0; \\ -k_i^n \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h}, & k < 0; \end{cases}, \quad l = \begin{cases} 0, & k > 0; \\ 2, & k < 0. \end{cases}$$

II. Розглянемо ДС-алгоритми для початково-крайової задачі (2.5), (2.12), (2.13). Нехай граничну умову задано в точці  $x = 0$ .

Задамо на сітці початкову

$$u_i^0 = \varphi(ih); \quad i = \overline{0, M}$$

та граничні умови

$$u_0^{2n+1} = \psi((2n+1)\tau), \quad u_0^{2n+2} = \psi((2n+2)\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Для знаходження розв'язку у внутрішніх вузлах використаємо різницеві схеми:

для  $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} - \tau(k_{i+1}^{2n} u_{i+1}^{2n} - k_{i-1}^{2n} u_{i-1}^{2n}) / (2h), \quad i = 2, 4, \dots, M-2, \quad (2.21a)$$

для  $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(2)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau(\sigma(k_{i+1}^{2n} u_{i+1}^{2n} - k_{i-1}^{2n} u_{i-1}^{2n}) - (1+\sigma)(k_{i+1}^{2n+1} u_{i+1}^{2n+1} - k_{i-1}^{2n+1} u_{i-1}^{2n+1})) / (2h),$$

$$i = 1, 3, \dots, M-3, \quad (2.22a)$$

для  $(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega_{h\tau}^{(1)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} - \tau(k_{i+1}^{2n+1} u_{i+1}^{2n+1} - k_{i-1}^{2n+1} u_{i-1}^{2n+1}) / (2h), \quad i = 1, 3, \dots, M-1, \quad (2.23a)$$

для  $(x_i, t_{2n+2}) \in \Omega_{h\tau}^{(2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau(\sigma(k_{i+1}^{2n+1}u_{i+1}^{2n+1} - k_{i-1}^{2n+1}u_{i-1}^{2n+1}) - (1 + \sigma)(k_{i+1}^{2n+2}u_{i+1}^{2n+2} - k_{i-1}^{2n+2}u_{i-1}^{2n+2})) / (2h), \quad i = 2, 4, \dots, M - 2. \quad (2.24a)$$

Невідомі  $u_M^{2n+1}$  та  $u_{M-1}^{2n+1}$  знаходимо із системи

$$\begin{cases} \frac{u_M^{2n+1} - u_M^{2n}}{\tau} = \sigma_1 \frac{3k_M^{2n}u_M^{2n} - 4k_{M-1}^{2n}u_{M-1}^{2n} + k_{M-2}^{2n}u_{M-2}^{2n}}{2h} - \\ \quad - (1 + \sigma_1) \frac{3k_M^{2n+1}u_M^{2n+1} - 4k_{M-1}^{2n+1}u_{M-1}^{2n+1} + k_{M-2}^{2n+1}u_{M-2}^{2n+1}}{2h}, \\ \frac{u_{M-1}^{2n+1} - u_{M-1}^{2n}}{\tau} = \sigma_2 \frac{k_M^{2n}u_M^{2n} - k_{M-2}^{2n}u_{M-2}^{2n}}{2h} - (1 + \sigma_2) \frac{k_M^{2n+1}u_M^{2n+1} - k_{M-2}^{2n+1}u_{M-2}^{2n+1}}{2h}, \end{cases} \quad (2.25)$$

а  $u_M^{2n+2}$  – з умови

$$\begin{aligned} \frac{u_M^{2n+2} - u_M^{2n+1}}{\tau} &= \sigma_3 \frac{3k_M^{2n+1}u_M^{2n+1} - 4k_{M-1}^{2n+1}u_{M-1}^{2n+1} + k_{M-2}^{2n+1}u_{M-2}^{2n+1}}{2h} - \\ &- (1 + \sigma_3) \frac{3k_M^{2n+2}u_M^{2n+2} - 4k_{M-1}^{2n+2}u_{M-1}^{2n+2} + k_{M-2}^{2n+2}u_{M-2}^{2n+2}}{2h}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Далі розглянемо схеми з односторонніми різницями проти потоку для задачі (2.5),(2.12),(2.13).

Для точок  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau Lu_i^{2n}, \quad i = l, (l+2), \dots, M - 2 + l, \quad (2.216)$$

для точок  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau(-\sigma Lu_i^{2n} + (1 + \sigma)Lu_i^{2n+1}), \quad i = 1, 3, \dots, M - 1, \quad (2.226)$$

для точок  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau Lu_i^{2n+1}, \quad i = 1, 3, \dots, M - 1, \quad (2.236)$$

для точок  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$

$$\begin{aligned} u_i^{2n+2} &= u_i^{2n+1} + \tau(-\sigma Lu_i^{2n+1} + (1 + \sigma)Lu_i^{2n+2}), \\ i &= l, (l+2), \dots, M - 2 + l, \end{aligned} \quad (2.246)$$

$$\text{де } Lu_i^n = \begin{cases} -(k_i^n u_i^n - k_{i-1}^n u_{i-1}^n) / h, & k > 0, \\ -(k_{i+1}^n u_{i+1}^n - k_i^n u_i^n) / h, & k < 0, \end{cases} \quad l = \begin{cases} 0, & k > 0, \\ 2, & k < 0. \end{cases}$$

## 2.2. ДС-алгоритми для лінійних рівнянь із керованою штучною в'язкістю

Однією з суттєвих проблем чисельного моделювання процесів динаміки нев'язких газів є подолання дисперсійних осциляцій чисельного розв'язку [83,87]. Серед різницевих схем є класи схем, повністю позбавлених дисипативних властивостей, а також класи, які володіють внутрішніми в'язкісними властивостями. До першого з них відносяться і побудовані в [131] ДС-алгоритми другого порядку апроксимації. До другого відносяться ДС-алгоритми з різницями проти потоку [122]. Внутрішньої схемної в'язкості, яка притаманна цим різницеvim схемам, в ряді випадків недостатньо для подолання дисперсійних ефектів, викликаних потужними збуреннями [131]. Для їх подолання в різницеvі схеми вводять явну штучну в'язкість. Ідею збурення скінченно-різницеvих операторів використовував, наприклад, Самарський [132]. Оскільки штучна в'язкість не властива ні фізичній задачі, ні різницеvій схемі, то її потрібно вводити так, щоб 1) одержана різницеvа схема апроксимувала поставлену задачу; 2) штучна в'язкість як можна менше впливала на характерні властивості розв'язку.

### 2.2.1. ДС-алгоритми із штучною схемною в'язкістю

Для знаходження розв'язку початково-крайової задачі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \text{в } Q = \{(x, t) | 0 < x < 1; t > 0\}, \quad (2.31)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u(0, t) = \phi(t)$$

Нехай сітка  $\Omega_{h\tau} = \Omega_{h\tau}^{(1)} \cup \Omega_{h\tau}^{(2)}$ , де  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  та  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  визначені в параграфі 2.1. На множині  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  задамо сім'ю різницеvих схем

$$u_{2i+l}^{2n+1+l} = u_{2i+l}^{2n+l} + \tau \left( L_{\alpha}^{(1)} u_{2i+l}^{2n+l} + \sigma_1 \nu L^{(2)} u_{2i+l}^{2n+l} \right), \quad \left( i = \overline{1-l, [(M+1-l)/2]-1} \right), \quad (2.32)$$

а на множині  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  –

$$u_{2i+l}^{2n+1+l} = u_{2i+l}^{2n+l} + \tau \left( -\sigma L_{\alpha}^{(1)} u_{2i+l}^{2n+l} + (1 + \sigma) L_{\beta}^{(1)} u_{2i+l}^{2n+l} \right) + \tau \sigma_2 \nu L^{(2)} u_{2i+l}^{2n+l} + \tau \sigma_3 \nu L^{(2)} u_{2i+l}^{2n+l}, \quad \left( i = \overline{0, [(M+l)/2] - (1+l)} \right). \quad (2.33)$$

Тут  $l = 0$  на непарних часових кроках, а  $l = 1$  на парних,  $\alpha = \{0, 1\}$ ,  $\beta = \{-1, 0, 1\}$ .

$L_0^{(1)}u_i^n = -0,5k(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) / h$  – симетричний оператор (СО);

$$L_1^{(1)}u_i^n = \begin{cases} -k(u_i^n - u_{i-1}^n) / h \\ -k(u_{i+1}^n - u_i^n) / h \end{cases} \text{ при } \begin{cases} k > 0, \\ k < 0 \end{cases}$$

– оператор з різницями проти потоку (ОПП);

$$L_{-1}^{(1)}u_i^n = \begin{cases} -k(u_{i+1}^n - u_i^n) / h \\ -k(u_i^n - u_{i-1}^n) / h \end{cases} \text{ при } \begin{cases} k > 0; \\ k < 0, \end{cases}$$

– оператор з різницями за потоком (ОЗП);  $\sigma \in [0,1]$ ;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \geq 0$ ;

$L^{(2)}u_i^n = (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) / h^2$ ;  $\nu$  – коефіцієнт штучної в'язкості.

Розв'язок задачі знаходимо, послідовно використовуючи спочатку при  $l=0$  явне різницеве рівняння (2.32) в усіх точках множини  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$ , а потім неявне (2.33) в усіх точках множини  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$ , і повторюємо розрахунки в тій же послідовності при  $l=1$  ( $n=1,2,\dots$ ). За розв'язок задачі приймаємо значення функції, знайдені на парних часових кроках. Основні та додаткові граничні умови запишемо за схемою, розглянутою в п.2.1.

**Теорема 2.3.** Двокрокові алгоритми (2.32),(2.33) дисипативні

1) СО ( $\alpha=0, \beta=0$ ), якщо  $(\sigma + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \neq 0$ ,  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \geq 0$ ;

2) ОПП ( $\alpha=1, \beta=1$ ) при  $\sigma\tau k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\nu > -\sigma h |k|$ ;

3) з різницями проти потоку в явних частинах та за потоком - в неявних частинах ( $\alpha=1, \beta=-1$ ) за умовою  $\sigma\tau k^2 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\nu > \sigma h |k|$ .

**Доведення.** Оскільки дисипативність алгоритму визначається значенням коефіцієнту при  $u''_{xx}$ , то оцінимо похибки апроксимації алгоритмів і за допомогою методу першого диференціального наближення визначимо коефіцієнти при другій просторовій похідній.

Проводячи міркування аналогічні тим, які детальніше викладено в п.2.1, для алгоритмів (2.32), (2.33) з операторами СО ( $\alpha=0, \beta=0$ ), одержимо

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^{2n+2} = \left\{ \frac{\sigma \tau k^2}{2} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \nu}{2} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}_i^{2n+2} + O(h^2 + \tau^2).$$

Для алгоритмів (2.32), (2.33) з операторами ОПП ( $\alpha = 1, \beta = 1$ ) отримаємо

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^{2n+2} = \left\{ \frac{h|k|}{2} + \frac{\sigma \tau k^2}{2} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \nu}{2} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}_i^{2n+2} + O(h^2 + h\tau + \tau^2).$$

Для алгоритмів (2.32), (2.33) з параметрами  $\alpha = 1, \beta = -1$  маємо

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x}\right)_i^{2n+2} = \left\{ -\frac{\sigma h|k|}{2} + \frac{\sigma \tau k^2}{2} + \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \nu}{2} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}_i^{2n+2} + O(h^2 + h\tau + \tau^2).$$

Твердження теореми випливає з вигляду наведених коефіцієнтів та їх невід'ємності як необхідної умови стійкості.

**Теорему доведено.**

Легко встановити, що похибка апроксимації алгоритмів (2.32), (2.33) для рівняння (2.31) рівна  $O(\tau + h^2)$  при  $\alpha = \beta = 0$  і  $O(\tau + h)$  в інших випадках.

**Зауваження.** Алгоритми (2.32), (2.33) при  $\sigma = \sigma_2 = 0$  і  $\sigma_1 = \sigma_3 = \omega$  апроксимують з похибкою  $O(\tau^2 + h)$  диференціальне рівняння переносу

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} - \omega \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Отже, для збереження першого порядку апроксимації коефіцієнт штучної в'язкості  $\omega \nu$  повинен бути величиною порядку  $O(\tau)$ .

Із множини різницевих схем (2.32), (2.33) виділимо три параметричні сім'ї безумовно стійких алгоритмів з операторами:

$$1) \text{ СО } A01 - \{ \alpha = \beta = 0; \sigma = \sigma_2 = 0; \sigma_1 = \sigma_3 = 1 \},$$

$$A02 - \{ \alpha = \beta = 0; \sigma = \sigma_2 = 0; \sigma_1 = 0; \sigma_3 = 1 \};$$

$$2) \text{ ОПП } A11 - \{ \alpha = \beta = 1; \sigma = \sigma_2 = 0; \sigma_1 = \sigma_3 = 1 \},$$

$$A12 - \{ \alpha = \beta = 1; \sigma = \sigma_2 = 0; \sigma_1 = 0; \sigma_3 = 1 \};$$

$$3) \text{ ОПП на множині точок } \Omega_{h\tau}^{(1)} \text{ і ОПЗ в точках з } G_{h\tau}^{(2)}$$

$$A21 - \{ \alpha = 1; \beta = -1; \sigma = \sigma_2 = 0; \sigma_1 = \sigma_3 = 1 \},$$

$$A22 - \{\alpha = 1; \beta = -1; \sigma = \sigma_2 = 0; \sigma_1 = 1; \sigma_3 = 0\}.$$

Інші алгоритми умовно стійкі або мають гірші апроксимаційні чи дисипативні властивості.

**Теорема 2.4.** Якщо функцію початкового розподілу  $u(x,0) = \varphi(x)$  можна розвинути в абсолютно збіжний ряд Фур'є, а величини  $\tau$  та  $h$  сталі або змінюються не частіше ніж через парне число часових кроків, то чисельні розв'язки рівняння (2.31), знайдені за допомогою алгоритмів A01, A02, A11, A12, A21 та A22, безумовно стійкі за початковими даними.

**Доведення.** Користуючись методом фон – Неймана доведемо спочатку твердження.

**Лема 2.1.** При виконанні умов теореми 2.2 модулі коефіцієнтів переходу розв'язків вказаних алгоритмів при переході з часового кроку  $2n$  на  $2n+2$  не перевищують одиниці.

**Доведення.** Припустимо, що розв'язки вказаних двокрокових різницевого алгоритмів можна розвинути в ряди Фур'є

$$u_i^0 = \varphi(ih) = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty} B_{k_1} \exp(Iihk_1), \quad (2.34)$$

де  $I^2 = -1$  – уявна одиниця; індекси  $j = 0, 1, 2; s = 1, 2$  відповідають індексам алгоритмів;  $B_m$  – коефіцієнти ряду Фур'є розвинення функції  $u(x,0) = \varphi(x)$ ;  $g_{j,s}^n$  – залежні від часу амплітудні члени ряду, які підлягають визначенню.

Після підстановки гармонік ряду (2.34) в різницеві рівняння (2.32),(2.33) з відповідними значеннями параметрів для  $g_{j,s}$  одержимо

$$g_{0,1} = \frac{1-b-Ia}{1+b+Ia}, \quad (2.35)$$

$$g_{0,2} = \frac{1-Ia}{1+b+Ia}, \quad (2.36)$$

де  $a = \tau h^{-1} k \sin(mh)$ ,  $b = \tau v h^{-2} (1 - \cos(mh))$ ;

$$g_{1,1} = \frac{1-a_1-b-Ia}{1+a_1+b+Ia} \text{ при } k < 0, \text{ або } g_{1,1} = \frac{1+a_1-b-Ia}{1-a_1+b+Ia} \text{ при } k > 0, \quad (2.37)$$

де  $a_1 = -\tau k h^{-1} (1 - \cos(mh))$ ;

$$g_{1,2} = \frac{1 - a_1 - b - Ia}{1 + a_1 + b + Ia} \text{ при } k < 0, \text{ або } g_{1,2} = \frac{1 + a_1 - b - Ia}{1 - a_1 + b + Ia} \text{ при } k > 0, \quad (2.38)$$

$$g_{2,1} = \frac{1 - a_1 - b - Ia}{1 + a_1 + b + Ia} \text{ при } k < 0, \text{ або } g_{2,1} = \frac{1 + a_1 - b - Ia}{1 - a_1 + b + Ia} \text{ при } k > 0, \quad (2.39)$$

$$g_{2,2} = \frac{1 - a_1 - b - Ia}{1 + a_1 + b + Ia} \text{ при } k < 0, \text{ або } g_{2,2} = \frac{1 + a_1 - b - Ia}{1 - a_1 + b + ia} \text{ при } k > 0. \quad (2.40)$$

Отже,  $\max_m |g_{j,s}| = 1 \forall j, s$ . **Лему доведено.**

Використовуючи результати леми, легко переконатися, що при виконанні (2.35)-(2.40) і умов теореми 2.4 кожна з гармонік ряду (2.34) тотожно задовольняє різницеві рівняння з відповідними значеннями параметрів, а оскільки  $\max_m |g_{j,s}| = 1 \forall j, s$ , то відповідні ряди Фур'є збіжні і, отже, вони також задовольняють різницеві рівняння. Тобто, зроблене на початку доведення теореми припущення про те що (2.34) буде розв'язком, вірне.

Позначимо через  $L_{2h}$  дискретний аналог простору  $L_2$  і переконуємось, що  $\|u^{2n}\|_{L_{2h}} \leq \|u^0\|_{L_{2h}}$ . Це свідчить про безумовну стійкість алгоритмів за початковими даними. **Теорему доведено.**

Міркуючи як і в п.2.1, легко встановити, що для задач, які мають усталений розв'язок вірне

**Твердження.** *Двокрокові різницеві алгоритми A01 та A11 при усталенні розв'язку консервативні.*

Виникає питання. А чи існує взагалі штучна в'язкість, яка задовольняє поставленим критеріям?

### 2.2.2. ДС-алгоритми із керованою штучною в'язкістю

Запишемо формалізовану постановку задачі побудови різницевих схем для диференціального рівняння (2.31) з керованою штучною в'язкістю. У загальному випадку її можна записати так

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = -k \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \alpha \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h^2} + f_i^n, \quad (2.41)$$

де  $\phi$  – функція в'язкого впливу  $\phi_i^n = u_i^n + \varphi_i^n$ ,  $u_i^n$  – розв'язок задачі,  $\varphi_i^n$  – регуляризуюча функція (функція керування),  $\alpha$  – числовий параметр,  $f_i^n$  – джерельний член, який може носити характер імпульсного чи зосередженого впливу. Параметр  $\alpha$  визначається з умови забезпечення певного порядку апроксимації.

У області гладкості розв'язку необхідно щоб  $\phi_i^n = 0$  ( $\varphi_i^n = -u_i^n$ ), а в околі високого градієнта (розриву) функція  $\phi_i^n$  повинна приймати значення, яке дає змогу оптимізувати відповідний функціонал якості.

Оскільки чисельні розрахунки проводяться при малих, але не прямуючих до нуля кроках, то  $\tau > \tau_0 > 0$  і  $h > h_0 > 0$ . Розглянемо перше диференціальне наближення різницевих схем. Для різницевих рівнянь (2.32),(2.33) першого порядку апроксимації з явною штучною в'язкістю  $\alpha$  воно має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t) + O(\tau^2 + h^2) \quad (2.42)$$

для явних схем і

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + f(x,t) + O(\tau^2 + h^2) \quad (2.43)$$

для неявних, а для схем другого порядку апроксимації за часом –

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) + O(\tau^2 + h^2). \quad (2.44)$$

Нехтуючи членами другого порядку малості ураховуючи, що  $u$  є розв'язком рівняння (2.31) зі збуреним коефіцієнтом  $\tilde{k} = k + \delta$ , запишемо рівняння з керуванням:

$$\text{для (2.42)} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -b \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(x,t); \quad (2.45)$$

$$\text{для (2.43)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} + c \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(x,t); \quad (2.46)$$

$$\text{для (2.44)} \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -k \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + f(x,t), \quad (2.47)$$

де  $a = 2\alpha / \tau$ ;  $\alpha \approx k^2 \tau$ ;  $b(x,t) = k(x,t) - \tilde{k}(x,t)$ ;  $c = \alpha + \tau k^2 / 2$ ;  $\tilde{k}(x,t) = k(x,t) + O(\tau)$ .

Функціонал якості  $J(\varphi)$  може бути вибраний, наприклад, у вигляді середньоквадратичного відхилення розв'язку від заданої форми.

Дослідимо питання існування та єдиності оптимального імпульсного керування гіперболічними системами. Нехай потрібно мінімізувати критерій якості

$$J(\varphi) = F(u(\varphi)) \quad (2.48)$$

на розв'язках гіперболічного рівняння

$$Lu \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + Bu = f + A\varphi, \text{ в } Q \equiv \{(0 \leq t \leq T) \times \Omega\}, \Omega \subset \mathbb{R}^n. \quad (2.49)$$

де  $\varphi$  – керування, яке належить множині допустимих керувань  $U_D$  із рефлексивного банахового простору  $H$ ,  $A$  – обмежений оператор, який діє із  $U_D \subset H$  на весь простір правих частин (2.49), який буде описано нижче.  $B$  – оператор еліптичного типу, визначений виразом

$$Bu = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x)u,$$

$a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ ;  $\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1}^n$ ,  $\{b_i(x)\}_{i=1}^n$  – неперервно диференційовані, а  $c(x)$  – неперервна в області  $\bar{\Omega}$ , яка вважається достатньо регулярною в  $\mathbb{R}^n$ ;

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \forall \xi_i \in \mathbb{R}^1, \quad |b_i| < C_B, \quad \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i} < C, \quad i = \overline{1, n}.$$

Позначимо  $W_{sp}^+$  – поповнення простору гладких в  $Q$  функцій, які задовольняють умови

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0; \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad (2.50)$$

за нормою

$$\|u\|_{W_{sp}^+} = \left( \int_Q u_t^2 + \sum_{i=1}^n u_{x_i}^2 dQ \right)^{1/2}; \quad (2.51)$$

$W_{sp}^+(Q)$  – поповнення гладких функцій, які задовольняють умови

$$v|_{t=T} = v_t|_{t=T} = 0; \quad v|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad (2.52)$$

за нормою (2.51).  $W_{sp}^-(Q)$  і  $W_{sp}^-(Q)$  – відповідні негативні простори.

Тоді, як показано в [5], мають місце твердження

**Лема 2.2.** Для функцій  $u(t, x) \in W_{zp}^+$  має місце співвідношення

$$\|Lu\|_{W_{zp}^-} \leq N \|u\|_{W_{zp}^+}.$$

**Лема 2.3.** Для функцій  $v(t, x) \in W_{zp}^+$  має місце співвідношення

$$\|L^*v\|_{W_{zp}^-} \leq C \|v\|_{W_{zp}^+}.$$

З наведених лем випливає, що оператори  $L$  та  $L^*$  діють неперервно з усього простору  $W_{zp}^+$  (відповідно  $W_{zp}^+$ ) у простір  $W_{zp}^-$  ( $W_{zp}^-$ ).

**Лема 2.4.** Для всіх функцій  $u(t, x) \in W_{zp}^+$  має місце нерівність

$$\|u\|_{L_2} \leq N \|Lu\|_{W_{zp}^-}.$$

**Лема 4.** Для всіх  $v(t, x) \in W_{zp}^+$  має місце нерівність

$$\|L^*v\|_{W_{zp}^-} \geq C \|v\|_{L_2}.$$

Із наведених лем випливає однозначна розв'язуваність відповідних крайових задач та можливість вивчення задач оптимального керування та керованості у розумінні, описаному вище.

Нехай маємо задачу імпульсного керування із критерієм якості

$$J(\varphi) = \int_Q [u(t, x; \varphi) - z_w]^2 dQ, \quad \varphi \in U_D. \quad (2.53)$$

**Теорема 2.5.** Критерій якості (2.53) диференційовний за Гато у  $U_D$ , якщо  $v'_i(t, x) \in C(0, T)$ .

**Доведення.** Досліджуючи диференціальні властивості (2.53), як і в [5], встановимо, що

$$(J'(\varphi), \Delta\varphi)_H = \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} v'_i(t_i, x) \varphi_i(x) d\Omega \Delta t_i + \sum_{i=1}^N \int_{\Omega} v(t_i, x) \Delta\varphi_i(x) d\Omega. \quad (2.54)$$

Із рівності (2.54) випливає, що критерій якості (2.53) диференційований за Гато у  $U_D$ , коли  $v'_i(t, x)$  належить простору функцій, які неперервні за змінною  $t$ . А, отже, можна виписати необхідні умови екстремуму. У протилежному випадку

можна розв'язувати поставлену задачу за допомогою регуляризації керувань [4;5].

**Теорему доведено.**

Задачі керування для рівнянь (2.45) досліджувались в роботах [133,6].

Оскільки задачі керування для рівнянь (2.46),(2.47) є частинним випадком задачі (2.48)-(2.51), то доведені вище теореми встановлюють однозначну розв'язність задачі керування штучною в'язкістю.

Ідея ДС-алгоритму може мати ефективне використання не тільки для задач теорії тепло- та масопереносу в рамках традиційної релятивістської механіки, а й на мікрорівні, зокрема, для чисельного розв'язування задач квантової механіки. Про це йдеться в наступному пункті.

## 2.3. ДС-алгоритми для деяких нелінійних крайових задач

### 2.3.1. Нелінійне параболічне рівняння в $n$ -вимірному просторі

Побудуємо ДС-алгоритм для чисельного розв'язання нелінійної крайової задачі

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = A \sum_{s=1}^p \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x_s^2} + \bar{f}(\bar{u}), \quad (\bar{x}, t) = (x_1, x_2, \dots, x_p, t) \in Q \quad (2.55)$$

при умовах періодичності на границі і початкових умовах

$$\bar{u}(\bar{x}, 0) = \bar{\Psi}(\bar{x}). \quad (2.56)$$

Тут  $Q = \{\Omega \times (0 < t \leq T)\}$ ,  $\Omega = \{\bar{x} | 0 < x_s < 1; (s = \overline{1, p})\}$ ,  $A > 0$  – квадратна  $q \times q$  матриця з неперервно залежними від  $\bar{u}$  невід'ємними елементами,  $\bar{f}(\bar{u})$  – неперервна  $q$ -мірна вектор-функція.

Розглянутий клас задач охоплює широке коло проблем моделювання складних фізичних процесів. Зокрема, до нього відносяться задачі фільтрації важкої нестислої рідини в ґрунтах [135], нелінійної теплофізики тощо.

Як і раніше, в параграфі 2.1 область  $Q$  покриваємо сіткою  $\Omega_{h\tau}$ , яку розщеплюємо на дві множини  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  і  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  за принципом парності.

Розглянемо спершу скалярний випадок задачі (2.55), (2.56)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \sum_{s=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} + f(u), \quad (\bar{x}, t) \in Q, \quad a > 0,$$

$$u(\bar{x}, 0) = \psi(\bar{x}).$$

Задамо два сімейства різницевих схем

$$u_i^{2n+1+l} = u_i^{2n+l} + \tau \sum_{s=1}^p L_s^{2n+l} u_i^{2n+l} + f(u_i^{2n+l}) \quad (2.57)$$

на множині  $\Omega_{h\tau}^{(1+l)}$  і

$$u_i^{2n+1+l} = u_i^{2n+l} + \tau \sum_{s=1}^p L_s^{2n+l+1} u_i^{2n+l+1} + f\left(\frac{u_{i_s+1}^{2n+l+1} + u_{i_s-1}^{2n+l+1}}{2}\right) \quad (2.58)$$

на  $\Omega_{h\tau}^{(2-l)}$ . Тут покладемо:  $i_s \pm 1 = (i_1, i_2, \dots, i_s \pm 1, \dots, i_p)$ ,  $i = (i_1, i_2, \dots, i_p)$ ,  $L_s^m u_i^n = w(u_i^m) (u_{i_s+1}^n - 2u_i^n + u_{i_s-1}^n) / h_s^2$ ,  $w(u_i^n) = a((u_{i_s+1}^n + u_{i_s-1}^n) / 2)$  в точках області  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  і  $w(u_i^n) = a(u_i^n)$  – в точках  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$ . Результати, одержані за формулами (2.57), (2.58) при  $l = 0$  сприймаються як допоміжні, а при  $l = 1$  – як розв’язок задачі.

Різницеву схему зі змінними коефіцієнтами називатимемо локально стійкою, якщо схеми із замороженими коефіцієнтами [82,50] стійкі в усіх точках сіткової області. Проведемо дослідження стійкості за початковими даними для лінеаризованої різницевої задачі (2.57), (2.58). Покладемо  $f \equiv 0$ . У відповідності до ознаки стійкості Годунова-Рябенського в довільній точці  $(\bar{x}^*, t_n^*)$  з  $\Omega_{h\tau}$  зафіксуємо значення коефіцієнтів рівнянь (2.57) і (2.58)  $c_1 = a(u_i^n)$ ,  $c_2 = a((u_{i_s+1}^n + u_{i_s-1}^n) / 2)$ ,  $d = (c_2 - c_1) / \tau$  і підставимо їх у різницеві рівняння. Така “заморозка” змінних коефіцієнтів дає змогу поширити підходи дослідження стійкості, що використовуються для різницевих схем із сталими коефіцієнтами, на випадок різницевих схем із змінними коефіцієнтами.

**Теорема 2.7.** *Якщо функція початкового розподілу  $\Psi(\bar{x})$  розвивається в абсолютно збіжний ряд Фур’є*

$$u_i^0 = \Psi(ih) = \sum_{s=1}^p \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B_{m_1, m_2, \dots, m_p} \exp\left(i\pi \sum_{s=1}^p i_s h_s m_s\right), \quad (2.59)$$

параметри  $\tau$  та  $h_s$  ( $s = 1, 2, 3, \dots$ ) сталі, або змінюються не частіше ніж через парне число кроків, то чисельний алгоритм із замороженими коефіцієнтами (2.57), (2.58) безумовно стійкий при  $d \geq 0$ , а при  $d < 0$  умовою стійкості є

$$\tau < 1 / \sqrt{|d| \sum_{s=1}^p h_s^{-2}}. \quad (2.59^*)$$

**Доведення.** Нехай точний розв’язок різницевої задачі з фіксованими коефіцієнтами можна записати у вигляді ряду

$$u_i^{2n} = \sum_{s=1}^p \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B_{m_1, m_2, \dots, m_p} \zeta^n(m_1, m_2, \dots, m_p) \exp\left(I\pi \sum_{s=1}^p i_s h_s m_s\right), \quad (2.60)$$

де  $B_{m_1, m_2, \dots, m_p}$  – коефіцієнти ряду Фур'є (2.59),  $I = \sqrt{-1}$ . Параметри  $\zeta(m_1, m_2, \dots, m_p) = \zeta_1(m_1, m_2, \dots, m_p) \zeta_2(m_1, m_2, \dots, m_p)$  визначимо так, щоб ряд (2.60) збігався і його гармоніки задовольняли відповідні різницеві рівняння (2.57), (2.58) при  $f \equiv 0$ . Гармоніки розв'язку різницевої задачі, одержаного за допомогою явних і неявних схем, позначимо відповідно так

$$\tilde{u}_{i,j,k}^{2n+1} = B_{m_1, m_2, \dots, m_p} \zeta_1^n(m_1, m_2, \dots, m_p) \exp\left(I\pi \sum_{s=1}^p i_s h_s m_s\right),$$

$$\tilde{u}_{i,j,k}^{2n+2} = B_{m_1, m_2, \dots, m_p} \zeta_2^n(m_1, m_2, \dots, m_p) \exp\left(I\pi \sum_{s=1}^p i_s h_s m_s\right).$$

Після підстановки гармонік ряду в (2.57) і (2.58) маємо

$$\zeta_2^{n+2}(m_1, m_2, \dots, m_p) = g(m_1, m_2, \dots, m_p) \zeta_2^n(m_1, m_2, \dots, m_p), \quad (2.61)$$

$$g(m_1, m_2, \dots, m_p) = \left(1 - \tau c_1 \sum_{s=1}^p (1 - \cos \theta_s) h_s^{-2}\right) \left(1 + \tau c_2 \sum_{s=1}^p (1 - \cos \theta_s) h_s^{-2}\right)^{-1}. \quad (2.62)$$

Тут  $\theta_s = m_s h_s$ . Оскільки  $c_1 > 0$  і  $c_2 > 0$ , то нерівність  $g(\theta_s) \leq 1$  виконується  $\forall \theta_s$ , а  $g(\theta_s) \geq -1$  при  $d \geq 0 \quad \forall \theta_s$ . Якщо  $d < 0$ , то з нерівності  $g(\theta_s) \geq -1$  випливає умова

$$\tau < 1 / \sqrt{|d| \sum_{s=1}^p h_s^{-2}}.$$

При виконанні умови (2.59)\*  $q = \max_{\theta_s} |g(\theta_s)| = 1$ . Тоді підстановка гармонік розв'язку у ліві частини рівнянь (2.57) і (2.58) перетворює їх у тотожності  $\forall m_1, m_2, \dots, m_p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Помножимо обидві частини (2.61) на  $B_{m_1, m_2, \dots, m_p} \exp\left(I\pi \sum_{s=1}^p i_s h_s m_s\right)$ . Після

підсумування результату за усіма  $m_1, m_2, \dots, m_p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  встановлюємо мажорантну оцінку

$$\begin{aligned} |u_i^{2n}| &= \left| \sum_{s=1}^p \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B_{m_1, m_2, \dots, m_p} \mathcal{S}^n(m_1, m_2, \dots, m_p) \exp\left(I\pi \sum_{s=1}^p i_s h_s m_s\right) \right| \leq \\ &\leq q^n \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=-\infty}^{\infty} |B_{m_1, m_2, \dots, m_p}|, \end{aligned} \quad (2.63)$$

яка стверджує збіжність ряду (2.60)  $\forall n > 0$ . Отже, (2.60) є точним розв'язком системи різницевих рівнянь (2.57), (2.58) при  $f \equiv 0$ .

Скориставшись дискретним аналогом норми у просторі  $L_2[-\pi, \pi]$ , після проведення оцінок із застосуванням рівності Парсеваля для розв'язку різницевої задачі маємо

$$\begin{aligned} \|u^{2n}\|_{L_{2h}}^2 &= \left| \sum_{s=1}^p \sum_{m_s=-\infty}^{\infty} B_{m_1, m_2, \dots, m_p} \mathcal{S}^n(m_1, m_2, \dots, m_p) \exp\left(I\pi \sum_{s=1}^p i_s h_s m_s\right) \right|^2 h_1 h_2 \leq \\ &\leq q^{2n} \sum_{s=1}^p \sum_{i_s=1}^M |u_{i_s}^0|^2 h_s = q^n \|u^0\|_{L_{2h}}^2. \end{aligned}$$

Остання нерівність встановлює стійкість алгоритму (2.57), (2.58) для однорідної задачі (2.56) за початковими умовами. **Теорему доведено.**

**Зауваження.** Для лінеаризованої різницевої задачі (2.57), (2.58) із змінними коефіцієнтами  $c_1(i, n)$ ,  $c_2(i, n)$  і  $d_i^n = (c_2(i, n) - c_1(i, n)) / \tau$  при  $d_i^n < 0$  умова

$\tau < 1 / \sqrt{\max_{i,n} |d_i^n| \sum_{s=1}^p h_s^{-2}}$  є евристичною необхідною умовою для стійкості за початковими даними.

**Теорема 2.8.** При виконанні умов теореми 2.7 чисельний алгоритм (2.57), (2.58) для векторного рівняння (2.55) стійкий.

**Доведення.** На сітковій множині  $\Omega_{h\tau}$  введемо  $q$ -вимірні вектори  $\vec{u}_i^n = (u_i^{(1)n}, \dots, u_i^{(q)n})^T$ ,  $\vec{f}_i^n = (f_i^{(1)n}, \dots, f_i^{(q)n})^T$ . Рівняння (2.57) і (2.58) запишемо в операторному вигляді

$$\vec{u}_i^{2n+1+l} = \vec{u}_i^{2n+l} + A_h^{2n+l} \vec{u}_i^{2n+l} + \vec{f}(\vec{u}_i^{2n+l}),$$

$$\vec{u}_i^{2n+1+l} = \vec{u}_i^{2n+l} + A_h^{2n+1+l} \vec{u}_i^{2n+1+l} + \vec{f}(\vec{u}_i^{2n+1+l}).$$

Тут  $A_h^n$  – векторний аналог скалярного різницевого оператора  $\tau \sum_{s=1}^p L_s^{2n+l}$ .

В кожній з множин  $\Omega_{h\tau}$ , і  $\Omega_{h\tau}^{(j)}$  ( $j=1,2$ ) введемо простори сіткових функцій аналогічні простору  $L_2$  з скалярними добутками  $(\cdot, \cdot)$ ,  $(\cdot, \cdot)_j$  і відповідними нормами

$$\|\cdot\|_{L_{2h}} = (\cdot, \cdot)^{1/2}, \quad \|\cdot\|_j = (\cdot, \cdot)_j^{1/2} \quad \text{та норми} \quad \|w(t_n)\|_{B'} = \max_{0 \leq n \leq N} \|w(t_n)\|_{L_{2h}}, \quad \|w(t_n)\|_{B^j} = \max_{0 \leq n \leq N} \|w(t_n)\|_j.$$

При переході з часового кроку  $2n$  на крок  $2n+2$  в точках множин  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  та  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  маємо

$$\vec{u}_i^{2n+2} = G^{2n+1} \vec{u}_i^{2n} + \tau G_1^{2n+1} \vec{f}_i^{2n+1} \quad \text{в } \Omega_{h\tau}^{(1)}, \quad (2.64)$$

$$\vec{u}_i^{2n+2} = \tilde{G}^{2n+1} \vec{u}_i^{2n} + (\tilde{G}^{2n+1} + \tau E) \vec{f}_i^{2n+1} \quad \text{в } \Omega_{h\tau}^{(2)}, \quad (2.65)$$

де  $G^{2n+1} \equiv (E + \tau A_h^{2n+1})^{-1} (E - \tau A_h^{2n+1})$ ,  $G_1^{2n+1} \equiv (E + \tau A_h^{2n+1})^{-1}$ ,

$$\tilde{G}^{2n+1} = (E - \tau A_h^{2n+1})(E + \tau A_h^{2n+1})^{-1}.$$

Застосуємо формулу (2.64) рекурентно  $n$  разів

$$\vec{u}_i^{2n+2} = \prod_{k=0}^n G^{2k+1} \vec{u}_i^0 + 2\tau \sum_{k=1}^n G_1^{2k+1} \vec{f}_i^{2k+1} \prod_{j=1}^k G^{2(n-j)+1}.$$

Звідки

$$\|\bar{u}_i^{2n+2}\|_1 \leq q^{n+1} \|\bar{u}_i^0\|_1 + 2\tau \|\bar{f}\|_{B'_{h,1}} \sum_{k=1}^n q^k \|G_1^{2k+1}\|_1 = q^{n+1} \|\bar{u}_i^0\|_1 + T \|\bar{f}\|_{B'_{h,1}} q_1, \quad (2.66)$$

Після рекурентного використання  $n$  разів (2.65) одержимо

$$\|\bar{u}_i^{2n+2}\|_2 \leq \tilde{q}_2^{n+1} \|\bar{u}_i^0\|_2 + 2n\tau \|\bar{f}\|_{B'_{h,2}} < \tilde{q}_2^{n+1} \|\bar{u}_i^0\|_2 + T \|\bar{f}\|_{B'_{h,2}}, \quad (2.67)$$

де  $\|\bar{f}\|_{B'_{h,s}} = \max_k \|f_i^k\|_s$ ,  $q_s = \max_k \|F^{2k+1}\|_s$ ,  $\tilde{q}_s = \max_k \|G_1^{2k+1}\|_s$ ,  $s = 1, 2$ .

Оскільки простір коефіцієнтів ряду Фур'є і простір розв'язків різницевих задач ізоморфні і мають рівні норми [50], то з одержаних в теоремі 2.7 оцінок маємо

$$q_s \leq 1, \quad \tilde{q}_s \leq 1, \quad q = \max_n \|G^{2n+1}\|_{B_h} \leq 1.$$

Використовуючи нерівності (2.66) і (2.67), приходимо до оцінки

$$\|\bar{u}^{2n+2}\|_{L_{2h}} \leq \|\bar{u}^0\|_{L_{2h}} + T \|\bar{f}\|_{B'_h}. \quad (2.68)$$

Оскільки  $\bar{u}(\bar{x}, t) \in C^1(Q)$ , то область її значень є компактом, а отже, з неперервності  $\bar{f}(\bar{u})$  випливає обмеженість  $\|\bar{f}\|_{B'_h}$ , а з (2.68) випливає стійкість лінеаризованого алгоритму (2.57), (2.58). **Теорему доведено.**

Алгоритм (2.57), (2.58) тестувався на розв'язку одновимірної задачі (2.56) при умовах періодичності на границі  $x \in (-\pi, \pi)$ ,  $a(u) = u^2$ ,  $f(u) = (u^2 + \alpha) \sin x e^{\alpha t}$  і  $u(x, 0) = \sin(x)$ . Порівняння обчислених значень результатів з точним розв'язком  $u(x, t) = \sin x e^{\alpha t}$  показало, що на сітці з кроками  $h = 2\pi / 400$  і  $\tau = 0,005$  максимум відносної похибки не перевищує 5% при  $\alpha = 1$ .

### 2.3.2. ДС-алгоритм для рівняння Бюргерса

Досить поширеною математичною моделлю, що описує рух хвилі постійного профілю з врахуванням в'язкості середовища, є нелінійне рівняння

$$u_t + A(u)u_x = \gamma u_{xx} \quad (2.69)$$

Тут  $\gamma u_{xx}$  – лінійна дифузія,  $\gamma > 0$  – коефіцієнт лінійної дифузії,  $A(u)u_x$  може задавати адвекцію. Зокрема, у випадку  $A(u) = \beta u$  (2.74) перетворюється у рівняння Бюргерса

$$u_t + \beta u u_x = \gamma u_{xx}. \quad (2.69')$$

Якщо, крім того, відсутня в'язкість, тобто  $\gamma \rightarrow 0$ , то (2.69) перетворюється у нелінійне хвильове рівняння.

Побудова та дослідження нових ефективних різницевих алгоритмів для нелінійних рівнянь є актуальною проблемою сучасної математики. Математичні моделі, побудовані на основі рівняння Бюргера, достатньо адекватно описують реальні нелінійні процеси, а у ряді простіших випадків задача має аналітичні розв'язки. Це дозволяє проводити тестування нових чисельних алгоритмів для нелінійних початково-крайових задач на основі цієї моделі.

Побудуємо і обґрунтуємо ДС-алгоритми, які мають такі ж апроксимаційні параметри як і неявні схеми, є локально стійкими і дозволяють знайти розв'язки сіткових рівнянь, не розв'язуючи системи нелінійних рівнянь.

**Постановка скінченно-різницевої задачі.** У циліндричній області  $Q \equiv \{\Omega \times (0 \leq t \leq T)\}$ , де  $\Omega = \{0 \leq x \leq l\}$ , знайдемо періодичний за просторовими змінними розв'язок початково-крайової задачі для рівняння (2.69) при заданих умовах

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.70)$$

$$u(0, t) = u(l, t), \quad u_x(0, t) = u_x(l, t), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.71)$$

Тут  $\varphi(x) \in C^1(\mathbb{R})$  та обмежена при  $x \rightarrow \infty$ .

При невеликих значеннях  $|u(x,t)| \ll 1$  нелінійні доданки суттєво не впливають на розв'язок рівняння (2.69), тому він поводить себе аналогічно розв'язку рівняння теплопровідності. Якщо ж  $|u(x,t)| \gg 1$ , то маємо випадок, близький до нелінійного хвильового рівняння першого порядку.

Відомо [136], що при  $\gamma > 0$  задача (2.69), (2.70) має єдиний розв'язок, який є гладкою функцією при  $t > 0$ .

Для чисельного розв'язання (2.69)-(2.71) скористаємось ДС- алгоритмом.

Нехай  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  та  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$  – множини, визначені у параграфі 2.1.

У точках з  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau L_1 u_i^{2n}, \quad (2.72)$$

у точках з  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau L_2 u_i^{2n+1}, \quad (2.73)$$

у вузлах  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau L_1 u_i^{2n+1}, \quad (2.74)$$

у вузлах  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau L_2 u_i^{2n+2}. \quad (2.75)$$

Тут

$$L_1 u_i^{2n} \equiv -A(u_i^{2n}) \frac{u_{i+1}^{2n} - u_{i-1}^{2n}}{2h} + \gamma \frac{u_{i+1}^{2n} - 2u_i^{2n} + u_{i-1}^{2n}}{h^2},$$

$$L_2 u_i^{2n+1} \equiv -A\left(\frac{u_i^{2n+1} + u_i^{2n+1}}{2}\right) \frac{u_{i+1}^{2n+1} - u_{i-1}^{2n+1}}{2h} + \gamma \frac{u_{i+1}^{2n+1} - 2u_i^{2n+1} + u_{i-1}^{2n+1}}{h^2}.$$

У внутрішніх вузлових точках сіткової області функцію  $u_i^n$  визначимо за такою схемою. На непарних часових кроках розв'язок знаходимо спочатку в усіх точках області  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  за явною схемою. Потім, використовуючи вже знайдені значення розв'язку, визначаємо шукані значення з неявної схеми явно в решті просторових точок цього часового шару.

На наступному кроці процес повторюється. За розв'язок задачі приймаємо значення функції  $u_i^{2n+2}$ .

Для рівняння (2.69') ДС-алгоритм такий:

у точках з  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau Lu_i^{2n}, \quad (2.72')$$

у точках з  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$

$$u_i^{2n+1} = u_i^{2n} + \tau Lu_i^{2n+1}, \quad (2.73')$$

у вузлах  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau Lu_i^{2n+1}, \quad (2.74')$$

у вузлах  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$

$$u_i^{2n+2} = u_i^{2n+1} + \tau Lu_i^{2n+2}, \quad (2.75')$$

де

$$Lu_i^{2n+k} \equiv -\beta u_i^{2n+1} \frac{u_{i+1}^{2n+k} - u_{i-1}^{2n+k}}{2h} + \gamma \frac{u_{i+1}^{2n+k} - 2u_i^{2n+k} + u_{i-1}^{2n+k}}{h^2}, \quad k \in \{0,1,2\}. \quad (2.76')$$

**Порядок апроксимації початково – крайової задачі.** Легко переконатися, що наведений вище алгоритм апроксимує диференціальну задачу з похибкою  $O(\tau^2 + h^2)$  при  $\sigma = 0$  і  $O(\tau + h^2)$  у всіх інших випадках.

Дійсно, склавши попарно рівняння (2.72') з (2.75') та (2.73') з (2.74') одержимо апроксимаційні формули

$$u_i^{2n+2} - u_i^{2n} = \tau(Lu_i^{2n} + Lu_i^{2n+2}) \quad (2.77)$$

у точках множини  $\Omega_{h\tau}^{(1)}$  та

$$u_i^{2n+2} - u_i^{2n} = 2\tau Lu_i^{2n+1} \quad (2.78)$$

у точках  $\Omega_{h\tau}^{(2)}$ .

Оскільки для довільної функції  $f(t)$  з простору  $C^2[0, T]$  має місце розвинення

$$f(x+h, t+\tau) = f(x, t) + hf'_x(x, t) + \tau f'_t(x, t) + \\ + \frac{1}{2} \left( h^2 f''_{xx}(x, t) + 2h\tau f''_{xt}(x, t) + \tau^2 f''_{tt}(x, t) \right) + O((h+\tau)^3), \text{ тоді}$$

$$(u_i^{2n+2} - u_i^{2n}) / (2\tau) = u'_t \Big|_{t=(2n+1)\tau} + O(\tau^2),$$

$$Lu_i^{2n} = (u'_t + \beta u u_x - \gamma u_{xx}) \Big|_{t=(2n+1)\tau} - 2\tau u'_t \Big|_{t=(2n+1)\tau} + O(h^2 + \tau^2).$$

Далі з (2.77) одержимо

$$(u_i^{2n+2} - u_i^{2n}) / (2\tau) - (Lu_i^{2n} + Lu_i^{2n+2}) / 2 = (u'_t + \beta u u_x - \gamma u_{xx}) \Big|_{t=(2n+1)\tau} + O(h^2 + \tau^2).$$

Отже, різницевий алгоритм (2.72')-(2.75') апроксимує диференціальне рівняння (2.69') з похибкою  $O(h^2 + \tau^2)$ .

### Умови стійкості чисельного алгоритму.

Проведемо дослідження локальної стійкості за початковими даними для лінеаризованої різницевої задачі (2.72')-(2.75'). У відповідності до ознаки стійкості Годунова–Рябенського у довільній точці  $(\bar{x}_i^*, t_n^*)$  з  $\Omega_{h\tau}$  зафіксуємо значення коефіцієнтів рівнянь (2.72') і (2.75')  $c = \beta u_i^{2n+1}$  і підставимо їх у різницеві рівняння.

Має місце наступна

**Теорема 2.9.** Якщо функція початкового розподілу  $u(x,0) = \varphi(x)$  розвивається в абсолютно збіжний ряд Фур'є, а параметр  $\tau$  сталий або змінюється не частіше ніж через парне число кроків, то чисельний ДС-алгоритм із замороженими коефіцієнтами (2.72')-(2.75') стійкий за початковими даними.

**Доведення.** Припустимо, що має місце розвинення

$$u_i^{2n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m \zeta^n(m) \exp(Ii hm), \quad (2.79)$$

де  $B_m$  -коефіцієнти ряду Фур'є для функції  $\varphi(x)$

$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi e^{-I(xm)} dx, \quad I = \sqrt{-1}.$$

Параметри  $\zeta(m)$  визначимо так, щоб ряд (2.72) збігався і його гармоніки задовольняли відповідні різницеві рівняння.

Нехай  $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(1)}$ . Гармоніки шуканого розв'язку (2.79) подамо відповідно у вигляді

$$\tilde{u}_i^{2n+1} = B_m \cdot \zeta_1^{2n+1}(m) \cdot \exp(Ii hm), \quad (2.80)$$

$$\tilde{u}_i^{2n+2} = B_m \cdot \zeta_2^{2n+2}(m) \cdot \exp(Ii hm). \quad (2.81)$$

Рівняння (2.72') та (2.75') дозволяють встановити, що

$$\zeta_1^{2n+1}(m) = g_1 \cdot \zeta_2^{2n}(m), \quad (2.82)$$

$$g_1 = \left(1 - c\tau I \sin(hm) / h + 2\tau\gamma(\cos(hm) - 1) / h^2\right),$$

$$\zeta_2^{2n+2}(m) = g_2 \cdot \zeta_1^{2n+1}(m), \quad (2.83)$$

$$g_2 = \left(1 + c\tau I \sin(hm) / h - 2\tau\gamma(\cos(hm) - 1) / h^2\right)^{-1}.$$

Якщо  $(x_i, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(2)}$ , то, використовуючи скінченно-різницеві рівняння (2.73'), (2.74'), одержимо

$$\zeta_2^{2n+1}(m) = g_2 \zeta_1^{2n}(m), \quad (2.84)$$

$$\zeta_1^{2n+2}(m) = g_1 \cdot \zeta_2^{2n+1}(m). \quad (2.85)$$

Отже, в обох випадках при переході з кроку  $2n$  на крок  $2n+2$  маємо

$$\zeta_2^{2n+2}(m) = g(m) \zeta_2^{2n}(m), \quad (2.86)$$

де коефіцієнт переходу  $g(m) = g_1 g_2$ , тобто

$$g(m) = \frac{1 + 2\tau\gamma(\cos(hm) - 1) / h^2 - c\tau I \sin(hm) / h}{1 - 2\tau\gamma(\cos(hm) - 1) / h^2 + c\tau I \sin(hm) / h}. \quad (2.87)$$

При виконанні (2.80), (2.81) (або (2.84), (2.85)) скінченно-різницеві рівняння (2.72') і (2.75') (відповідно (2.73'), (2.74'))  $\forall m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  перетворюються в тотожності. А з (2.87) випливає, що

$$q = \max_m |g(m)| \leq 1.$$

Для доведення збіжності ряду (2.79) множимо обидві частини рівності (2.86) на  $B_m e^{ihm}$ , результат сумуємо за усіма  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  і встановлюємо оцінку

$$|u_i^{2n}| \leq q^n \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m|.$$

Звідси випливає збіжність ряду (2.79) для будь-яких  $n > 0$ . Отже, сіткова функція, подана у вигляді ряду (2.79) є точним розв'язком (2.72')-(2.75').

Оскільки  $\|u^n\|_{L_{2h}}^2 = \sum_{i=1}^M |u_i^n|^2 h$  є дискретним аналогом норми у просторі  $L_2[0, l]$ , то

після нескладних оцінок з використанням рівності Парсеваля для розв'язку різницевої задачі маємо

$$\|u^{2n}\|_{L_{2h}}^2 \leq q^{2n} \sum_{i=1}^M \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| \right)^2 h \leq q^{2n} \sum_{i=1}^M |u_i^0|^2 h = q^n \|u^0\|_{L_{2h}}^2.$$

Оскільки  $\forall \tau > 0$  має місце оцінка

$$q = \max_m |g(m)| \leq 1,$$

то виконання нерівності

$$\|u^n\|_{L_{2h}}^2 \leq q^n \|u^0\|_{L_{2h}}^2$$

встановлює безумовну стійкість алгоритму (2.72')-(2.75') за початковими даними.

Тобто, вимога розвинення початкової функції в абсолютно збіжний ряд Фур'є у даному разі є достатньою умовою стійкості алгоритму (2.72')-(2.75') за початковими даними.

**Теорему доведено.**

Одержані результати дозволяють стверджувати, що запропоновані двокрокові симетризовані алгоритми вигляду (2.72)-(2.75) мають такі ж апроксимаційні властивості, як і неявні схеми з вагою, рівною 0.5, і ефективні для розв'язування нелінійного рівняння Бюргерса. Проте, на відміну від вказаних неявних однокрокових двошарових схем, в даному випадку для знаходження розв'язку не потрібно на кожному часовому кроці розв'язувати систему нелінійних різницевих рівнянь.

У наступному розділі ДС-алгоритм застосовано для задачі течії в'язкої рідини в рамках рівнянь Нав'є-Стокса.

## 2.4. Висновки

– досліджено ДС-алгоритм з вагами для диференціальних рівнянь в частинних похідних із змінними коефіцієнтами, зокрема, властивості стійкості, порядку апроксимації, дисипативності, дисперсійності, транспортивності, консервативності;

- вивчено вплив граничних умов на стійкість та апроксимаційні властивості ДС-алгоритму;
- вивчено питання використання штучної схемної в'язкості в ДС-алгоритмі для лінійних диференціальних рівнянь в частинних похідних;
- побудовано та встановлено умови локальної стійкості схем ДС-алгоритму та його порядок апроксимації для нелінійного параболічного рівняння в  $n$ -вимірному просторі та рівняння Бюргерса.

### РОЗДІЛ 3

## ЗАСТОСУВАННЯ ДС-АЛГОРИТМІВ ДЛЯ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ ЗАБРУДНЕНЬ

У даному розділі побудовано та досліджено алгоритми чисельного моделювання процесів, які описуються системами (1.30)-(1.31) та (1.32)-(1.33) для відновлення параметрів точкових джерел для параболічного рівняння, коли додаткові виміри проводяться в скінченному числі точок простору (проблема продовження полів з дискретних множин [151]).

Розглядаються дві задачі. У першій задачі положення точкових джерел вважаються відомими, а потужність — шуканою. Друга задача ускладнюється тим, що і координати, і потужності джерел є невідомими. Такі задачі є типовими, наприклад, при обробці даних гідрогеологічних спостережень з захисту довкілля тощо. Побудовано алгоритми наближеного чисельного розв'язання поставлених задач, розроблено програми отримання чисельних розв'язків, та їх обробки. При розв'язуванні задачі ідентифікації використано реальні фізичні дані, взяті з спостереження процесу розповсюдження забруднень з 92 джерелами. Побудовано комп'ютерну модель процесу розповсюдження забруднень.

Чисельне моделювання проводиться ітераційним способом. Кожен ітераційний крок пов'язаний з розв'язуванням двох крайових задач: для основного та спряженого станів. Отже, підтверджується широко розповсюджена теза, що розв'язування оберненої задачі (задачі оптимізації) пов'язано з багаторазовим розв'язуванням крайових задач, кожна з яких повинна розв'язуватись з необхідною точністю та за бажаний час.

До розв'язування початково-крайових задач будемо застосовувати чисельні методи, які дозволяють з достатньою точністю наблизити модельні математичні уявлення до реальних природних умов. Найчастіше при чисельному моделюванні процесів геоміграції застосовується метод скінчених різниць та метод скінчених елементів.

Чисельний розв'язок рівнянь конвективної дифузії пов'язаний з характерними обчислювальними труднощами. Здійснити достовірні розрахунки за стандартними явними різницевиими схемами, що апроксимують рівняння переносу, можна лише при виконанні жорстких обмежень на кроки просторової та часової сіток. При порушенні цих умов чисельні алгоритми стають нестійкими, або у розв'язках спостерігаються характерні похибки двох видів: 1) фронт концентрації занадто згладжений; 2) у ньому присутні нефізичні пилоподібні осциляції. Обмеження на кроки просторової та часової сіток вимагають проведення розрахунків при достатньо дрібній просторовій та часовій дискретизації. Використання ж неявних різницевих схем вимагає значних обсягів обчислень, обумовлених необхідністю розв'язання систем алгебраїчних рівнянь великої розмірності.

Ураховуючи специфіку задач підземного масопереносу (як правило, великі лінійні розміри області фільтрації, необхідність проведення багатоваріантних прогнозних розрахунків на довгострокові періоди часу), для розв'язування прямої та спряженої задач застосовано двокроковий симетризований алгоритм, оскільки, як це було доведено в розділі 2 для гіперболічних рівнянь першого порядку та параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами 1) ДС-алгоритми абсолютно стійкі, або мають достатньо великий запас стійкості; 2) при застосуванні ДС-алгоритмів відпадає необхідність розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь для обчислення значень у внутрішніх точках сітки. Отже, можна отримати суттєвий вигравш у часі в порівнянні з іншими скінченно-різницевиими алгоритмами при збереженні необхідної точності обчислень.

### **3.1. Чисельне моделювання процесу забруднення при відомих координатах розташування точкових джерел та невідомих інтенсивностях**

Для спрощення викладок будемо вважати, що область, в якій розташовані об'єкти забруднень, прямокутна.  $\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2), x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ . Розв'язання двох прямих задач: (1.30), (1.31) для основного стану системи та (1.32), (1.33) для спряженого стану на кожній ітерації проведемо за допомогою ДС-алгоритму.

Для сіткових функцій, що рівні нулю на  $\partial w$ , визначимо гільбертів простір  $L_2(w)$ , в якому скалярний добуток і норма задаються у вигляді

$$(u, v) = \sum_{x \in w} u(x)v(x)h_1h_2, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)}.$$

Область  $\Omega$  покриваємо сіткою  $\Omega_{h,\tau} = \{(x_1, x_2, t) \mid x_1 = kh_1, x_2 = mh_2, t = n\tau, k = \overline{0, M_1}, m = \overline{0, M_2}, n = \overline{0, N}; h_\alpha = 1/M_\alpha, \alpha = 1, 2, \tau > 0\}$ , яку розбиваємо на дві підмножини:  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n)}$  та  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n)}$ .

До першої з них відносимо всі точки  $(x_{1,k}, x_{2,m}, t_n) \in \Omega_{h,\tau}$ , для яких  $(k + m + n)$  – непарне, а до другої –  $(k + m + n)$  – парне.

На внутрішніх точках сіткової множини  $\Omega_{h,\tau}^{(1,n+1)}$  задаємо сімейство різницевих схем

$$u_{k,m}^{n+1} = u_{k,m}^n - \tau(Cu_{k,m}^n + Du_{k,m}^n + au_{k,m}^n) + \tau F_{k,m}^n V_{k,m}^n, \quad (3.1)$$

а на внутрішніх точках множини  $\Omega_{h,\tau}^{(2,n+1)}$  –

$$u_{k,m}^{n+1} = u_{k,m}^n - \tau(Cu_{k,m}^{n+1} + Du_{k,m}^{n+1} + au_{k,m}^{n+1}) + \tau F_{k,m}^n V_{k,m}^{n+1}. \quad (3.2)$$

Тут  $Cu_{k,m}^n = c_{1,k,m} \frac{u_{k+1,m}^n - u_{k-1,m}^n}{2h_1} + c_{2,k,m} \frac{u_{k,m+1}^n - u_{k,m-1}^n}{2h_2}$ ;

$$Du_{k,m}^n = - \left( k_{k,m} \frac{u_{k+1,m}^n - 2u_{k,m}^n + u_{k-1,m}^n}{h_1^2} + k_{k,m} \frac{u_{k,m+1}^n - 2u_{k,m}^n + u_{k,m-1}^n}{h_2^2} \right);$$

$$FV_{k,m}^{n+1} = \begin{cases} \frac{(h_1 - \gamma_1)(h_2 - \gamma_2)}{h_1h_2} q^\beta(\tau n), \text{ якщо } |x_{1,k} - r_1^\beta| < h_1 \text{ та } |x_{2,k} - r_2^\beta| < h_2, \\ 0, \text{ в іншому випадку,} \end{cases}$$

де  $\beta$  – номер джерела,  $(r_1^\beta, r_2^\beta)$  – координати джерела,  $\gamma_i = |x_{i,k} - r_i^\beta|$ ,  $i = 1, 2$ .

Схеми доповнюємо початковою

$$u_{k,m}^0 = g(kh_1, mh_2), \quad k = \overline{0, M_1}, m = \overline{0, M_2} \quad (3.3)$$

та граничними умовами

$$u_{0,m}^{n+1} = u_{M_1,m}^{n+1} = 0, m = \overline{0, M_2}; \quad u_{k,0}^{n+1} = u_{k,M_2}^{n+1} = 0, k = \overline{0, M_1}. \quad (3.4)$$

Як і раніше, за розв'язок задачі приймаємо значення сіткової функції  $u_{k,m}^{2n}$  при  $n = 0, 1, 2, \dots, N - 1$ .

Аналогічно, для спряженого стану схеми ДС-методу мають вигляд

$$\psi_{k,m}^{n-1} = \psi_{k,m}^n + \tau \left( C\psi_{k,m}^n - D\psi_{k,m}^n - a\psi_{k,m}^n \right) + \tau Z_{k,m}^n, \quad (x_{1,k}, x_{2,m}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(1,n-1)} \quad (3.5)$$

$$\psi_{k,m}^{n-1} = \psi_{k,m}^n + \tau \left( C\psi_{k,m}^{n-1} - D\psi_{k,m}^{n-1} - a\psi_{k,m}^{n-1} \right) + \tau Z_{k,m}^n, \quad (x_{1,k}, x_{2,m}, t_{n-1}) \in \Omega_{h,\tau}^{(2,n-1)}, \quad (3.6)$$

де  $Z_{k,m}^n = 2\chi_h(u_n - \varphi_n(t_n))$ ;  $\chi_h(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \sum_{j=1}^J \int_{D_0} \delta(x - z_j) dx$ ,  $D_0 = [-h_1, h_1] \times [-h_2, h_2]$ ,

$$\psi_{k,m}^T = 0, \quad k = \overline{0, M_1}, m = \overline{0, M_2}, \quad (3.7)$$

$$\psi_{0,m}^{n+1} = \psi_{M_1,m}^{n+1} = 0, m = \overline{0, M_2}; \quad \psi_{k,0}^{n+1} = \psi_{k,M_2}^{n+1} = 0, k = \overline{0, M_1}. \quad (3.8)$$

За цими схемами розв'язок знаходимо послідовно, починаючи з  $n = N, N - 1, \dots, 1$ .

Отже, пошук невідомих інтенсивностей здійснюється наступним чином:

покладаємо в  $V(t)$  початкові наближення інтенсивностей і проводимо ітераційний процес:

- 1) обчислюємо  $u$  за схемами (3.1)-(3.4);
- 2) знаходимо  $\psi$  за схемами (3.5)-(3.8);
- 3) уточнюємо значення інтенсивностей за формулою (1.34);
- 4) обчислюємо значення функціоналу якості за формулою

$$\mathcal{I}_\alpha(V^{s+1}) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \left( \tilde{u}(z_j, \tau n; V^{s+1}) - \varphi_j(t) \right)^2 + \alpha \|V^{s+1}\|_p^2, \quad \text{де} \quad (3.9)$$

$$\tilde{u}(z_j, \tau n; V^{s+1}) = (1 - \rho_1) \left( (1 - \rho_2) u_{k_0, m_0}^n + \rho_2 u_{k_0, m_0+1}^n \right) + \rho_1 \left( (1 - \rho_2) u_{k_0+1, m_0}^n + \rho_2 u_{k_0+1, m_0+1}^n \right),$$

$$k_0 = [x_{1,j} / h_1], m_0 = [x_{2,j} / h_2], \rho_1 = (x_{1,j} - k_0 h_1) / h_1, \rho_2 = (x_{2,j} - m_0 h_2) / h_2;$$

- 5) якщо  $|\mathcal{I}_\alpha(V^{s+1})| < \varepsilon$ , то  $V^{s+1}$  – шуканий розв'язок, інакше переходимо на 1).

Як було показано в п.2. алгоритми (3.1),(3.2) та (3.5),(3.6) є стійкими і мають порядок апроксимації  $O(\tau^2 + h^2)$ .

На основі даної методики розроблено програму, що дозволяє отримувати наближені значення інтенсивностей джерел, розв'язки прямої та спряженої задач у

вигляді таблиць, 2- та 3- мірних графіків, поданих у додатках, моделює динаміку стану системи.

### 3.2. Чисельне моделювання процесу забруднення при невідомих координатах розташування точкових джерел та їх інтенсивностях

Різницеві схеми ДС-алгоритму для розв'язування прямої (1.56)-(1.57) та оберненої (1.58)-(1.59) задач мають вигляд (3.1)-(3.4) та (3.5)-(3.8).

Пошук невідомих інтенсивностей та координат джерел здійснюється так.

Покладаємо в  $V(t)$  та  $r(t)$  початкові наближення інтенсивностей і проводимо ітераційний процес:

- 1) обчислюємо  $u$  за схемами (3.1)-(3.4);
- 2) знаходимо  $\psi$  за схемами (3.5)-(3.8);
- 3) уточнюємо інтенсивності та координати джерел за формулами

$$\begin{aligned} V^{\beta,n,s+1} &= V^{\beta,n,s} - s_k (\Psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) + 2\alpha V^{\beta,n,s}), \\ r_x^{\beta,n,s+1} &= r_x^{\beta,n,s} - \sigma_k (\bar{\nabla}_x \Psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) V^{\beta,n,s} + 2\gamma r_x^{\beta,n,s}), \\ r_y^{\beta,n,s+1} &= r_y^{\beta,n,s} - \sigma_k (\bar{\nabla}_y \Psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) V^{\beta,n,s} + 2\gamma r_y^{\beta,n,s}), \\ \beta &= 1, 2, \dots, p, n = 0, N, \end{aligned} \quad (3.10)$$

де  $\bar{\nabla}_x \psi, \bar{\nabla}_y \psi$  - різницеві апроксимації другого порядку частинних похідних  $\frac{\partial \psi}{\partial x}$  та

$\frac{\partial \psi}{\partial y}$  відповідно, що мають вигляд

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_x \Psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) &= \\ &= (1 - \rho_1)((1 - \rho_2) \bar{\nabla}_x \Psi_{k_0, m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_x \Psi_{k_0, m_0+1}^{n,s}) + \rho_1((1 - \rho_2) \bar{\nabla}_x \Psi_{k_0+1, m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_x \Psi_{k_0+1, m_0+1}^{n,s}), \\ \bar{\nabla}_y \Psi^{n,s}(r_x^{\beta,n,s}, r_y^{\beta,n,s}) &= \\ &= (1 - \rho_1)((1 - \rho_2) \bar{\nabla}_y \Psi_{k_0, m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_y \Psi_{k_0, m_0+1}^{n,s}) + \rho_1((1 - \rho_2) \bar{\nabla}_y \Psi_{k_0+1, m_0}^{n,s} + \rho_2 \bar{\nabla}_y \Psi_{k_0+1, m_0+1}^{n,s}), \\ \bar{\nabla}_x \Psi_{k_0, m_0}^{n,s} &= \frac{\Psi_{k_0+1, m_0}^{n,s} - \Psi_{k_0-1, m_0}^{n,s}}{2h_1}, \quad \bar{\nabla}_y \Psi_{k_0, m_0}^{n,s} = \frac{\Psi_{k_0, m_0+1}^{n,s} - \Psi_{k_0, m_0-1}^{n,s}}{2h_2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$k_0 = [r_x^{\beta,n,s} / h_1], m_0 = [r_y^{\beta,n,s} / h_2], \rho_1 = (r_x^{\beta,n,s} - k_0 h_1) / h_1, \rho_2 = (r_y^{\beta,n,s} - m_0 h_2) / h_2;$$

4) обчислюємо значення функціоналу якості за формулою

$$\mathcal{I}_\alpha(V^{s+1}) = \sum_{n=0}^N \sum_{j=1}^J \left( \tilde{u}(z_j, \tau n; V^{s+1}) - \varphi_j(t) \right)^2 + \alpha \|V\|_p^2 + \gamma \|r\|_p^2, \text{ де} \quad (3.12)$$

$$\tilde{u}(z_j, \tau n; V^{s+1}) = (1 - \rho_1)((1 - \rho_2)u_{k_0, m_0}^n + \rho_2 u_{k_0, m_0+1}^n) + \rho_1((1 - \rho_2)u_{k_0+1, m_0}^n + \rho_2 u_{k_0+1, m_0+1}^n),$$

$$k_0 = [x_{1,j} / h_1], m_0 = [x_{2,j} / h_2], \rho_1 = (x_{1,j} - k_0 h_1) / h_1, \rho_2 = (x_{2,j} - m_0 h_2) / h_2;$$

5) якщо  $|\mathcal{I}_\alpha(V^{s+1})| < \varepsilon$ , то  $V^{s+1}$  – шуканий розв’язок, інакше переходимо на 1).

### 3.3. Регуляризація точкових джерел забруднень

При побудові чисельних розв’язків задач сингулярної оптимізації для параболічних систем часто приходимо до ситуації, коли розв’язки прямої та спряженої задач не мають достатньої гладкості, а це в свою чергу приводить до задач недиференційованої оптимізації. Для того, щоб уникнути вказаних ускладнень, застосовують ті чи інші методи, апроксимації сингулярних керувань, які моделюються  $\delta$ -функціями Дірака, більш регулярними функціями.

У даній роботі пропонується один зручний у практичному застосуванні метод регуляризації.

#### 3.3.1. Постановка задачі.

Розглянемо систему, функціонування якої описується рівнянням параболічного типу

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} + B(u) = \sum_{i=1}^N \delta(x_1 - x_{1i}) \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) \quad (3.13)$$

в циліндричній області  $Q \equiv \{\Omega \times (0 < t < T)\}$ , де  $\Omega$  - регулярна область в  $R^n$  з кусково гладкою межею  $\partial\Omega$ , циліндрична за змінною  $x_1$ :  $\Omega = [\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_1] \times \Omega'$ . Оператор  $B$  визначений наступним чином

$$B(u) \equiv - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( B_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x)u. \quad (3.14)$$

Тут  $x = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $B_{ij}(x) = B_{ji}(x) \geq 0$ ; а  $\{B_{ij}\}_{i,j=1}^n$  неперервно диференційовані за своїми змінними, а  $b(x)$  – неперервна невід’ємна функція в замиканні  $\bar{\Omega}$ . Крім того, у області  $\Omega$  виконуються нерівності

$$\sum_{i,j=1}^n B_{ij} \xi_i \xi_j \geq \alpha_B \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \xi_i \in \mathbb{R}^1, \quad i = \overline{1, n}, \quad b(x) \geq \sum_{i=1}^n \frac{\partial b_i}{\partial x_i}.$$

Нехай простір  $W_{zp}^+(Q)$  є поповненням гладких в  $\bar{Q}$  функцій, що задовольняють умови

$$u|_{t=0} = 0; \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad (3.15)$$

за нормою

$$\|u\|_{W_{zp}^+} = \left( \int_Q (u_t^2 + \sum_{i,j=1}^n u_{x_i}^2) dQ \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

Через  $W_{zp+}^+(Q)$  позначимо простір, утворений поповненням за (3.16) гладких в  $\bar{Q}$  функцій, що задовольняють умови

$$v|_{t=T} = 0; \quad v|_{x \in \partial\Omega} = 0. \quad (3.18)$$

Нехай  $W_{zp}^-(Q)$  та відповідні негативні простори [6], побудовані за парами просторів  $W_{zp}^+(Q)$ ,  $L_2(Q)$  та  $W_{zp+}^+(Q)$ ,  $L_2(Q)$ . Керування системою (3.13) здійснюється за допомогою впливів, що характеризуються координатами  $x_{1i} \in [\bar{x}_1, \bar{\bar{x}}_1]$  та інтенсивностями  $\varphi_i(t, x_2, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, N}$ . Необхідно на розв’язках системи (3.13) мінімізувати функціонал вигляду

$$J(h) = \int_Q [u(t, x, h) - z_g]^2 dQ + \alpha \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \varphi_i^2 d\Omega' dt + \gamma \sum_{i=1}^N x_{1i}^2, \quad (3.19)$$

де  $z_g$  – відомий елемент простору  $L_2(Q)$ ,  $h = \left( \{x_{1i}\}_{i=1}^N; \{\varphi_i\}_{i=1}^N \right)$  – керування з множини

допустимих керувань  $U_g \subset \mathbb{R}^N[\bar{x}_1, \bar{x}_2] \times L_2^N(Q)$ . Перший доданок в (3.19) має природний фізичний зміст, а другий та третій доданки вводяться для “підсилення” опуклості функціоналу,  $\alpha$  та  $\gamma$  – додатні константи – параметри регуляризації Тихонова, які підбираються експериментально [119]. У роботі [6] досліджено питання існування оптимальних керувань системою (3.13) та показано некоректність задачі оптимального керування при вказаних вище умовах.

### 3.3.2. Побудова і дослідження регуляризованої задачі

Некоректність постановки розглянутої вище задачі можна ліквідувати шляхом регуляризації [119]. Для цього у праву частину (3.13) уведемо залежні від  $\varepsilon$  регуляризуючі множники і запишемо регуляризовану задачу

$$Lu = \sum_{i=1}^N f_\varepsilon(x_1, x_{1i}) \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n), \quad (3.20)$$

$$u|_{t=0} = 0; \quad u|_{x \in \partial\Omega} = 0,$$

$$\text{де } f_\varepsilon(x_1, x_{1i}) = \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon^2} |x_1 - x_{1i}| + \frac{1}{\varepsilon}, & x_1 \in [x_{1i} - \varepsilon, x_{1i} + \varepsilon]; \\ 0, & x_1 \notin [x_{1i} - \varepsilon, x_{1i} + \varepsilon] \end{cases}$$

$$h = \left( \{x_{1i}\}_{i=1}^N; \{\varphi_i\}_{i=1}^N \right) \in U_g \subset \mathbb{R}^N[\bar{x}_1 + \varepsilon, \bar{x}_2 - \varepsilon] \times L_2^N(Q).$$

Оскільки права частина (3.20) належить простору  $L_2(Q)$ , то, як показано в [6], існує єдиний слабкий розв’язок  $u_\varepsilon(t, x) \in W_{zp}^+$  такий, що рівність

$$(u_\varepsilon, L^*v) = \left( \sum_{i=1}^N f_\varepsilon(x_1, x_{1i}) \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n), v \right)$$

виконується для будь-яких функцій  $v(t, x) \in W_{zp+}^+$ . Тепер регуляризовану задачу поставлено коректно.

Доведемо, що одержані задачі еквівалентні. Для цього доведемо збіжність правої частини (3.20) до правої частини (3.13) у нормі простору  $W_{zp+}^-$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Теорема 3.1** *Права частина (3.20) збігається до правої частини (3.13) у нормі простору  $W_{zp+}^-$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .*

**Доведення.** Функціонал у правій частині рівняння (3.13) діє на гладкі в  $\bar{Q}$  функції так:

$$l(v) = \int_0^T \int_{\Omega'} \sum_{i=1}^N v(t, x_{1i}, x_2, \dots, x_n) \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) d\Omega' dt.$$

Використовуючи означення негативної норми, отримаємо

$$\begin{aligned} & \left\| \sum_{i=1}^N f_\varepsilon(x_1, x_{1i}) \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^N \delta(x_1 - x_{1i}) \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) \right\|_{W_{\varepsilon p}^-} = \\ & = \sup_{\substack{v \neq 0; \\ v \in W_{\varepsilon p}^+}} \frac{\left| \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) \left( \int_{x_{1i}-\varepsilon}^{x_{1i}+\varepsilon} f_\varepsilon(x_1, x_{1i}) v(t, x) dx_1 - v(t, x_{1i}, x_2, \dots, x_n) \right) d\Omega' dt \right|}{\|v\|_{W_{\varepsilon p}^+}} \leq K\varepsilon, \end{aligned}$$

де  $K > 0$  – деяка не залежна від  $\varepsilon$  константа. Тобто, в просторі  $W_{\varepsilon p}^-$  права частина (3.20) збігається до правої частини (3.13) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Теорему доведено.**

Отже, внаслідок [6] оптимальне керування системою (3.20), (3.15), (3.19) існує і слабо збігається до оптимального керування системою (3.13), (3.15), (3.19) в просторі  $\mathbb{R}^N[\bar{x}_1, \bar{x}_2] \times L_2^N(Q)$ .

Вивчимо диференціальні властивості критерію якості (3.19) в задачі оптимального керування (3.20), (3.15), (3.19).

**Теорема 3.2** *Критерій якості (3.19) диференційовний за Гато і компоненти його градієнта визначаються формулами*

$$\frac{\partial J}{\partial x_{1i}} = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\Omega'} \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) \left( \int_{x_{1i}}^{x_{1i}+\varepsilon} v(t, x) dx_1 - \int_{x_{1i}-\varepsilon}^{x_{1i}} v(t, x) dx_1 \right) d\Omega' dt + 2\gamma x_{1i}, \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \varphi_i} &= \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega'} \left( \int_{x_{1i}-\varepsilon}^{x_{1i}} \left[ \frac{1}{\varepsilon} (x_1 - x_{1i}) + 1 \right] v(t, x) dx_1 - \int_{x_{1i}}^{x_{1i}+\varepsilon} \left[ \frac{1}{\varepsilon} (x_1 - x_{1i}) - 1 \right] v(t, x) dx_1 \right) d\Omega' dt + \\ &+ 2\alpha \varphi_i. \end{aligned} \quad (3.30)$$

**Доведення.** Надамо керуванню  $h$  приросту  $\lambda \Delta h$  ( $h, \lambda \Delta h, h + \lambda \Delta h \in U_g$ ). Тоді права частина (3.20) набере вигляду

$$\sum_{i=1}^N f_{\varepsilon}(x_1, x_{1i} + \lambda \Delta x_{1i}) [\varphi_i(x) + \lambda \Delta \varphi_i(x)], \quad (3.23)$$

якому відповідає слабкий розв'язок  $u(t, x, h + \lambda \Delta h)$ . Визначимо приріст стану даної системи  $\Delta u(h) = u(h + \lambda \Delta h) - u(h)$ . З лінійності оператора  $L$  та однорідності граничних умов випливає, що  $\Delta u(h)$  є розв'язком крайової задачі

$$L\Delta u = \Delta f, \quad \Delta u|_{t=0} = 0, \quad \Delta u|_{x \in \partial\Omega} = 0 \quad (3.24)$$

з правою частиною

$$\Delta f = \sum_{i=1}^N [f_{\varepsilon}(x_1, x_{1i} + \lambda \Delta x_{1i}) - f_{\varepsilon}(x_1, x_{1i})] \varphi_i(x) + f_{\varepsilon}(x_1, x_{1i} + \lambda \Delta x_{1i}) \lambda \Delta \varphi_i(x).$$

Розв'язок  $\Delta u$  задачі (3.24) існує, єдиний і для  $\forall v \in W_{2p+}^+$  задовольняє співвідношення [6]

$$(L^* v, \Delta u) = (\Delta f, v). \quad (3.25)$$

Дослідимо праву частину (3.25):

$$\begin{aligned} (\Delta f, v) &= \int_{\Omega} \int_0^T \sum_{i=1}^N [f_{\varepsilon}(x_1, x_{1i} + \lambda \Delta x_{1i})] \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) v(t, x) + \\ &+ \lambda f_{\varepsilon}(x_1, x_{1i} + \lambda \Delta x_{1i}) \Delta \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) v(t, x) dt d\Omega = I_1 + I_2. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Із врахуванням вигляду функцій  $f_{\varepsilon}$  отримаємо

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \int_{x_{1i} + \Delta x_{1i} - \varepsilon}^{x_{1i}} -\frac{1}{\varepsilon^2} \lambda \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) v(t, x) \Delta x_{1i} dx_1 d\Omega' dt + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \int_{x_{1i} + \Delta x_{1i}}^{x_{1i} + \varepsilon} \frac{1}{\varepsilon^2} \lambda \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) v(t, x) \Delta x_{1i} dx_1 d\Omega' dt + o(\lambda), \\ I_2 &= \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \int_{x_{1i} + \Delta x_{1i} - \varepsilon}^{x_{1i} + \Delta x_{1i} + \varepsilon} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} (x_1 - x_{1i} - \lambda \Delta x_{1i}) + \frac{1}{\varepsilon} \right] \lambda \Delta \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) v(t, x) dx_1 d\Omega' dt. \end{aligned}$$

Розділимо обидві частини (3.25) на  $\lambda$ , а потім спрямуємо  $\lambda \rightarrow +0$

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +0} \left( L^* v, \frac{\Delta u}{\lambda} \right) &= \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) \left( \int_{x_i}^{x_i+\varepsilon} v(t, x) dx_1 - \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i} v(t, x) dx_1 \right) \Delta x_{1i} d\Omega' dt + \\ &+ \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \Delta \varphi_i(t, x_2, \dots, x_n) \left( \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} (x_1 - x_{1i}) + \frac{1}{\varepsilon} \right] v(t, x) dx_1 - \right. \\ &\left. - \int_{x_i}^{x_i+\varepsilon} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} (x_1 - x_{1i}) - \frac{1}{\varepsilon} \right] v(t, x) dx_1 \right) d\Omega' dt. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Оскільки права частина (3.27) не залежить від  $\lambda$ , то існує границя

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\Delta u}{\lambda} \stackrel{def}{=} u'(t, x, h).$$

Розглянемо приріст функціоналу якості  $J(h)$ :

$$\begin{aligned} \Delta J(h) &= J(h + \lambda \Delta h) - J(h) = \int_Q \left[ u(t, x; h + \lambda \Delta h) - z_g \right]^2 - \left[ u(t, x; h) - z_g \right]^2 dQ + \\ &+ \alpha \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} [(\varphi_i + \lambda \Delta \varphi_i)^2 - \varphi_i^2] d\Omega' dt + \gamma \sum_{i=1}^N \left( (x_{1i} + \lambda \Delta x_{1i})^2 - x_{1i}^2 \right) = \\ &= \int_Q \Delta u \left[ u(t, x; h + \lambda \Delta h) + u(t, x; h) - 2z_g \right] dQ + \\ &+ 2\alpha \lambda \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \varphi_i \Delta \varphi_i d\Omega' dt + 2\gamma \lambda \sum_{i=1}^N x_{1i} \Delta x_{1i} + o(\lambda). \end{aligned} \quad (3.28)$$

За означенням диференційовності за Гато маємо

$$\lim_{\lambda \rightarrow +0} \frac{\Delta J}{\lambda} = 2 \int_Q u'(t, x; h) \left[ u(t, x; h) - z_g \right] dQ + 2\alpha \sum_{i=1}^N \int_0^T \int_{\Omega'} \varphi_i \Delta \varphi_i d\Omega' dt + 2\gamma \sum_{i=1}^N x_{1i} \Delta x_{1i}. \quad (3.29)$$

З (3.29) випливає диференційованість за Гато функціоналу  $J(h)$ .

Розглянемо спряжену задачу

$$L^* v \equiv -\frac{\partial v}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left( B_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - \sum_{i,j=1}^n b_{ij}(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} + b(x)v = 2[u(t, x; h) - z_g], \quad v \in W_{2p}^1. \quad (3.30)$$

Підставимо в співвідношення (3.27) замість  $v$  розв'язок задачі (3.29), співставимо (3.27) та (3.29) і отримаємо формули (3.21) та (3.22).

Тобто, градієнт функціоналу якості  $J(h)$  існує і його компоненти визначаються за формулами (3.21) – (3.22).

**Терему доведено.**

### 3.3.3. Алгоритм побудови розв'язку задачі оптимального керування

Для знаходження оптимального керування системою (3.20) використаємо ітераційний процес. При  $s = 0$  задано початковий стан системи. Перехід з  $s$ -ї на  $(s+1)$  ітерацію здійснюється так:

1) розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$Lu^s = \sum_{i=1}^N f_{\varepsilon}(x_1, x_{1i}^s) \varphi_i^s(t, x_2, \dots, x_n), \quad 0 < t \leq T, \quad (3.31)$$

$$u^s|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$u^s(0) = 0; \quad (3.32)$$

2) знаходиться спряжений стан

$$L^*v^s = 2[u(t, x; h^s) - z_g], \quad T > t \geq 0, \quad (3.33)$$

$$v^s|_{\partial\Omega} = 0; v^s(T) = 0; \quad (3.34)$$

3) визначаються нові наближення для координат  $x_1$  та потужностей  $\varphi$  джерел

$$\begin{aligned} x_{1i}^{s+1} = & x_{1i}^s + \frac{\sigma^{s+1}}{\varepsilon^2} \int_0^T \int_{\Omega'} \varphi_i^s(t, x_2, \dots, x_n) \left( \int_{x_{1i}^s}^{x_{1i}^s + \varepsilon} v^s(t, x) dx_1 - \int_{x_{1i}^s - \varepsilon}^{x_{1i}^s} v^s(t, x) dx_1 \right) d\Omega' dt + \\ & + 2\gamma\sigma^{s+1}x_{1i}^s, \\ \varphi_i^{s+1} = & \varphi_i^s + \frac{\rho^{s+1}}{\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega'} \left( \int_{x_{1i}^s - \varepsilon}^{x_{1i}^s} \left[ \frac{1}{\varepsilon}(x_1 - x_{1i}^s) + 1 \right] v^s(t, x) dx_1 - \right. \\ & \left. - \int_{x_{1i}^s}^{x_{1i}^s + \varepsilon} \left[ \frac{1}{\varepsilon}(x_1 - x_{1i}^s) - 1 \right] v^s(t, x) dx_1 \right) d\Omega' dt + 2\alpha\rho^{s+1}\varphi_i^s, \quad i = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Тут  $h^0 = \left( \{x_{1i}^0\}_{i=1}^N, \{\varphi_i^0\}_{i=1}^N \right)$  – початкове наближення,  $s$  – номер ітерації. Швидкість збіжності ітераційного процесу регулюємо вибором крокових множників  $\sigma^s$  та  $\rho^s$  з урахуванням умов  $\sum_{s=1}^{\infty} \sigma^s = \infty$ ,  $\sum_{s=1}^{\infty} \rho^s = \infty$ ,  $\rho^s \rightarrow 0$ ,  $\sigma^s \rightarrow 0$ ,  $s \rightarrow \infty$ . Умова зупинки ітераційного процесу обирається евристично:

$$\max \left\{ \left\| x_1^{s+1} - x_1^s \right\|_{\mathbb{R}^N_{[\bar{x}_1, \bar{x}_2]}}, \left\| \varphi^{s+1} - \varphi^s \right\|_{[L_2(Q)]^N} \right\} < \varepsilon \quad \text{або} \quad |J(h)| < \varepsilon.$$

### 3.3.4. Дискретна модель крайової задачі

Різницьові схеми побудуємо на прикладі прямокутної області  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , тобто  $\Omega = \{x \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_n), 0 < x_i < l_i, i = \overline{1, n}\}$ . Введемо в  $\Omega$  рівномірну за кожною змінною сітку з кроками  $h_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

Нехай  $B_{ij}(x) \equiv B_{ji}(x) \equiv 0$  при  $i \neq j$ , тобто, оператор  $B$  не містить мішаних похідних (якщо це не так, то за допомогою відомої заміни змінних це легко зробити). Тоді для чисельного розв'язування крайових задач (3.31), (3.32) та (3.33), (3.34) ефективним виявляється ДС-алгоритм, який досліджено у розділі 2.

Область  $[0, T] \times Q$  покриваємо рівномірною сіткою  $\Omega_{h, \tau} = \{(x_{1, i_1}, \dots, x_{n, i_n}, t_m) \mid x_{\alpha i_\alpha} = kh_\alpha, t_m = m\tau, i_\alpha = \overline{0, M_\alpha}, h_\alpha = 1/M_\alpha, \alpha = \overline{1, n}, m = \overline{1, P}; \tau = T/P\}$  і вводимо на ній функції дискретного аргументу  $u_{i_1 i_2 \dots i_n}^m = u(\tau m, i_1 h_1, \dots, i_n h_n)$ ,  $v_{i_1 i_2 \dots i_n}^m = v(\tau m, i_1 h_1, \dots, i_n h_n)$ ,  $\varphi_{i_2 i_3 \dots i_n}^m = \varphi(m\tau, i_2 h_2, \dots, i_n h_n)$  та

$$f_{i_j} = \begin{cases} -\frac{1}{h_1^2} |i_1 h_1 - x_{1j}| + \frac{1}{h_1}, & i_1 h_1 \in [x_{1j} - \varepsilon, x_{1j} + \varepsilon], \\ 0, & i_1 h_1 \notin [x_{1j} - \varepsilon, x_{1j} + \varepsilon]; \end{cases} \quad j = \overline{1, N}.$$

Сіткову область розіб'ємо на дві підобласті:  $\Omega_{h, \tau}^{(1)} = \{(x_{1, i_1}, \dots, x_{n, i_n}, t_m) \mid \sum_{j=1}^n i_j + m - \text{парне}\}$  та  $\Omega_{h, \tau}^{(2)}$ , до якої входять решта точок  $\Omega_{h, \tau}$ .

Тоді для задачі (3.13), (3.15), (3.16) маємо ДС-алгоритм

$$u_i^{2m+1+l} = u_i^{2m+l} - \tau B(u_i^{2m+l}) + \tau \sum_{j=1}^N f_{i_1 j}^\varepsilon \varphi_{i_2, \dots, i_n}^{2m+l},$$

де

$$B(u_i^{2m+l}) = - \sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{h_\alpha} \left( B_{i_\alpha+1/2}^{\alpha\alpha} \frac{u_{i_\alpha+1}^{2m+l} - u_i^{2m+l}}{h_\alpha} - \right. \\ \left. - B_{i_\alpha-1/2}^{\alpha\alpha} \frac{u_i^{2m+l} - u_{i_\alpha-1}^{2m+l}}{h_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^n \frac{u_{i_\alpha+1}^{2m+l} - u_{i_\alpha-1}^{2m+l}}{2h_\alpha} + b_i u_i^{2m+l} \quad (3.36)$$

на внутрішніх точках сіткової множини  $\Omega_{h,\tau}^{(1+l)}$  та

$$u_i^{2m+1+l} = u_i^{2m+l} - \tau B(u_i^{2m+l}) + \tau \sum_{j=1}^N f_{i_1 j}^\varepsilon \varphi_{i_2, \dots, i_n}^{2m+1+l} \quad (3.37)$$

на внутрішніх точках  $\Omega_{h,\tau}^{(2-l)}$ .

Тут покладено  $i_\alpha \pm 1 = (i_1, i_2, \dots, i_\alpha \pm 1, \dots, i_n)$ ,  $i_\alpha \pm 1/2 = (i_1, i_2, \dots, i_\alpha \pm 1/2, \dots, i_n)$ ,  $i = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ .

Система різницевих рівнянь доповнюється початковими

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^0 = 0, \quad i_\alpha = \overline{0, M_\alpha}, \quad \alpha = \overline{1, n} \quad (3.38)$$

та граничними умовами

$$u_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{2m+1+l} = 0, \quad i_\alpha = 0, \quad i_\alpha = M_\alpha, \quad \alpha = \overline{1, n}. \quad (3.39)$$

Результати, одержані за формулами (3.36)-(3.39) при  $l=0$  сприймаються як допоміжні, а при  $l=1$  – як розв'язок задачі.

Аналогічно для спряженого стану схеми ДС-методу мають вигляд :

для  $(x_{1, i_1}, \dots, x_{n, i_n}, t_{2m-1+l}) \in \Omega_{h,\tau}^{(1+l)}$

$$v_i^{2m-1+l} = v_i^{2m+l} - \tau B^*(v_i^{2m+l}) + 2\tau(u_i^{2m+l} - u_g(i_1 h_1, \dots, i_n h_n, \tau m)), \quad (3.40)$$

для  $(x_{1, i_1}, \dots, x_{n, i_n}, t_{2m-1+l}) \in \Omega_{h,\tau}^{(2-l)}$

$$v_i^{2m-1+l} = v_i^{2m+l} - \tau B^*(v_i^{2m-1+l}) + 2\tau(u_i^{2m-1+l} - u_g(i_1 h_1, \dots, i_n h_n, \tau(m-1))), \quad (3.41)$$

а на гранці сіткової області  $\Omega_{h,\tau}$

$$v_i^p = 0, \quad (3.42)$$

$$v_i^{2m-1+l} = 0. \quad (3.43)$$

За цими схемами розв'язок знаходиться послідовно, починаючи з  $m = [P/2], [P/2]-1, \dots, 1$ . Тут

$$B^*(u_i^{2m+l}) = -\sum_{\alpha=1}^n \frac{1}{h_\alpha} \left( B_{i_\alpha+1/2}^{\alpha\alpha} \frac{u_{i_\alpha+1}^{2m+l} - u_i^{2m+l}}{h_\alpha} - \right. \\ \left. - B_{i_\alpha-1/2}^{\alpha\alpha} \frac{u_i^{2m+l} - u_{i_\alpha-1}^{2m+l}}{h_\alpha} \right) - \sum_{\alpha=1}^n \frac{u_{i_\alpha+1}^{2m+l} - u_{i_\alpha-1}^{2m+l}}{2h_\alpha} + b_i u_i^{2m+l}.$$

Формули (3.41) уточнення інтенсивностей та координат джерел апроксимуємо квадратурними формулами другого порядку при  $\varepsilon = h_1$ .

Проведено обчислювальні експерименти з використанням побудованих алгоритмів з реальними фізичними даними, взятими при спостереженні процесу розповсюдження забруднень. Результати обчислювальних експериментів, що представлені у розділі 5, свідчать про ефективність розроблених алгоритмів.

### 3.4. Висновки

- проведено коректну регуляризацію вхідної постановки задачі ідентифікації та встановлено зв'язок між вхідною та регуляризованою моделлю;
- побудовано алгоритми наближеного чисельного розв'язання задач ідентифікації точкових джерел як з відомими координатами, так із невідомими;
- проведено обчислювальні експерименти, реалізовано комп'ютерну модель процесу розповсюдження забруднень та зроблено аналіз.

## РОЗДІЛ 4

### ДС-АЛГОРИТМИ ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ, ЩО ОПИСУЮТЬСЯ СИСТЕМОЮ РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА

В даному розділі розглянуто задачу проявлення прихованого голографічного зображення. Досліджено ДС-алгоритм при застосуванні його до нелінійних рівнянь руху системи Нав'є-Стокса.

Для стаціонарного випадку глибокі теоретичні результати, що стосуються існування та єдиності розв'язку, зокрема доведення важливої теорема про слід, отримали ще 50-х роках 20-го сторіччя Ладиженська [1-3], Ліонс та Мадженес [29], Бенсусан, Темам [31] та інші. У варіаційній постановці рівняння Стокса було вперше розглянуто в роботах Лере [153-155]. Додаткові важливі результати, що стосуються регулярності розв'язку отримали Агмон, Дугліс, Ниренберг [156], Нечас [163], Каттабрігі [162], Солонніков, Скаділов [164], Воровіч, Юдовіч та інші [25,38,162]. Результати по неєдиності стаціонарних розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса належать Рабіновичу та Вельте [166,167].

Результати з існування та єдиності розв'язку лінеаризованої еволюційної системи рівнянь Нав'є-Стокса є частинним випадком відповідних результатів для лінійних варіаційних рівнянь [29]. Зважаючи на надзвичайну складність теорії для нелінійних нестационарних систем Нав'є-Стокса, більшість важливих питань стосовно існування, єдиності, гладкості регулярності розв'язку залишаються відкритими. Озін [27] звів розв'язування задачі Коші для рівнянь Нав'є-Стокса до системи інтегральних рівнянь, побудував функцію Гріна і отримав перші результати стосовно локальної розв'язності задачі Коші. Пізніше Лере [153-155] отримав ряд апіорних оцінок для функції Гріна та її похідних і довів глобальну розв'язність задачі Коші для нелінійної системи Нав'є-Стокса для двовимірного випадку. В 1951 р. Хопф для задачі Коші у випадку  $R^3$  довів існування принаймні одного слабкого розв'язку [158,159]. Аналогічні результати отримала Ладиженська [23-27]. Дж. Серрін та Сафер дещо посилили результати Хопфа та Ладиженської [161]. Вагомі

результати розв'язання лінеаризованої задачі Нав'є-Стокса з неповними даними отримав Подлипенко [184].

Нестаціонарні рівняння Нав'є-Стокса утворюють мішані системи гіперболічно-параболічних або еліптично-параболічних рівнянь відповідно [37]. Для нестислої рідини вони подаються у вигляді систем рівнянь у фізичних змінних швидкість-тиск чи систем відносно функцій току і вихора та тиску. В обох випадках рівняння Пуассона для тиску або для вихору розв'язуються прямими [37,75], ітераційними методами чи методом усталення [45,49,51] та SIMPLE –методом [37]. При розв'язуванні систем рівнянь Нав'є – Стокса для нестислої рідини використовується ідея штучної стислості [76] із застосуванням методів розщеплення [77], часток в комірці Ф.Харлоу [78], маркерів і комірок та великих часток [79], Біма –Уормінга [80], неявні схеми методу змінних напрямків, метод Дюффорта–Френклена [37], матричний метод [53], метод коллокації и наименьших квадратів[70].

Найбільш вживаними методами розв'язування задач гідродинаміки є метод скінчених елементів (МСЕ) [70,113], методи, побудовані на основі методу характеристик і скінченно-різниці методи [81], які з успіхом застосовуються для чисельного розв'язання рівнянь Нав'є-Стокса [8, 44,46,47,63,73]. На відміну від МСЕ скінченно-різницеві методи більш універсальні, гнучкі та прості при реалізації. Для лінійних диференціальних рівнянь значний вклад в побудову та дослідження різницевих методів внесли С.К.Годунов і А.С. Рябенський [82], А.А. Самарський, А.В. Гулин [83]; І.І. Ляшко, І.М. Великоіваненко, А.В. Гладкий, Г.Е. Мистецький [84,85], В.Л. Макаров [9], Г.М. Положій [86], Р.Д. Рихтмайєр та К.Мортон [50], Ю.І.Шокін, М.М.Яненко [87], та інші.

Задачі оптимального керування для рівнянь Нав'є-Стокса вивчалися в роботах Кювельє[157], Ліонса[2], та для лінеаризованих рівнянь Нав'є-Стокса в роботах Темама[149], С.І. Лашка, Д.А. Номировського [148] та інших вчених [150,168,169].

В даному розділі розглядаються рівняння Нав'є-Стокса в контексті математичної моделі, що описує процес проявлення прихованого голографічного

зображення. Цю модель досліджували в більш широкому ракурсі О.Ю.Грищенко[122], Л.І.Потапенко[187] та інші. Зокрема, О.Ю. Грищенко провів декомпозицію комплексних глобальних моделей на простіші агреговані моделі для динамічних і кінетичних процесів проявлення голографічних зображень на термопластичних носіях та динамічних і релаксаційних процесів в робочих середовищах газодинамічних і фоторекомбінаційних лазерів; розробив загальні принципи чисельного моделювання вказаних процесів; побудував дво- і тришарові ітераційні алгоритми для розв'язування систем рівнянь Нав'є-Стокса для нестислої рідини; розв'язав задачу оптимального керування тепловим джерелом.

Для рівнянь руху в змінних “швидкість”-”тиск” побудовано, теоретично обгрунтовано двокроковий симетризований алгоритм з врахуванням граничних умов. Проведено дослідження задачі оптимального керування для лінеаризованої системи Нав'є-Стокса, зокрема досліджено диференціальні властивості критерія якості, а також розроблена ітераційна схема для знаходження оптимального розв'язку.

В параграфі 4.2 проводиться аналіз складних граничних умов (1.66)-(1.71), що враховують специфіку процесу рельєфоутворення і на модельній задачі досліджується вплив апроксимації цих умов на розв'язок різницевої задачі, побудованої на основі двокрокового симетризованого методу.

#### **4.1. ДС-алгоритми для чисельного моделювання динамічних процесів ньютонівської рідини, що описуються нестационарними рівняннями Нав'є-Стокса та теплопровідності**

##### **4.1.1. Математична модель з періодичними крайовими умовами**

Як етап дослідження математичної моделі проявлення прихованого голографічного зображення (1.61)-(1.70) розглянемо початково-крайову задачу для рівнянь Нав'є-Стокса з врахуванням балансу енергії в безрозмірних змінних

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (4.14)$$

$$D \equiv \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (x, y) \in \Omega_1, \quad t > 0; \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + q(y, t), \quad (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad t > 0, \quad (4.16)$$

де  $\text{Re}$  – число Рейнольдса,  $\text{Re} = U_0 d / \nu$ ,  $U_0$  – характерна швидкість рідини,  $d$  – товщина термопластичної плівки (див. рис.1.1 параграфу 1.3),  $l$  – товщина підложки,  $l \gg d$ ,  $q(y, t)$  – теплове джерело,  $k = \lambda / \rho c$ ,  $\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності,  $\rho$  – густина рідини,  $c$  – питома теплоємність; початкові умови (1.65); на границі по змінній  $x$  області  $\Omega_1$  задано умови періодичності розв'язку (1.66),(1.67), а на границі по змінній  $y$ : на  $y = d$  умови 1-го роду (1.68), та

$$u|_{y=0} = u^{(0)}(x, t); \quad v|_{y=0} = v^{(0)}(x, t); \quad p|_{y=0} = p^{(0)}(x, t); \quad (4.17)$$

При побудові розв'язку таких задач виникають ускладнення, пов'язані з необхідністю інтегрувати рівняння нерозривності. Переважно, стійкі розрахунки одержано, коли замість безпосереднього використання рівняння нерозривності уводилось рівняння Пуассона для тиску або рівняння нерозривності модифікувалось шляхом уведення штучної стислості[37].

Після диференціювання (4.13) по  $x$ , (4.14) по  $y$  та додавання результату з урахуванням (4.3), одержуємо рівняння для знаходження тиску

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2(u^2)}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2(vu)}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2(v^2)}{\partial y^2} - \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right), \quad (4.18)$$

#### 4.1.2. Різницева модель

Для побудови розв'язку задачі (4.13),(4.14),(4.16)-(4.18) уведемо сіткову область, яка покриває область зміни неперервних аргументів  $\Omega_{h,\tau} = \{(x_i, y_j, t_n) | x_i = ih_1, y_j = jh_2,$

$t_n = n\tau$ ,  $i = \overline{0, K}$ ,  $j = \overline{0, M}$ ,  $n = \overline{0, N}$ ,  $h_1 = l / K$ ,  $h_2 = l_1 / M$ ,  $\vec{h} = (h_1, h_2)$ , на якій задачу (4.13),(4.14),(4.16)-(4.18) апроксимуємо системою різницевих рівнянь.

Розв'язування різницевої задачі проведемо по такій схемі. Спочатку визначимо значення функції тиску на непарному часовому кроці  $2n + 1$  як розв'язок скінченно-різницевого рівняння Пуассона, а потім значення проєкцій вектора швидкості  $u$ ,  $v$  та температури  $T$  на наступному парному кроці  $2n + 2$ , ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ).

Рівняння Пуассона апроксимуємо на п'яти-точковому шаблоні

$$\Delta_h P_{i,j}^{2n+1} = S_{i,j}^{2n}, \quad (4.19)$$

$$\text{де } S_{i,j}^{2n} = -\left((u_{i+1,j}^{2n})^2 - 2(u_{i,j}^{2n})^2 + (u_{i-1,j}^{2n})^2\right)/h_1^2 - \left((v_{i,j+1}^{2n})^2 - 2(v_{i,j}^{2n})^2 + (v_{i,j-1}^{2n})^2\right)/h_2^2 - \\ -2U_3 + D_{i,j}^{2n} / \tau + \frac{1}{\text{Re}} \Delta_h D_{i,j}^{2n}.$$

$$\text{Тут } D_{i,j}^n = L_1 u_{i,j}^n + L_2 v_{i,j}^n, \quad L_1 u_{i,j}^n = (u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n) / (2h_1), \quad L_2 v_{i,j}^n = (v_{i,j+1}^n - v_{i,j-1}^n) / (2h_2),$$

$$\Delta_h P_{i,j}^{2n+1} = (P_{i+1,j}^{2n+1} - 2P_{i,j}^{2n+1} + P_{i-1,j}^{2n+1}) / h_1^2 + (P_{i,j+1}^{2n+1} - 2P_{i,j}^{2n+1} + P_{i,j-1}^{2n+1}) / h_2^2,$$

$$U_3 = 2 \left[ u_{i+1,j+1}^{2n} v_{i+1,j+1}^{2n} - u_{i+1,j-1}^{2n} v_{i+1,j-1}^{2n} - u_{i-1,j+1}^{2n} v_{i-1,j+1}^{2n} + u_{i-1,j-1}^{2n} v_{i-1,j-1}^{2n} \right] / (4h_1 h_2).$$

Праву частину рівняння Пуассона побудовано, виходячи з того, що, хоча за постановкою диференціальної задачі рівняння (4.16) виконується в усіх точках області в довільний момент часу, але із-за присутності обчислювальної похибки  $D_{i,j}^{2n} \neq 0$ , а  $D_{i,j}^{2n+2} = 0$  ще не збурене обчислювальною похибкою. Спроби ряду авторів [37] вважати  $D_{i,j}^{2n} = 0$  не покращила результат. Такій підхід сприяє накопиченню обчислювальної похибки в результаті неузгодженості розв'язків рівнянь Пуассона, нерозривності та кількості руху.

Крайову задачу для рівняння (4.19) розв'язуємо методом послідовної верхньої

релаксації [37], ітераційне рівняння якого має вигляд

$$\begin{aligned} & \left( P_{i+1,j}^{2n+1,r+1} - 2 \left( \frac{1}{\varpi} P_{i,j}^{2n+1,r+1} + \frac{\varpi-1}{\varpi} P_{i,j}^{2n+1,r} \right) + P_{i-1,j}^{2n+1,r} \right) / h_1^2 + \\ & + \left( P_{i,j+1}^{2n+1,r+1} - 2 \left( \frac{1}{\varpi} P_{i,j}^{2n+1,r+1} + \frac{\varpi-1}{\varpi} P_{i,j}^{2n+1,r} \right) + P_{i,j-1}^{2n+1,r} \right) / h_2^2 = S_{i,j}^{2n}, \end{aligned}$$

звідки можна записати ітераційний алгоритм по індексу  $r$

$$P_{i,j}^{r+1} = P_{i,j}^r + \frac{\varpi}{2(1+\beta^2)} \left[ P_{i+1,j}^r + P_{i-1,j}^{r+1} + \beta^2 P_{i,j+1}^r + \beta^2 P_{i,j-1}^{r+1} - h^2 S_{i,j} - 2(1+\beta^2) P_{i,j}^r \right], \quad (4.20)$$

де  $\beta = h_1/h_2$ ,  $r=1,2,3,\dots$  – номер ітерації;  $i = \overline{0, K}$ ;  $j = \overline{2, M-1}$ , часовий індекс “ $n$ ” опущений для спрощення запису;  $\varpi$  – параметр релаксації  $1 \leq \varpi \leq 2$ .

Для знаходження функцій  $u$ ,  $v$  використовуємо ДС-алгоритм, описаний у розділі 2 з введеними там позначеннями.

При переході з  $2n$ -го на  $2n+2$  часовий крок з підобластю  $\Omega_{h\tau}^{(1,2n+1+l)}$  пов’язуємо явні скінченно – різницеві рівняння, які апроксимують рівняння руху (4.13),(4.14)

$$u_{i,j}^{2n+1+l} = u_{i,j}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1(u_{i,j}^{2n+l})^2 - L_2(uv)_{i,j}^{2n+l} - L_1 P_{i,j}^{2n+l} + \Delta_h u_{i,j}^{2n+l} / \text{Re} \right] \quad (4.21)$$

$$v_{i,j}^{2n+1+l} = v_{i,j}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1(uv)_{i,j}^{2n+l} - L_2(v_{i,j}^{2n+l})^2 - L_2 P_{i,j}^{2n+l} + \Delta_h v_{i,j}^{2n+l} / \text{Re} \right] \quad (4.22)$$

$$\left( \frac{T_{i,j}^{2n+1+l} - T_{i,j}^{2n+l}}{\tau} + u_{i,j}^{2n+1+l} L_1 T_{i,j}^{2n+l} + v_{i,j}^{2n+1+l} L_2 T_{i,j}^{2n+l} \right) = k \Delta_h T_{i,j}^{2n+l} + q_j^{2n+l}, \quad (4.23)$$

а з вузлами сіткової області  $\Omega_{h\tau}^{(2,2n+1+l)}$  – неявні різницеві рівняння

$$u_{i,j}^{2n+1+l} = u_{i,j}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1(u_{i,j}^{2n+1+l})^2 - L_2(uv)_{i,j}^{2n+1+l} - L_1 P_{i,j}^{2n+1+l} + \Delta_h u_{i,j}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \quad (4.24)$$

$$v_{i,j}^{2n+1+l} = v_{i,j}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1(uv)_{i,j}^{2n+1+l} - L_2(v_{i,j}^{2n+1+l})^2 - L_2 P_{i,j}^{2n+1+l} + \Delta_h v_{i,j}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \quad (4.25)$$

та теплопровідності

$$\left( \frac{T_{i,j}^{2n+1+l} - T_{i,j}^{2n+l}}{\tau} + u_{i,j}^{2n+1+l} L_1 T_{i,j}^{2n+1+l} + v_{i,j}^{2n+1+l} L_2 T_{i,j}^{2n+1+l} \right) = k \Delta_h T_{i,j}^{2n+1+l} + q_j^{2n+1+l}. \quad (4.26)$$

Тут  $l = 0$  на непарних часових кроках та  $l = 1$  на парних.

Знаходження поля швидкостей починаємо з точок  $(x_i, y_j, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(1,2n+1)}$  за явними схемами (4.21)-(4.23) при  $l = 0$ . У результаті знаходимо усі значення функції  $u_{i\pm 1, j}^{2n+1}, u_{i, j\pm 1}^{2n+1}$ , та  $T_{i\pm 1, j}^{2n+1}, T_{i, j\pm 1}^{2n+1}$ . Це дозволяє явно визначити функції  $u_{i,j}^{2n+1}, v_{i,j}^{2n+1}$  та  $T_{i,j}^{2n+1}$  в точках  $\forall (x_i, y_j, t_{2n+1}) \in \Omega_{h\tau}^{(2,2n+1)}$  за допомогою неявних формул (4.24)-(4.26). Одержані значення функцій  $u, v$  та  $T$  приймаються як допоміжні. Перейшовши до наступного часового кроку за тією ж схемою при  $l = 1$  обчислимо значення  $u_{i,j}^{2n+2}, v_{i,j}^{2n+2}$  та  $T_{i,j}^{2n+2}$ , які приймаємо за розв'язок задачі.

Умови періодичності на границях  $x = 0, x = a$  апроксимуються так

$$u_{1,j}^n = u_{K+1,j}^n; v_{1,j}^n = v_{K+1,j}^n; T_{1,j}^n = T_{K+1,j}^n; P_{1,j}^n = P_{K+1,j}^n; j = \overline{0, M}; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$u_{i,1}^n = u_{i,M+1}^n; v_{i,1}^n = v_{i,M+1}^n; T_{i,1}^n = T_{i,M+1}^n; P_{i,1}^n = P_{i,M+1}^n; i = \overline{0, K}; n = 1, 2, 3, \dots \quad (4.27)$$

Легко встановити, що у даному разі похибка апроксимації диференціальної задачі становить  $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$ .

Оскільки методи дослідження збіжності і стійкості скінченно-різницевого схем для нелінійних задач розроблено недостатньо, то, враховуючи малість швидкості потоку, достатньо велику кінематичну в'язкість, а отже малість числа Рейнольдса [37], дослідження стійкості і збіжності проведемо на прикладі лінеаризованого рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad \alpha = \frac{1}{\text{Re}} > 0 \quad (4.28)$$

при заданому початковому значенні розв'язку і його періодичності за просторовим змінними. В цьому разі формули (4.21) та (4.24) наберуть вигляду

$$u_{i,j}^{2n+1+l} = u_{i,j}^{2n+l} + \tau\alpha\Delta_h u_{i,j}^{2n+l}, \quad (4.29)$$

$$u_{i,j}^{2n+1+l} = u_{i,j}^{2n+l} + \tau\alpha\Delta_h u_{i,j}^{2n+1+l}. \quad (4.30)$$

Нехай функція  $u(x, y, t)$  може бути розвинена в абсолютно збіжний ряд Фур'є. Тоді розв'язок поставленої задачі, одержаний методом Фур'є, має вигляд

$$u(x, y, t) = \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} B_{k_1, k_2} e^{-(k_1+k_2)t} e^{I(xk_1+yk_2)}, \quad (4.31)$$

$$B_{k_1, k_2} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x, y) e^{-I(xk_1+yk_2)} dx dy, \quad I = \sqrt{-1}.$$

Розглянемо ряд

$$u_{i,j}^n = \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} B_{k_1, k_2} \zeta^n(k_1, k_2) e^{I(ih_1k_1+jh_2k_2)}. \quad (4.32)$$

**Теорема 4.1.** Якщо  $\varphi(x, y)$  розвивається в абсолютно збіжний ряд Фур'є, то (4.32) є розв'язком скінченно-різницевої задачі (4.29),(4.30) при граничних умовах періодичності і початковій умові

$$u_{i,j}^0 = \varphi(ih_1, jh_2) = \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} B_{k_1, k_2} e^{I(ih_1k_1+jh_2k_2)}.$$

**Лема 4.1.** Модуль коефіцієнту переходу з часового шару  $2n$  на шар  $2n+2$  розв'язку (4.31) алгоритму (4.29), (4.30)  $\forall n$  менший від одиниці.

Знайдемо вигляд  $\zeta(k_1, k_2)$ . Так як алгоритм розв'язування скінченно-різницевої задачі складається з двох кроків, то  $\zeta(k_1, k_2) = \zeta_1(k_1, k_2)\zeta_2(k_1, k_2)$ . Підставляючи гармоніку  $\tilde{u}_{i,j}^n = B_{k_1, k_2} \zeta_1(k_1, k_2) e^{I(ih_1k_1+jh_2k_2)}$  ряду (4.32) в різницеву схему (4.29), при переході з кроку  $2n$  на  $2n+1$  одержимо

$$\zeta_1(k_1, k_2) = 1 - 2\alpha\tau \left( (1 - \cos(k_1h_1)) / h_1^2 - (1 - \cos(k_2h_2)) / h_2^2 \right).$$

При переході з  $2n+1$  кроку на  $2n+2$  за неявною схемою (4.30) маємо

$$\zeta_2(k_1, k_2) = \left[ 1 + 2\alpha\tau \left( (1 - \cos(k_1 h_1)) / h_1^2 + (1 - \cos(k_2 h_2)) / h_2^2 \right) \right]^{-1}.$$

Звідки, для множника переходу одержуємо

$$\zeta(k_1, k_2) = \frac{1 - 2\alpha\tau \left( (1 - \cos(k_1 h_1)) / h_1^2 - (1 - \cos(k_2 h_2)) / h_2^2 \right)}{1 + 2\alpha\tau \left( (1 - \cos(k_1 h_1)) / h_1^2 - (1 - \cos(k_2 h_2)) / h_2^2 \right)}. \quad (4.33)$$

Отже  $q = \max_{k_1, k_2} |\zeta(k_1, k_2)| = 1 \quad \forall n, h_1, h_2, \tau$ .

**Лема 4.2.** При виконанні умов леми 1 та (4.33) ряд (4.32) збіжний.

Оскільки  $q = \max_{k_1, k_2} |\zeta(k_1, k_2)| = 1$ , то неважко встановити оцінку

$$\left| u_{i,j}^n \right| = \left| \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} B_{k_1, k_2} (\zeta(k_1, k_2))^n e^{I(k_1 i h_1 + k_2 j h_2)} \right| \leq \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} |B_{k_1, k_2}|.$$

А так як  $\varphi(x, y)$  розвивається в абсолютно збіжний ряд, то  $\sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} |B_{k_1, k_2}| < N < \infty$ . Це встановлює збіжність ряду (4.32).

Отже, ряд (4.32) збіжний, є періодичною за просторовими змінними, задовольняє початковим умовам, а з виконання (4.33) випливає, що (4.32) задовольняє різницеві рівняння, тобто він є розв'язком задачі (4.29), (4.30).

**Теорема 4.2.** Якщо  $\varphi(x, y)$  розвивається в абсолютно збіжний ряд Фур'є,  $\tau$  змінюється не частіше ніж через парну кількість кроків, то алгоритм (4.29), (4.30) безумовно стійкий за початковими даними.

Уведемо дискретний аналог простору  $L_2[-\pi, \pi]$  з нормою

$\|u_{i,j}^n\|^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K |u_{i,j}^n|^2 h_1 h_2$ . Тоді, використавши рівність Парсеваля, маємо

$$\|u_{i,j}^n\|^2 = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K \left| \sum_{k_1, k_2 = -\infty}^{\infty} B_{k_1, k_2} (\zeta(k_1, k_2))^n e^{I(k_1 i h_1 + k_2 j h_2)} \right|^2 h_1 h_2 \leq$$

$$\leq q^{2n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K \sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} \left| B_{k_1, k_2} e^{I(k_1 i h_1 + k_2 j h_2)} \right|^2 h_1 h_2 = q^{2n} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^K \left| u_{i,j}^0 \right|^2 h_1 h_2 = q^{2n} \left\| u_{i,j}^0 \right\|_{L_{2h}}^2.$$

З одержаної нерівності випливає стійкість алгоритму за початковими даними.

**Теорема 4.3.** Точний розв'язок (4.32) різницевої задачі (4.29),(4.30) збігається до точного розв'язку крайової задачі (4.28).

Розвинемо функції (4.33) та  $e^{-2\alpha(k_1^2+k_2^2)\tau}$  в ряди і порівнюємо їх розвинення

$$\zeta(k_1, k_2) = 1 - 4\alpha\tau(k_1 + k_2) + \alpha^2\tau^2(k_1^2/h_1^2 + k_2^2/h_2^2)/2 - \dots$$

$$i \quad e^{-2\alpha(k_1^2+k_2^2)\tau} = 1 - 2\alpha\tau(k_1^2 + k_2^2) + \dots$$

переконаємось, що в них співпадають лише перші члени. Проте ця обставина ще не заперечує достовірність чисельного розв'язку. Дійсно, так як (4.33) при  $t=0$  збігається абсолютно, то збігається і ряд  $\sum_{k_1, k_2=-\infty}^{\infty} |B_{k_1, k_2}|$ . Отже, і (4.33) збігається при

будь-якому  $t>0$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_1^0, k_2^0$ , такі, що  $\left| \sum_{|k_1|>k_1^0, |k_2|>k_2^0} B_{k_1, k_2} e^{-(k_1^2+k_2^2)t} e^{I(k_1 x + k_2 y)} \right| < \varepsilon$ .

Тому наближений розв'язок диференціальної задачі з як завгодно малою похибкою  $\varepsilon$ , можна подати скінченною сумою

$$\tilde{u}(x, y, t) = \sum_{|k_1|<k_1^0, |k_2|<k_2^0} B_{k_1, k_2} e^{-(k_1^2+k_2^2)t} e^{I(k_1 x + k_2 y)}$$

Оскільки ряд (4.32) збіжний, то  $\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \tilde{k}_1^0, \tilde{k}_2^0$ , такі, що

$$\left| \sum_{|k_1|>\tilde{k}_1^0, |k_2|>\tilde{k}_2^0} B_{k_1, k_2} (\zeta(k_1, k_2))^n e^{I(k_1 i h_1 + k_2 j h_2)} \right| < \tilde{\varepsilon}.$$

Отже, розв'язок скінченно-різницевої задачі можна наблизити з будь-якою точністю  $\tilde{\varepsilon}$  скінченною сумою

$$\tilde{u}_{i,j}^n = \sum_{|k_1|<\tilde{k}_1^0, |k_2|<\tilde{k}_2^0} B_{k_1, k_2} (\zeta(k_1, k_2))^n e^{I(k_1 i h_1 + k_2 j h_2)}$$

Вибираючи  $k = \max(k_1^0, k_2^0, \tilde{k}_1^0, \tilde{k}_2^0)$  маємо

$$\begin{aligned} \left| \tilde{u}(x_i, y_j, t_n) - \tilde{u}_{i,j}^n \right| &= \left| \sum_{|k_1| < k, |k_2| < k} B_{k_1, k_2} e^{I(k_1 x_i + k_2 y_j)} (e^{-(k_1^2 + k_2^2)t_n} - (\zeta(k_1, k_2))^n) \right| \leq \\ &\leq \sum_{|k_1| < k, |k_2| < k} |B_{k_1, k_2}| \left| e^{-(k_1^2 + k_2^2)t_n} - (\zeta(k_1, k_2))^n \right| \leq N k^2 \tau, \end{aligned}$$

де  $N$  стала, яка не залежить від  $h_1, h_2, \tau$ .

Таким чином, за рахунок відповідного вибору  $k_1^0, k_2^0, \tilde{k}_1^0, \tilde{k}_2^0$  при прямуванні  $\tilde{\varepsilon}$ ,  $\tau$  до нуля розв'язок скінченно-різницевого рівняння збігається до розв'язку диференціальної задачі, а залишковий член є величиною  $O(\tau^2)$ .

## 4.2. Побудова різницевої апроксимації граничних умов та дослідження їх впливу на стійкість ДС-алгоритму

Важливим елементом при побудові чисельних методів для початково-крайових задач із складними граничними умовами є вдала апроксимація граничних умов, узгоджених з різницевиими рівняннями у внутрішніх точках, що відповідають основним диференціальним рівнянням задачі.

Ці апроксимації впливають як на похибку апроксимації алгоритму в цілому, так і на стійкість. При неузгодженості різницевих аналогів граничних умов та основної схеми, в вузлах, близьких до граничних, відбувається накопичення похибки, що призводить до загальної нестійкості. Для задачі про проявлення голографічного зображення це питання дійсно важливе.

Розглянемо задачу моделювання процесу проявлення прихованого голографічного зображення (1.61)-(1.71) з заданою температурою (без рівняння теплопровідності і відповідних початкових та крайових умов), характеристики якого (тиск  $P$ , компоненти швидкості  $U, V$ ) можна описати нестационарними рівняннями Нав'є-Стокса [31]. Особливістю задачі є складні граничні умови, в яких пов'язані тиск, швидкість, їх похідні та інтеграли.

При застосуванні чисельних методів до цієї задачі поряд з проблемою неоднорідності області деякі труднощі викликало моделювання граничних умов.

Основну складність становить апроксимація двох умов (1.69) та (1.70) на границі  $y=0$  - вільній поверхні середовища. Для перевірки можливості застосування побудованих апроксимацій граничних умов розглянуто лінеаризовану систему рівнянь Нав'є-Стокса (без конвективних членів)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4.1')$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (4.2')$$

з умовами (1.63)-(1.70) без врахування теплового балансу.

Легко переконатися, що функції

$$u(x, y, t) = -e^{-t} e^{2y/d} \sin\left(\frac{2x}{d}\right); \quad v(x, y, t) = e^{-t} e^{2y/d} \cos\left(\frac{2x}{d}\right) \text{ та}$$

$$p(x, y, t) = \frac{d}{2} \rho e^{-t} e^{2y/d} \cos\left(\frac{2x}{d}\right); \quad \eta(x, t) = (1 - e^{-t}) \cos\left(\frac{2x}{d}\right)$$

є точним аналітичним розв'язком задачі (4.1'),(4.2'), (1.63)-(1.70) при відповідному виборі функцій  $u^0, v^0, p^0, u^d, v^d, p^d, p^\tau, p^n, \eta_0$ . Властивістю даного розв'язку є усталення при  $t \rightarrow +\infty$

$$u(x, y, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad v(x, y, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0, \quad \eta(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \eta^*(x).$$

За допомогою даного прикладу були експериментально перевірені ДС-алгоритми (з центральними різницями, та різницями проти потоку) з різними варіантами апроксимацій граничних умов. Для ДС-алгоритму з центральними різницями для рівнянь руху (4.1'),(4.2') та методу релаксації для рівняння Пуассона для тиску були задані такі параметрами:  $d = 1; \rho = 1; \nu = 10^{-3}; \alpha = 2 \cdot 10^{-2}$ . Кількість точок  $K = 60; M = 20; \tau = 0.001$ . Збіжність до точного розв'язку спостерігалася при варіанті, наведеному нижче.

Алгоритм розв'язання даної задачі проводиться у такий спосіб. Початкові і граничні умови апроксимуємо з порядком  $O(\tau + h_1^2 + h_2^2)$  таким чином:

Початкові умови (1.65), умови періодичності (1.66), (1.67) та граничні умови (1.68) апроксимуємо відповідно у вигляді

$$u_{i,j}^0 = u^0(ih_1, jh_2); v_{i,j}^0 = v^0(ih_1, jh_2); p_{i,j}^0 = p^0(ih_1, jh_2), \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} u_{1,j}^{2n+1+l} &= u_{K+1,j}^{2n+1+l}; u_{-1,j}^{2n+1+l} = u_{K-1,j}^{2n+1+l}; v_{1,j}^{2n+1+l} = v_{K+1,j}^{2n+1+l}; v_{-1,j}^{2n+1+l} = v_{K-1,j}^{2n+1+l}; \\ P_{1,j}^{2n+1+l} &= P_{K+1,j}^{2n+1+l}; P_{-1,j}^{2n+1+l} = P_{K-1,j}^{2n+1+l}; j = \overline{0, M}; n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} u_{i,M}^{2n+1+l} &= u^d(ih_1, \tau(2n+1+l)); v_{i,M}^{2n+1+l} = v^d(ih_1, \tau(2n+1+l)); \\ \frac{3p_{i,M}^{2n+1+l} - 4p_{i,M-1}^{2n+1+l} + p_{i,M-2}^{2n+1+l}}{2h_2} &= p^d(ih_1, \tau(2n+1+l)); \end{aligned} \quad (4.36)$$

На кожному часовому  $(2n+1+l)$  кроці спочатку знаходимо значення невідомих величин  $u_{i,j}^{2n+1+l}, v_{i,j}^{2n+1+l}, i = \overline{0, K}, j = \overline{1, M-1}$  у внутрішніх точках сітки, для яких  $(i+j+l)$  - непарне, за допомогою явних схем

$$u_{i,j}^{2n+1+l} = u_{i,j}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1 P_{i,j}^{2n+l} + \Delta_h u_{i,j}^{2n+l} / \text{Re} \right] \quad (4.21')$$

$$v_{i,j}^{2n+1+l} = v_{i,j}^{2n+l} + \tau \left[ -L_2 P_{i,j}^{2n+l} + \Delta_h v_{i,j}^{2n+l} / \text{Re} \right] \quad (4.22')$$

з умовами періодичності (4.35) по змінній  $x$ . Далі, використовуючи неявні різницьві схеми

$$u_{i,j}^{2n+1+l} = u_{i,j}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1 P_{i,j}^{2n+1+l} + \Delta_h u_{i,j}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \quad (4.24')$$

$$v_{i,j}^{2n+1+l} = v_{i,j}^{2n+l} + \tau \left[ -L_2 P_{i,j}^{2n+1+l} + \Delta_h v_{i,j}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \quad (4.25')$$

знаходимо невідомі значення в решті внутрішніх точок  $u_{i,j}^{2n+1+l}, v_{i,j}^{2n+1+l}, i = \overline{0, K}, j = \overline{1, M-1}$ , для яких  $(i+j+l)$  – парне.

Невідомі  $u_{i,1}^{2n+1+l}$  та  $v_{i,1}^{2n+1+l}$ , для яких для яких  $(i+1+l)$  – парне, та  $u_{i,0}^{2n+1+l}, v_{i,0}^{2n+1+l}$ , для яких  $(i+l)$ -парне, знаходимо із системи

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,1}^{2n+1+l} = u_{i,1}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1 P_{i,1}^{2n+1+l} + \Delta_h u_{i,1}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \\ v_{i,1}^{2n+1+l} = v_{i,1}^{2n+l} + \tau \left[ -L_2 P_{i,1}^{2n+1+l} + \Delta_h v_{i,1}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \\ \frac{v_{i,1}^{2n+l} - v_{i,1}^{2n+l}}{2h_2} = \frac{u_{i+1,0}^{2n+l} - u_{i-1,0}^{2n+l}}{2h_1}, (i+1+l) - \text{парне}; \\ u_{i,0}^{2n+1+l} = u_{i,0}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1 P_{i,0}^{2n+1+l} + \Delta_h u_{i,0}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \\ v_{i,0}^{2n+1+l} = v_{i,0}^{2n+l} + \tau \left[ -L_2 P_{i,0}^{2n+1+l} + \Delta_h v_{i,0}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \\ \mu \left( \frac{u_{i,1}^{2n+l} - u_{i,-1}^{2n+l}}{2h_2} + \frac{v_{i+1,0}^{2n+l} - v_{i-1,0}^{2n+l}}{2h_1} \right) = p^\tau (ih_1, (2n+l)\tau), \quad (i+l) - \text{непарне}; \end{array} \right. \quad (4.37)$$

Тут перше і друге рівняння є неявними схемами (4.24') та (4.25') при  $j=1$ , третє рівняння є апроксимацією рівняння нерозривності (1.63), четверте і п'яте рівняння – це явні схеми (4.21') та (4.22') при  $j=0$ , шосте рівняння – це апроксимація граничної умови (1.69);  $u_{i,-1}^{2n+l}$  та  $v_{i,-1}^{2n+l}$  – допоміжні змінні, що пов'язують систему.

Невідомі  $u_{i,0}^{2n+1+l}$  та  $v_{i,0}^{2n+1+l}$ , для яких  $(i+l)$  – парне, знаходимо із системи

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{i,0}^{2n+1+l} = u_{i,0}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1 (u_{i,0}^{2n+1+l})^2 - L_2 (uv)_{i,0}^{2n+1+l} - L_1 P_{i,0}^{2n+1+l} + \Delta_h u_{i,0}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \\ v_{i,0}^{2n+1+l} = v_{i,0}^{2n+l} + \tau \left[ -L_1 (uv)_{i,0}^{2n+1+l} - L_2 (v_{i,0}^{2n+1+l})^2 - L_2 P_{i,0}^{2n+1+l} + \Delta_h v_{i,0}^{2n+1+l} / \text{Re} \right], \\ \frac{v_{i,1}^{2n+1+l} - v_{i,1}^{2n+1+l}}{2h_2} = \frac{u_{i+1,0}^{2n+1+l} - u_{i-1,0}^{2n+1+l}}{2h_1}, (i+l) - \text{парне}; \\ \mu \left( \frac{u_{i,1}^{2n+1+l} - u_{i,-1}^{2n+1+l}}{2h_2} + \frac{v_{i+1,0}^{2n+1+l} - v_{i-1,0}^{2n+1+l}}{2h_1} \right) = p^\tau (ih_1, (2n+l+1)\tau), \quad (i+l) - \text{парне}. \end{array} \right. \quad (4.38)$$

Результати експерименту наведені в додатках.

### 4.3. Задача оптимального точкового керування лінеаризованою нестационарною системою рівнянь Нав'є-Стокса

Розглянемо початково-крайову задачу, що описується лінеаризованою системою Нав'є-Стокса із сингулярною правою частиною з дельта-функцією Дірака по просторовій змінній.

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \nu \Delta u + \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p = g(x_2, t) \delta(x_1 - r(t)), \text{ на } Q = \Omega \times (0, T), \Omega \subset R^2 \quad (4.39)$$

$$\operatorname{div} u = 0; \quad (4.40)$$

з початковою

$$u = 0 \text{ на } \Omega \times \{0\} \quad (4.41)$$

та граничною

$$u = 0 \text{ на } \partial\Omega \quad (4.42)$$

умовами.

Тут  $u = (u_1, u_2)^T$ ;  $f \equiv g(x_2, t) \delta(x_1 - r(t))$ ,  $g(x_2, t) \in [L_2(0, T; L_2(P_{x_2} \Omega))]^2$ ,  
 $g(x_2, t) \delta(x_1 - r(t)) \in [L_2(0, T; W_2^{-1}(\Omega))]^2$  – задані функції,  $\rho$  та  $\nu$  – деякі відомі сталі.

$P_{x_2} \Omega$  - проекція області  $\Omega$  на вісь  $Ox_2$ .

При подальшому дослідженні будемо використовувати такі означення та твердження[31].

Нехай  $D(\Omega)$  (відпов.  $D(\bar{\Omega})$ ) – простір функцій класу  $C^\infty$  с компактним носієм, що міститься в  $\Omega$  (відпов.  $\bar{\Omega}$ ). Замикання  $D(\Omega)$  в  $W^{m,p}$  позначимо  $W_0^{m,p}$  ( $H_0^m(\Omega)$  при  $p=2$ ).  $L^p(\Omega) = \{L^p(\Omega)\}^n$ ,  $W^{m,p}(\Omega) = \{W^{m,p}(\Omega)\}^n$ ,  $H^m(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^n$ ,  $D^m(\Omega) = \{D^m(\Omega)\}^n$ ,  $\mathcal{V} = \{u \in D(\Omega), \operatorname{div} u = 0\}$ . Замикання  $\mathcal{V}$  в  $L^2(\Omega)$  та в  $H_0^1(\Omega)$  позначимо через  $V$  та  $H$  відповідно.

**Означення 4.1** Узагальненим розв'язком задачі (4.39)-(4.42) будемо називати функцію  $u \in L_2(0, T; V)$  таку, що рівність  $\left( \frac{\partial u}{\partial t}, v \right) + \nu((u, v)) = (f, v)$

виконується для будь-яких функцій  $v \in V$ . Тут  $((\cdot, \cdot))$  – скалярний добуток в просторі  $[W_2^1(\Omega)]^2$ .

**Теорема 4.4** Існує і єдиний узагальнений розв’язок задачі (4.39)-(4.42)  $u \in L_2(0, T; W_2^{1,0}(\Omega)) \cap C(0, T; H)$ .

**Доведення.** Базується на лемі [31]: Якщо права частина в (4.39)  $f \in L_2(0, T; W_2^{-1})$ , тоді існує і єдиний узагальнений розв’язок задачі (4.39)-(4.42)  $u \in L_2(0, T; W_2^{1,0}(\Omega)) \cap C(0, T; H)$ .

**Лема.[31]** Якщо  $g(x_2, t) \in [L_2(0, T; L_2(P_{x_2} \Omega))]^2$ , то функція  $f(x, t) = g(x_2, t) \delta(x_1 - r(t)) \in L_2(0, T; W_2^{1,0}(\Omega)) \cap C(0, T; H)$ .

### Постановка задачі оптимального керування.

Перепишемо рівняння (4.39) у вигляді

$$Lu = A(t, x, h), \quad (4.39')$$

де під  $h$  розуміємо керування, визначене парою  $h = (g, r) \in U \subset H_1 = [L_2(0, T; L_2(P_{x_2} \Omega))]^2 \times W_2^1(0, T)$ ,  $U$  – замкнена опукла обмежена множина в  $H_1$  і таке, що

$$A(t, x, h) = g(x_2, t) \delta(x_1 - r(t)), \quad g(x_2, t) \in [L_2(0, T; L_2(P_{x_2} \Omega))]^2.$$

Функціонал  $A(x, t, h)$  діє на гладких в  $\bar{Q}$  функціях таким чином

$$I_A(v) = \int_0^T \int_{P_{x_2} \Omega} v(r(t), x_2, t) g(x_2, t) dP_{x_2} \Omega dt,$$

де  $v(x, t)$  – гладка в  $\bar{Q}$  функція.

Функціонал якості має вигляд

$$\begin{aligned}
J_{\alpha,\gamma}(h) = J_{\alpha,\gamma}(g, r) = & \int_0^T \int_{\Omega} \left( \frac{\partial u_2(x, t, h)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x, t, h)}{\partial x_2} \right)^2 d\Omega dt + \\
& + \alpha \|g\|_{[L_2(0,T;L_2(P_{x_2}\Omega))]}^2 + \gamma \|r\|_{W_2^1(0,T)}^2.
\end{aligned} \tag{4.43}.$$

Тут  $\alpha$  та  $\gamma$  – сталі параметри регуляризації Тихонова, що вибираються у відповідності з похибками спостережень [119].

$$\begin{aligned}
\|g\|_{[L_2(0,T;L_2(P_{x_2}\Omega))]}^2 &= \left( \|g_1\|_{[L_2(0,T;L_2(P_{x_2}\Omega))]}^2 + \|g_2\|_{[L_2(0,T;L_2(P_{x_2}\Omega))]}^2 \right)^{1/2}, \text{ а} \\
\|g\|_{L_2(0,T;L_2(P_{x_2}\Omega))} &= \left( \int_0^T \int_{P_{x_2}(\Omega)} g^2(x_2, t) dx_2 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

На розв'язках задачі (4.39)-(4.42) даний функціонал визначений коректно.

Задача оптимального керування полягає в мінімізації функціоналу (4.43).

В роботі [6] доведено існування оптимального керування в тому числі з такою правою частиною для абстрактного оператора  $L$ , доведено, що функціонал  $A(x, t, h)$  – слабо неперервний за керуванням  $h$ .

**Теорема [6]** Нехай стан системи визначається як розв'язок задачі (4.1')-(4.4') та виконуються такі умови:

- 1) Критерій якості  $J(\cdot) : H_{cp}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  є слабо напівнеперервним знизу по стану системи  $u(x, t, h)$  функціоналом, обмеженим знизу;
- 2) Множина допустимих керувань  $U_0 \subset H$  обмежена, замкнена та випукла в  $H$ ;
- 3)  $H = W_2^1(0, T) \times L_2(0, T; P_{x_2}\Omega)$ ;
- 4)  $A(t, x, h) = g(x_2, t)\delta(x_1 - r(t))$ ;
- 5) Мають місце оцінки

$$\|u\|_{H_{cp}^+} \leq c_1 \|Lu\|_{W_{cp}^{-l}} \leq c_2 \|u\|_{W_{cp}^{+l}}, \quad \|v\|_{H_{cp}^+} \leq c_1 \|L^*v\|_{W_{cp}^{-l}} \leq c_2 \|v\|_{W_{cp}^{+l}}$$

Тоді існує оптимальне керування системою (4.39)-(4.42).

Дослідимо опуклість функціоналу якості

**Лема 4.3.** Функціонал якості (4.43) для задачі (4.39'), (4.40)-(4.42) опуклий по керуванню  $g$  при фіксованому  $r$ .

**Доведення.** Позначимо  $J_\alpha(h) = J_\alpha(g) = J_{\alpha,\gamma}(g, r_0)$  при фіксованому  $r = r_0$ ,  $\tilde{J}_\alpha(h) = \sqrt{J_\alpha(h)}$ . Нехай  $h_1$  та  $h_2$  – два різні керування. Доведемо, що  $J_\alpha(\lambda h^{(1)} + (1-\lambda)h^{(2)}) \leq \lambda J_\alpha(h^{(1)}) + (1-\lambda)J_\alpha(h^{(2)})$ ,  $\forall \lambda \in (0,1)$ . Враховуючи однорідність задачі (4.39'), (4.40)-(4.42), керуванню  $\lambda h$  відповідає розв'язок  $u(x, t; \lambda h) = \lambda u(x, t; h)$ . Звідси

$$J_\alpha(\lambda h) = \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial u_2(x, t, \lambda h)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x, t, \lambda h)}{\partial x_2} \right)^2 d\Omega dt + \alpha \|\lambda g\|_{[L_2(0, T; L_2(P_2, \Omega))]}^2 + \gamma \|r_0\|_{W_2^1(0, T)}^2 =$$

$$\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \left( \frac{\partial u_2(x, t, h)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x, t, h)}{\partial x_2} \right)^2 d\Omega dt + \alpha \lambda^2 \|g\|_{[L_2(0, T; L_2(P_2, \Omega))]}^2 + \gamma \|r_0\|_{W_2^1(0, T)}^2 = \lambda^2 J_\alpha(h).$$

Відповідно,  $\tilde{J}_\alpha(\lambda h) = \lambda \tilde{J}_\alpha(h)$ .

Позначимо  $Du \equiv \frac{\partial u_2(x, t, \lambda h)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1(x, t, \lambda h)}{\partial x_2}$ . Тоді

$$J_\alpha(\lambda h^{(1)} + (1-\lambda)h^{(2)}) = \int_0^T \int_\Omega D^2(\lambda u^{(1)} + (1-\lambda)u^{(2)}) d\Omega dt +$$

$$+ \alpha \int_0^T \int_{P_2(\Omega)} (\lambda g^{(1)} + (1-\lambda)g^{(2)})^2 dx_2 dt + \gamma \|r_0\|_{W_2^1(0, T)}^2 \leq$$

$$\int_0^T \int_\Omega (\lambda D^2(u^{(1)}) + (1-\lambda)D^2(u^{(2)})) d\Omega dt +$$

$$+ \alpha \int_0^T \int_{P_2(\Omega)} (\lambda (g^{(1)})^2 + (1-\lambda)(g^{(2)})^2) dx_2 dt + \gamma \|r_0\|_{W_2^1(0, T)}^2 =$$

$$= \lambda J_{\alpha}(h^{(1)}) + (1 - \lambda) J_{\alpha}(h^{(2)}).$$

Лемму доведено.

Дослідимо диференціальні властивості функціоналу якості.

**Теорема 4.5.** При виконанні наведених вище умов функціонал якості (4.43) – диференційований за Гато в просторі  $L_2(0, T) \times [L_2(\Omega)]^2$ , та його градієнт має вигляд

$$\begin{aligned} \text{grad } J_{\alpha, \gamma}(g(x_2, t), r(t)) = \\ = \left( \Psi(r(t), x_2, t) + 2\alpha g(x_2, t), g \frac{\partial \Psi(r(t), x_2, t)}{\partial x_1} + 2\gamma r(t) \right)^T, \end{aligned} \quad (4.44)$$

де  $\Psi = (\psi_1(x_1, x_2, t), \psi_2(x_1, x_2, t))^T$  – розв’язок відповідної спряженої до (4.39)-(4.42) задачі.

**Доведення.**

Для знаходження градієнта  $\text{grad } J_{\alpha, \gamma}(g, r)$  розглянемо різницю

$$\delta J_{\alpha, \gamma}(g, r) = J_{\alpha, \gamma}(g + \delta g, r + \delta r) - J_{\alpha, \gamma}(g, r).$$

Позначимо розв’язок задачі (4.39)-(4.42), який відповідає правій частині з  $g + \delta g$  та  $r + \delta r$  через  $u + \delta u$ . Внаслідок лінійності задачі маємо

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} + \nu \Delta \delta u + \frac{1}{\rho} \text{grad } \delta P = [(g + \delta g) \delta(x_1 - r - \delta r) - g \delta(x_1 - r)], \quad 0 < t \leq T; \quad (4.45)$$

$$\text{div } \delta u = 0 \quad (4.46)$$

$$\delta u(0) = 0. \quad (4.47)$$

Для приросту функціоналу отримаємо

$$\delta J_{\alpha, \gamma}(g, r) = \int_0^T \int_{P_{x_2}} \left( \frac{\partial(u_2 + \delta u_2)}{\partial x_1} - \frac{\partial(u_1 + \delta u_1)}{\partial x_2} \right)^2 -$$

$$\begin{aligned}
& -\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)^2 dP_{x_2} dt + \alpha\left(\|g + \delta g\|_{L_2}^2 - \|g\|_{L_2}^2\right) - \gamma\left(\|r + \delta r\|_p^2 - \|r\|_p^2\right) = \\
& = \int_0^T \int \operatorname{rot} \delta u (2 \operatorname{rot} u + \operatorname{rot} \delta u) dP_{x_2} dt + 2\alpha \langle g, \delta g \rangle + 2\gamma \langle r, \delta r \rangle + o(\delta u, \delta g, \delta r) = \\
& = 2 \int_0^T \int \operatorname{rot} u \cdot \operatorname{rot} \delta u dP_{x_2} dt + 2\alpha \langle g, \delta g \rangle + 2\gamma \langle r, \delta r \rangle + o(\delta u, \delta g, \delta r). \quad (4.48)
\end{aligned}$$

Для того, щоб з (4.48) отримати вираз для градієнта функціоналу  $J_{\alpha, \gamma}(g, r)$ , необхідно виразити приріст  $\delta u$  через прирости керування. З цією метою введемо нову вектор-функцію  $\Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t)) \in [D(\Omega)]^2$ , що визначає спряжений стан і перетворюється в нуль на границі  $\partial\Omega$  та в останній момент часу  $T$ , тобто

$$\Psi|_{\partial\Omega} = 0 \quad (4.49)$$

$$\Psi(T) = 0; \quad (4.50)$$

$$\operatorname{div} \delta\Psi = 0 \quad (4.51)$$

Помножимо рівняння (4.45) скалярно в  $L_2(\Omega)$  на  $\Psi(t)$  і проінтегруємо по часу від 0 до  $T$ . Отримаємо рівність

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left( \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \Psi \right) - \nu(\Delta \delta u, \Psi) + \frac{1}{\rho}(\operatorname{grad} \delta P, \Psi) \right) dt = \\
& = \int_0^T ((g + \delta g)\delta(x_1 - r - \delta r) - g\delta(x_1 - r), \Psi) dt. \quad (4.52)
\end{aligned}$$

Для першого доданку з врахуванням (4.48), (4.49) маємо

$$\int_0^T \left( \frac{\partial \delta u}{\partial t}, \Psi \right) dt = (\delta u(T), \Psi(T)) - \int_0^T \left( \delta u, \frac{d\Psi}{dt} \right) dt. \quad (4.53)$$

Тоді з (4.52) випливає

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \left( \delta u, -\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) - (\delta u, \nu \Delta \Psi) + \frac{1}{\rho}(\operatorname{grad} \delta P, \Psi) dt = \\
& = \int_0^T ((g + \delta g)\delta(x_1 - r - \delta r) - g\delta(x_1 - r), \Psi) dt. \quad (4.54)
\end{aligned}$$

Перетворимо праву частину (4.54) маємо

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T ((g + \delta g)\delta(x_1 - r - \delta r) - g\delta(x_1 - r), \Psi) dP_{x_2} \Omega dt \\
 &= \int_0^T \int_{P_{x_2}} (g + \delta g)\Psi(r + \delta r, x_2, t) - g\Psi(r, x_2, t) dt = \\
 &= \int_0^T \int_{P_{x_2} \Omega} g(\Psi(r + \delta r, x_2, t) - \Psi(r, x_2, t)) + \delta g\Psi(r + \delta r, x_2, t) dP_{x_2} \Omega dt. \quad (4.55)
 \end{aligned}$$

До третього доданку в лівій частині (4.54) застосуємо формулу Стокса

$$(\text{grad } \delta P, \Psi) = -(\delta P, \text{div } \Psi) + \langle \gamma_0 \delta P, \gamma_\nu \Psi \rangle \quad (4.56).$$

Згідно (4.51)  $(\delta P, \text{div } \Psi) = 0$ , а доданок  $\langle \gamma_0 \delta P, \gamma_\nu \Psi \rangle = 0$  за рахунок умови (4.49).

Тоді рівняння (4.54) прийме вигляд

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \left( \delta u, -\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nu \Delta \Psi \right) dt = \\
 &= \int_0^T \int_{P_{x_2} \Omega} g(\Psi(r + \delta r, x_2, t) - \Psi(r, x_2, t)) + \delta g\Psi(r + \delta r, x_2, t) dP_{x_2} \Omega dt. \quad (4.57)
 \end{aligned}$$

Припускаємо, що задача (4.45)-(4.47) поставлена коректно, тобто мають місце оцінки  $\|\delta u\| \leq \text{const}_1 \|\delta g\|_p$  та  $\|\delta u\| \leq \text{const}_2 \|\delta r\|_p$ . Тоді для задачі (4.45)-(4.47), з (4.49), (4.54), (4.58) отримаємо такий вираз градієнта функціонала (4.43)

$$\text{grad } J_{\alpha, \gamma}(g, r) = \left( \frac{\partial J_{\alpha, \gamma}}{\partial g}, \frac{\partial J_{\alpha, \gamma}}{\partial r} \right)^T = \left( \Psi + 2\alpha g, g \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} + 2\gamma r \right)^T,$$

де  $\Psi(r, t)$  є розв'язком задачі

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial t} - \nu \Delta \Psi = 2 \left( \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} \right)^T, \quad (4.58)$$

з умовами (4.49)-(4.51).

Теорему доведено.

**Зауваження.** З теореми легко побачити, що умовою оптимальності для (4.39)-(4.43) буде

$$\begin{cases} -\Psi(r, x_2, t) + 2\alpha g(x_2, t) = 0 \\ g(x_2, t) \frac{\partial \Psi(r, x_2, t)}{\partial x_1} + 2\gamma r = 0 \end{cases} \quad (4.59)$$

Для знаходження оптимального розв'язку цієї задачі будемо ітераційний алгоритм. За початкове значення ( $k=0$ ) приймаємо попередньо оцінені або довільні функції  $g^0(x_2, t)$  та  $r^0(t)$ . При використанні ітераційних методів перехід з  $k$ -ї на  $(k+1)$  ітерацію здійснюється таким чином

1. Розв'язується пряма задача для визначення стану системи

$$\frac{\partial u^k}{\partial t} - \nu \Delta u^k + \frac{1}{\rho} \text{grad } P^k = g^k(x_2, t) \delta(x_1 - r^k(t)), \quad Q = \Omega \times (0, T), \quad \Omega \subset R^2 \quad (4.60)$$

$$\text{div } u^k = 0; \quad (4.61)$$

$$u^k = 0 \text{ на } \Omega \times \{0\}; \quad u^k = 0 \text{ на } \partial \Omega \quad (4.62)$$

2. Знаходиться спряжений стан, що відповідає  $(g^*, r^*)$

$$-\frac{\partial \Psi^k}{\partial t} - \nu \Delta \Psi^k = 2 \left( \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_2^2}, \frac{\partial^2 u_1^k}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 u_2^k}{\partial x_1^2} \right)^T; \quad T > t \geq 0 \quad (4.63)$$

$$\text{div } \Psi^k = 0; \quad (4.64)$$

$$\Psi^k = 0 \text{ на } \Omega \times \{T\}; \quad \Psi^k = 0 \text{ на } \partial \Omega \quad (4.65)$$

3. Визначаються нові наближення для координат  $r$  та потужностей  $V$  джерел

$$\begin{aligned} \frac{g^{k+1} - g^k}{s_{k+1}} + \Psi^k + 2\alpha g^k &= 0, \\ \frac{r^{k+1} - r^k}{\sigma_{k+1}} + \frac{\partial \Psi^k}{\partial x_1} g^k + 2\gamma r^k &= 0, \quad \beta = 1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

Для наближеного розв'язування прямих задач (4.59)-(4.62) та (4.63)-(4.65) використовуємо алгоритми, розроблені в параграфі 4.2.

#### 4.4. Висновки

В даному розділі досліджено дискретну модель процесу проявлення прихованого голографічного зображення, елементами якої є нелінійна нестационарна система рівнянь Нав'є-Стокса та складні нелінійні граничні умови. Для цієї моделі побудовано ефективний метод чисельного розв'язання, згідно рівняння руху (1.61) та (1.62) розв'язуються розробленим ДС-алгоритм другого порядку  $O(h_1^2 + h_2^2 + \tau^2)$ , а рівняння Пуасона – методом релаксації.

Для лінеаризованого випадку досліджено дискретну модель:

- встановлено стійкість ДС-алгоритму за початковими даними з умовами періодичності на границі;
- для задачі (4.1'), (4.2'), (4.6)-(4.10) розроблено тестовий приклад з відомим точним розв'язком, що усталюється за часом; за допомогою комп'ютерного моделювання визначено апроксимації граничних умов, та досліджено їх вплив на стійкість ДС-алгоритму. В результаті для задачі (4.1'), (4.2'), (4.6)-(4.10) побудовано стійкий за початковими даними ДС-алгоритм, що враховує нелінійність граничних умов. Запропонований метод обчислення значень розв'язку в граничних вузлах може бути поширений на ДС-алгоритм для нелінійної задачі (4.1), (4.2), (4.6)-(4.10);
- для задачі оптимального керування лінеаризованою системою рівнянь Нав'є-Стокса з дельта-функцією за просторовою змінною в правій частині досліджено диференціальні властивості критерію якості та побудовано ітераційний алгоритм знаходження узагальненого розв'язку.

## ДОДАТКИ

ОБЧИСЛЮВАЛЬНІ ЕКСПЕРИМЕНТИ(КОМП'ЮТЕРНА РЕАЛІЗАЦІЯ) З  
ВИКОРИСТАННЯМ ДС-АЛГОРИТМІВ

## 5.1. Апробація дискретних моделей масопереносу на основі ДС-алгоритмів

5.1.1. Початково-крайові задачі розповсюдження профілів для гіперболічних  
рівнянь 1-го порядку

ДС-методи реалізовано для модельних задач з великим градієнтом, які використовувалися багатьма авторами, зокрема Ораном та Борісом [130] для тестування чисельних алгоритмів:

1) задача про розповсюдження квадратної хвилі на відрізку  $x \in [0,100]$ . В початковий момент часу  $u_{\max} = 1$  в перших 10 комірках та  $u_{\min} = 0$  – в решті комірках (рис.5.1) або  $u_{\max} = 2$  та  $u_{\min} = 0.5$  (рис.5.2 а);

2) задача про розповсюдження гаусівського профілю, що має напівширину, рівну  $2h$  (рис. 5.2б). При цьому  $u_{\max} = 1.6$  та  $u_{\min} = 0.1$ .

3) задача про розповсюдження профілю у вигляді напівкуполу (рис. 5.2в), що має ширину у 30 комірок. Тут  $u_{\max} = 1.6$  та  $u_{\min} = 0$ .

В наведених задачах хвиля рухається вправо з постійною швидкістю  $k = 1 = const$ . Також враховуються умови періодичності: речовина, що витікає з останньої комірки через границю  $x = 100$  знову втікає в розрахункову область з тією ж швидкістю через границю  $x = 0$ . Тому в цих випадках немає потреби використовувати додаткові граничні умови (2.24),(2.25) або (2.30),(2.31).

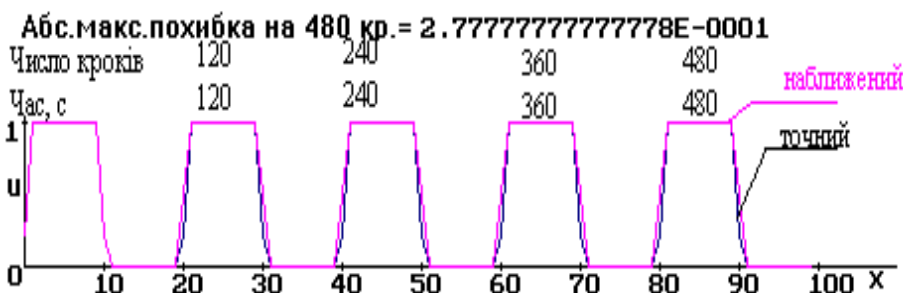
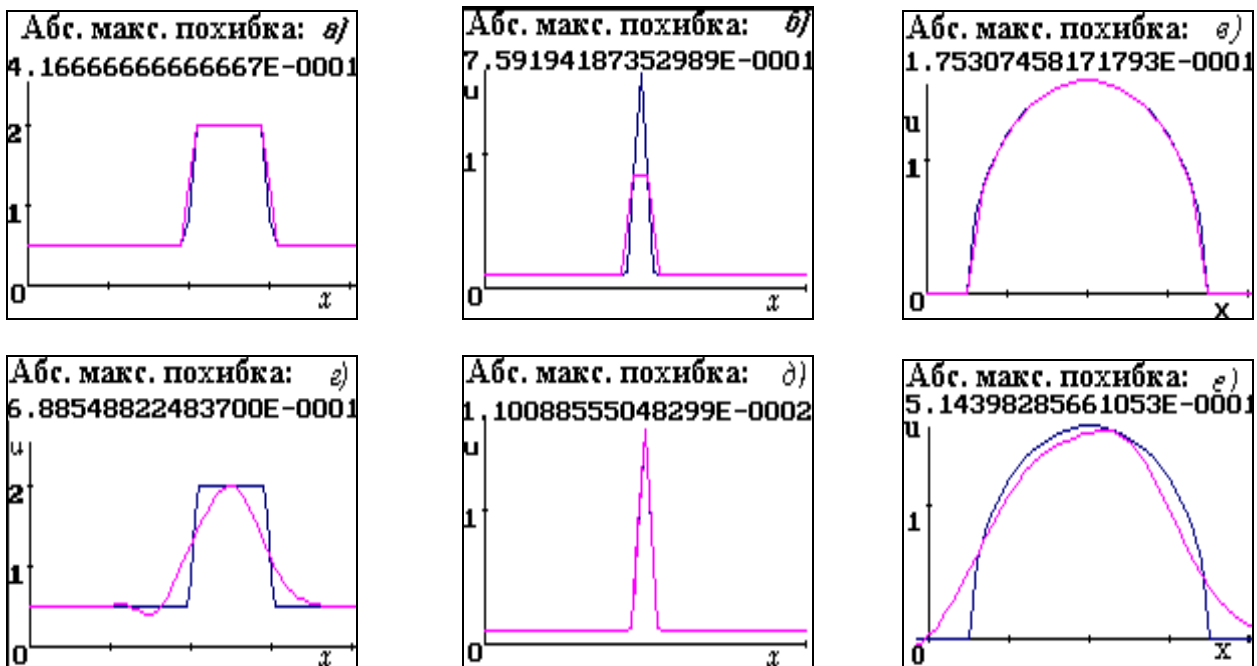


Рис. 5.1 Розповсюдження квадратної хвилі: точний розв'язок та розв'язок, знайдений за допомогою ДС-методу (2.156)-(2.186) при  $\sigma = 0, h = 1, \tau = 1$ .



**Рис. 5.2.** Розрахунки для задач розповсюдження:

*a), c)* - квадратної хвилі відповідно для ДС-методів (2.21б)-(2.24б) ( $\sigma=0, h=1, \tau=1$ ) та (2.21а)-(2.24а)

( $\sigma=0.6, h=0.5, \tau=0.1$ ) на 800 кроці по часу;

*б), d)* – гаусівського профілю відповідно для ДС-методів (2.21б)-(2.24б) ( $\sigma=0, h=0.2, \tau=0.2$ ) та (2.21а)-(2.24а) ( $\sigma=0,$

$h=0.2, \tau=0.2$ ) на 600 кроці по часу;

*е), e)* – гаусівського профілю відповідно для ДС-методів (2.21б)-(2.24б) ( $\sigma=0, h=1, \tau=1$ ) та (2.21а)-(2.24а) ( $\sigma=0.6, h=1,$

$\tau=0.2$ ) на 600 кроці по часу.

**Зауваження.** При розв'язанні тестових задач за допомогою ДС-методу з різницями проти потоку (Рис.5.1, та Рис.5.2 : *а), б), в)*) та у випадку, що відповідає Рис.5.2 *д)* максимальне значення похибки, що виникає на перших двох кроках, залишається постійним на усіх наступних кроках.

## Висновки.

1. На відміну від методів, що потребують на кожному часовому кроці розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, розмір яких пропорційний розмірності просторової сітки та ітераційних методів, за допомогою ДС-методу розв'язок отримується швидко при низьких обчислювальних затратах.

2. Результати для першої тестової задачі показали, що

-ДС-методи з різницями проти потоку (2.15б)-(2.18б) та (2.21б)-(2.24б) не дає нефізичних осциляцій в області великих градієнтів;

-ДС-метод (2.15б)-(2.18б) та (2.21б)-(2.24б) поводить себе краще, ніж ДС-метод з центральними похідними (2.15а)-(2.18а) та (2.21а)-(2.24а). Хоча останній дає дещо згладжений розв'язок, та він значно кращий, ніж у класичних різницевих

методів. Так, дифузія значно менша, ніж у методах донорської комірки, HI-RES (Хартена) та ETVD ("суттєвому" методі найменшої повної варіації) та не більша, ніж у методі MUSCUL (Ван Леєра), ДС-метод зберігає амплітуду хвилі; досить добре зберігається фронт хвилі і не спостерігається фазового запізнення, характерного для методу Лакса-Вендрофа. ДС-метод з односторонніми різницями проявив себе не гірше, ніж метод з корекцією потоків (FCT) [130].

3. Відносно задачі про розповсюдження гаусівського профілю можна зробити висновок, що ДС-метод (2.21б)-(2.24б) дає дещо зрізаний профіль, що є вадою більшості відомих методів. Зміщення фази не спостерігається. ДС-метод (2.21а)-(2.24а) дає невеликі осциляції, що виникають на перших двох кроках по часу, але залишаються локалізованими на наступних кроках, не збільшуються і не впливають на стійкість алгоритму. Та при цьому зберігається висота профілю.

4. У задачі про розповсюдження профілю у формі напівкуполу ДС-метод з односторонніми різницями теж дав дуже добрі результати: розв'язок апроксимується досить точно. При цьому в верхній частині профілю не спостерігається утворення плато, що характерно для FCT-методів з корекцією потоків другого порядку, методів PPM (Коллела і Вудворда) та SUPERBEE (Рое) [130].

5. У порівнянні з центральнорізницевими схемами (2.15а)-(2.18а) для задачі (2.1)-(2.3) та (2.21а)-(2.24а) для задачі (2.5),(2.17),(2.18) відповідні схеми з односторонніми різницями (2.15б)-(2.18б) та (2.21б)-(2.24б) мають кращі стійкісні та апроксимаційні властивості.

6. У ДС-методах з різницями проти потоку параметр  $\sigma$  не впливає суттєво на характер наближеного розв'язку.

А в методах з центральнорізницевими схемами вибір параметру  $\sigma$  так впливає на розв'язок:

-у випадку першої та третьої тестових задач при значеннях  $\sigma$ , близьких до нуля, виникають відхилення від розв'язку у вигляді невеликих хвиль;  $\sigma \approx 0.6$  - оптимальний вибір; далі, при зростанні  $\sigma$  відбувається згладження розв'язку: чим більше  $\sigma$ , тим більше згладження;

у випадку другої тестової задачі  $\sigma=0$  - оптимальний вибір, а при  $\sigma \neq 0$  збурення, що виникають на перших двох кроках призводять на наступних кроках до розбіжності розв'язку.

7. Аналогічні дослідження ДС-алгоритмів було проведено на тестових задачах з гладкими змінними за простором та часом коефіцієнтами  $k(x,t)$ , які дали позитивні результати.

### 5.1.2. Початково-крайові задачі розповсюдження профілів великих градієнтів для гіперболічного рівнянь 1-го порядку із штучною в'язкістю

Для дослідження впливу штучної в'язкості на характер розв'язку був проведений обчислювальний експеримент з варіацією параметрів  $\sigma, \sigma_1, \sigma_2, h, \tau$  для тестових задач про рух квадратної хвилі та хвилі у вигляді напівкуполу [130]. Результати відображені на рис.5.3.

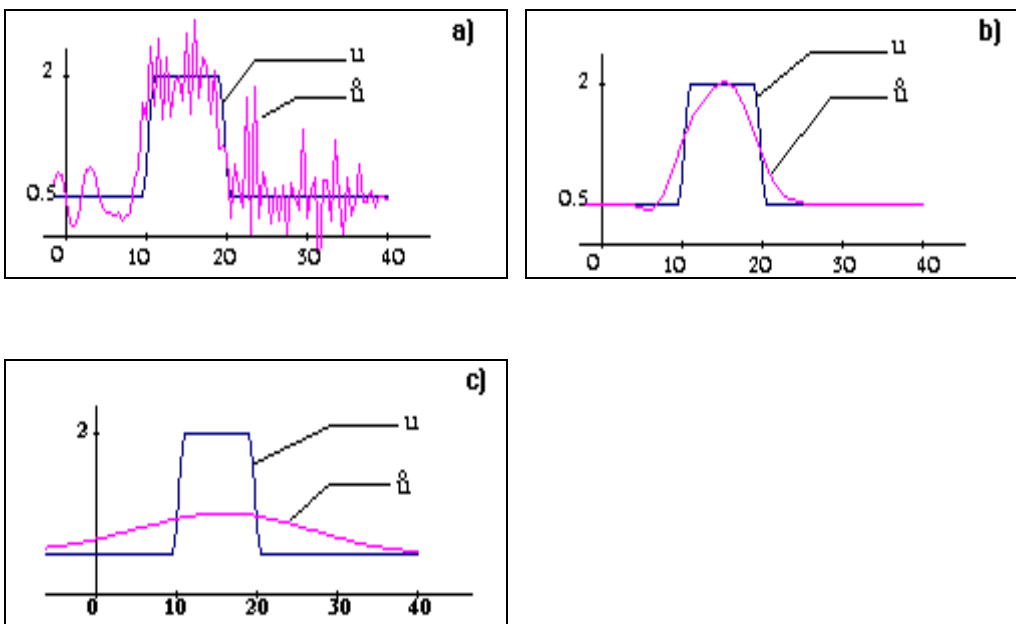


Рис.5.3 Розв'язки задачі про рух квадратної хвилі за допомогою алгоритму (2.32)-(2.33) на 200 кроці відповідно

a) - без штучної в'язкості ( $\alpha = 1, \beta = -1; \sigma = 0.01, \sigma_1 = 0, \sigma_3 = 0, \sigma_2 = 0; h = 0.5, \tau = 0.25$ );

b) - із штучною в'язкістю ( $\alpha = 1, \beta = -1; \sigma = 0.01, \sigma_1 = 0.1, \sigma_3 = 0.1, \sigma_2 = 0, h = 0.5, \tau = 0.25$ );

c) - із надто великою штучною в'язкістю ( $\alpha = 1, \beta = -1; \sigma = 0.01, \sigma_1 = 3, \sigma_3 = 3, \sigma_2 = 0, h = 0.5, \tau = 0.25$ ).

$u$  - точний розв'язок,  $\hat{y}$  - розв'язок, знайдений за допомогою ДС-методу (2.32), (2.33).

На малюнках рис.5.4-5.19 представлені результати тестування ДС-алгоритмів із штучною в'язкістю ( $a$  - коефіцієнт при явній штучній в'язкості,  $a_1$  - коефіцієнт при неявній штучній в'язкості) на вказаних модельних задачах (схеми, в яких явні частини - проти потоку, неявні частини - за потоком).

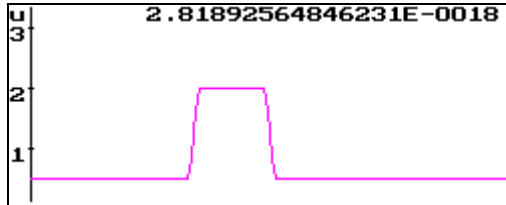


Рис.5.4

$$h = 0.5, \tau = 0.5, \sigma = 2, a = 0, a_1 = 0$$

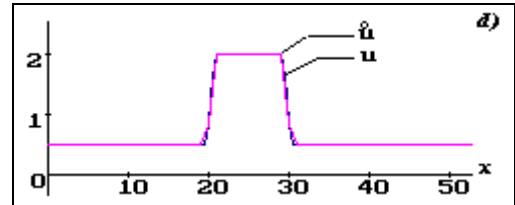


Рис.5.5

$$h = 0.5, \tau = 0.5, \sigma = 0.01, a = 1, a_1 = 0$$

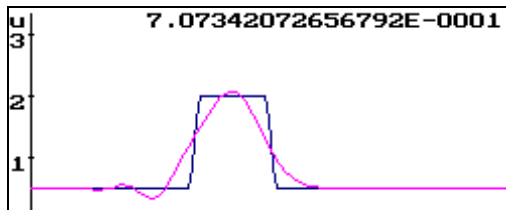


Рис.5.6

$$h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 1, a = 1, a_1 = 1$$

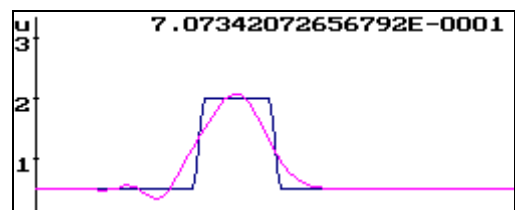


Рис.5.7

$$h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0$$

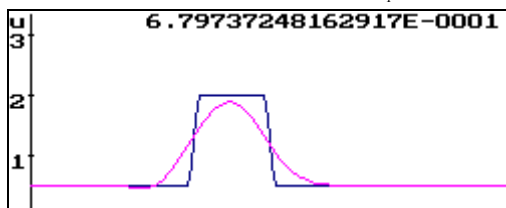


Рис.5.8

$$h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0.1$$

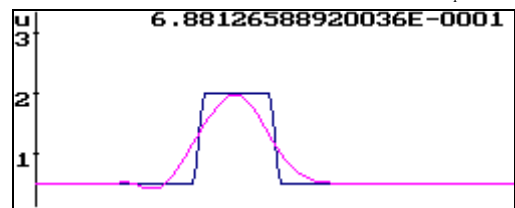


Рис.5.9

$$h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0.05$$

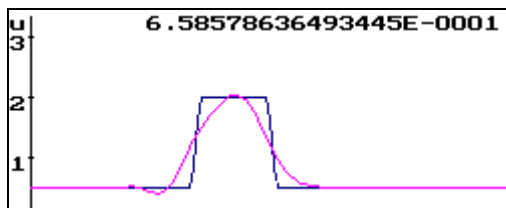


Рис.5.10

$$h = 0.5, \tau = 0.125, \sigma = 0.01, a = 0.5, a_1 = 0$$

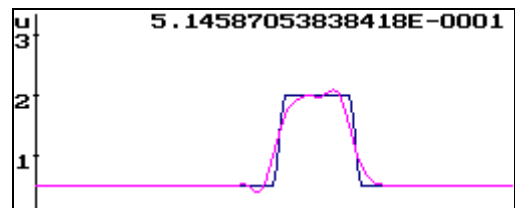


Рис.5.11

$$h = 0.5, \tau = 0.025, \sigma = 0.01, a = 2, a_1 = 2$$

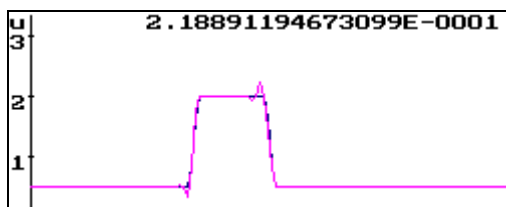


Рис.5.12

$$h = 0.5, \tau = 0.5, \sigma = 100, a = 1, a_1 = 0$$

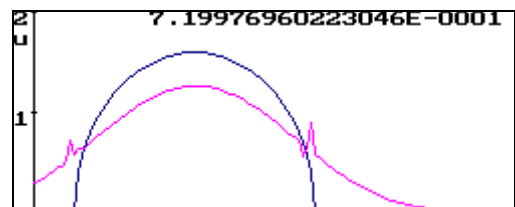


Рис.5.13

$$h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 1, a = 1, a_1 = 1$$

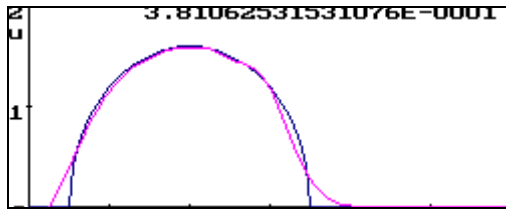


Рис.5.14

$h = 0.5, \tau = 0.25, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0$

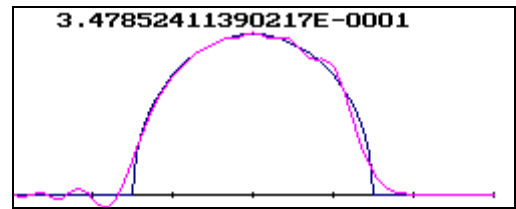


Рис.5.15

$h = 0.5, \tau = 0.125, \sigma = 0.01, a = 0.1, a_1 = 0.05$

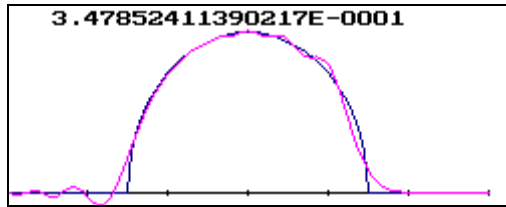


Рис.5.16

$h = 0.5, \tau = 0.025, \sigma = 0.01, a = 0, a_1 = 0$

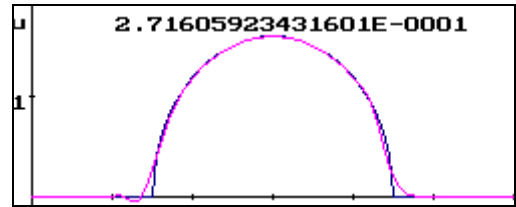


Рис.5.17

$h = 0.5, \tau = 0.025, \sigma = 0.01, a = 2, a_1 = 2$

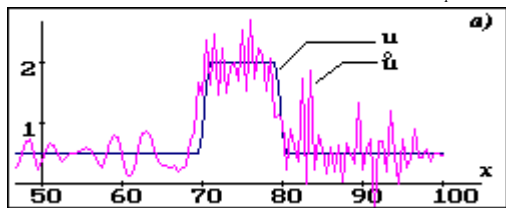


Рис.5.18

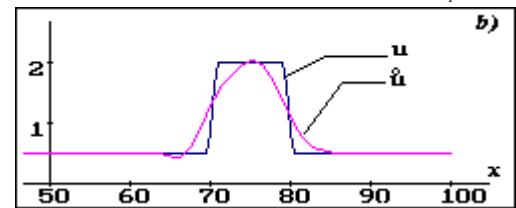


Рис.5.18a

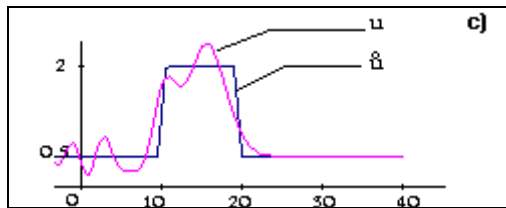


Рис.5.18б

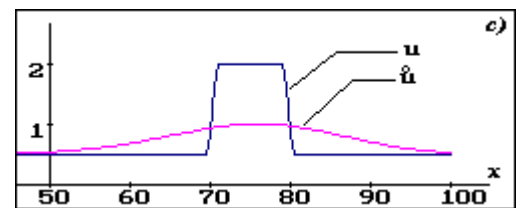


Рис.5.18с

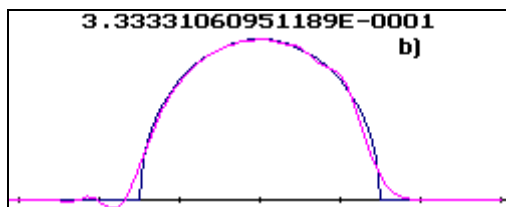


Рис.5.19

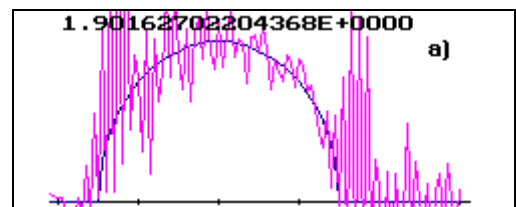


Рис.5.19а

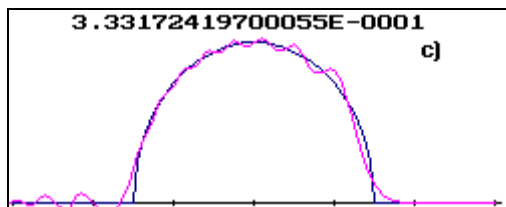


Рис.5.19с

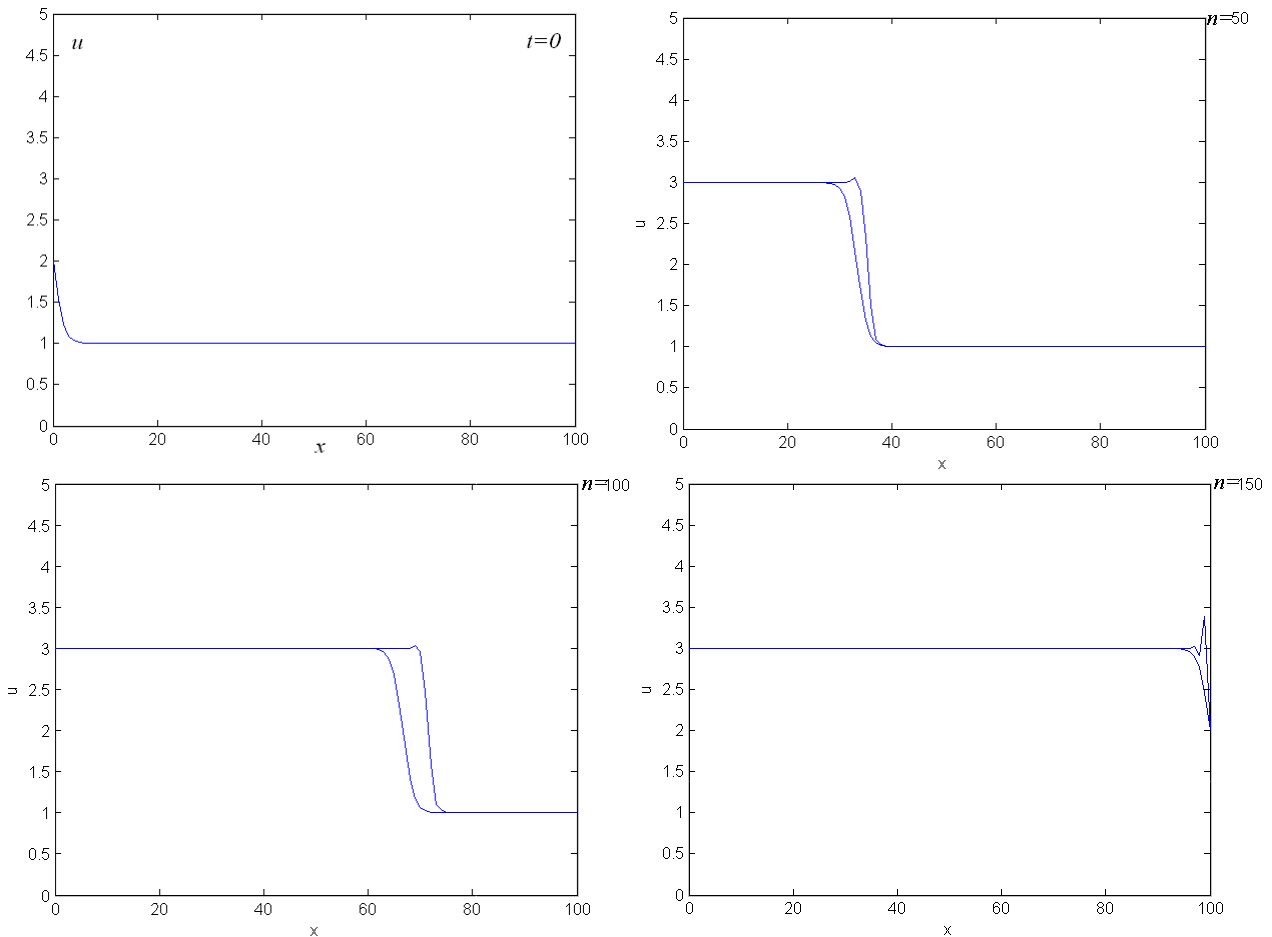
Проведений аналіз теоретичних і чисельних результатів показує, що в різницевих схемах з явною штучною в'язкістю, в'язкісні параметри алгоритму апріорі визначені бути не можуть. Очевидно, що штучна в'язкість, введена як деяка стала величина не ефективна (див. рис 5.3с). Може виявитися, що і в'язкість,

введена як неперервна функція також не задовольнить вимогам. За рахунок введення в постановці задачі додаткового параметра або функції (можливо і узагальненої), ми намагаємося побудувати розв'язок задачі, який на розриві (високих градієнтах) задовольняє певним додатковим умовам. Величина цього параметра (керування) може знаходитися або експериментальним шляхом або як розв'язок задачі оптимального керування. Для цього спочатку потрібно встановити принцип (критерій), якому повинен задовольняти розв'язок поставленої задачі.

### 5.1.3. Аналіз обчислювальних експериментів розв'язання початково-крайової задачі з нелінійним рівнянням Бюргерса

Було проведено обчислювальний експеримент з параметрами:

$\beta = 1; \gamma = 1; T = 50; l = 100; h = 1; \tau = 1/3; u_1 = 3; u_2 = 1$ . На рис.5.20 представлені точний та наближений розв'язки задачі (2.69),(2.70) з крайовими умовами 1-го роду на кінцях:  $u(0, t) = u_1(t); u(l, t) = u_2(t)$ . Тут точний розв'язок  $u^*(x, t) = f(x - ct)$  [182], де  $f(x) = u_{02} + (u_{01} - u_{02}) / (1 + \exp((u_{01} - u_{02}) * x / 2 / \gamma))$ ,  
 $u_{01} = 3; u_{02} = 1; c = (u_{01} + u_{02}) / 2$ .



**Рис.5.20.** Порівняння точного та наближеного розв'язків в моменти часу

$$t_0 = 0, t_{50} = 50/3, t_{100} = 100/3, t_{150} = 1.$$

Одержані результати дозволяють стверджувати, що запропоновані двокрокові симетризовані алгоритми виду (2.72)–(2.75) мають такі ж апроксимаційні властивості як і неявні схеми з вагою рівною 0.5 і ефективні для розв'язування нелінійного рівняння Бюргерса. Проте, на відміну від вказаних неявних однокрокових двошарових схем, в даному разі для знаходження розв'язку не потрібно на кожному часовому кроці розв'язувати систему нелінійних різницьових рівнянь.

## 5.2. Обчислювальні експерименти з ідентифікації зосереджених джерел забруднень

### 5.2.1. Результати чисельного моделювання при невідомих інтенсивностях та відомих координатах

Розроблено програму, що реалізує алгоритм ідентифікації точкових джерел забруднень і відповідну комп'ютерну модель розповсюдження забруднень з використанням реальних вхідних даних, а саме:

- 1) Кількість джерел  $p = 92$  (рис. 5.22);
- 2) Кількість точок спостереження (свердловин):  $J = 24$  (рис. 5.22);
- 3) проміжок часу, впродовж якого моделюється процес 920 діб;
- 4) Параметри чисельної реалізації наступні: параметр ітераційного процесу  $s = 10^{-4}$ , кроки  $h_x = h_y = 5$ ;  $\tau = 1$ ; кількість кроків по часу  $N = 920$ ; розмір сітки:  $N_x = 300$ ,  $N_y = 100$ ; ваговий коефіцієнт в різницевих схемах (3.1)-(3.5)  $\sigma = 0$ ; параметр регуляризації  $\alpha = 0.01$ .

Отримані такі результати : на кожній ітерації спостерігалось зменшення функціоналу якості (див. рис. 5.21).

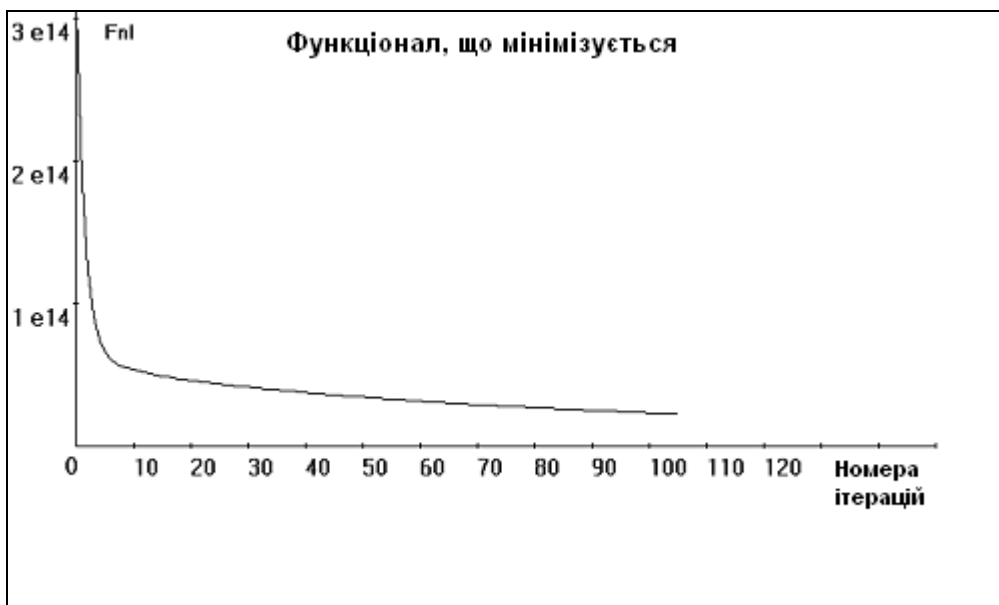


Рис. 5.21 Динаміка функціоналу якості

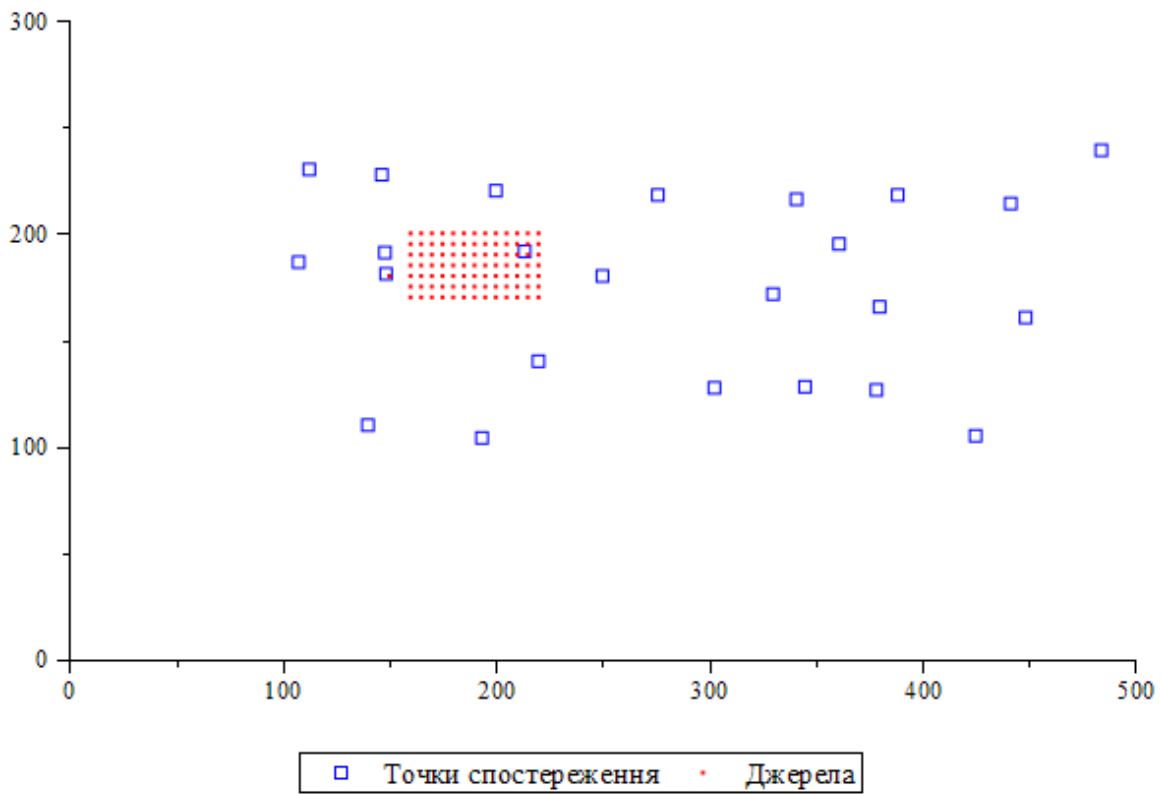


Рис. 5.22 Точки спостереження та джерела

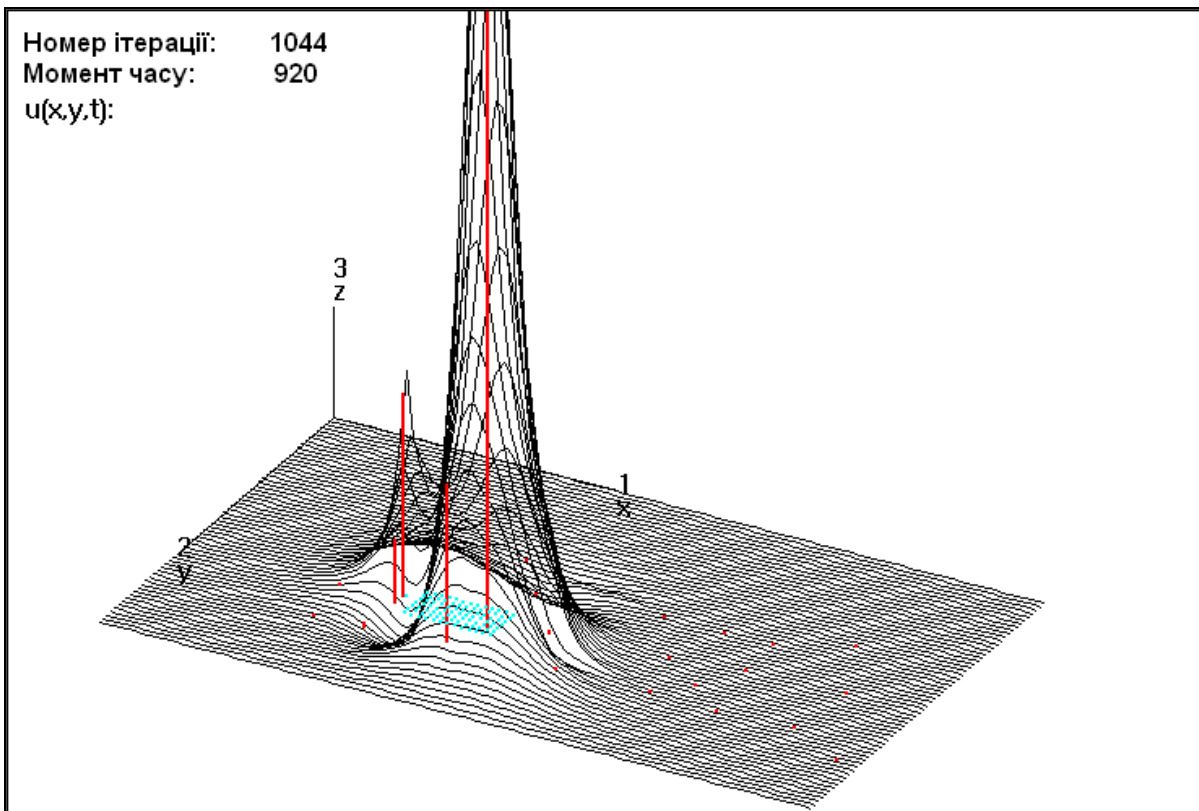


Рис. 5.22. Розподіл забруднень

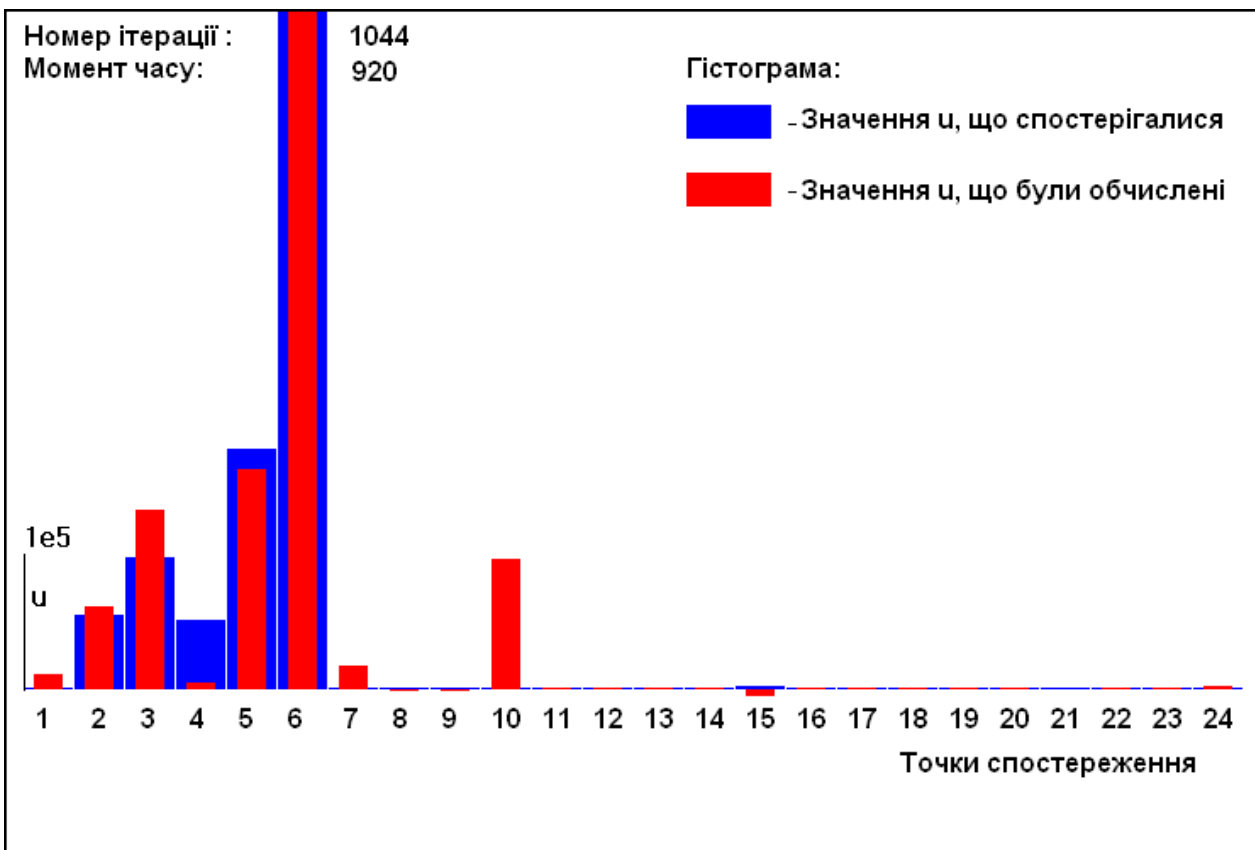
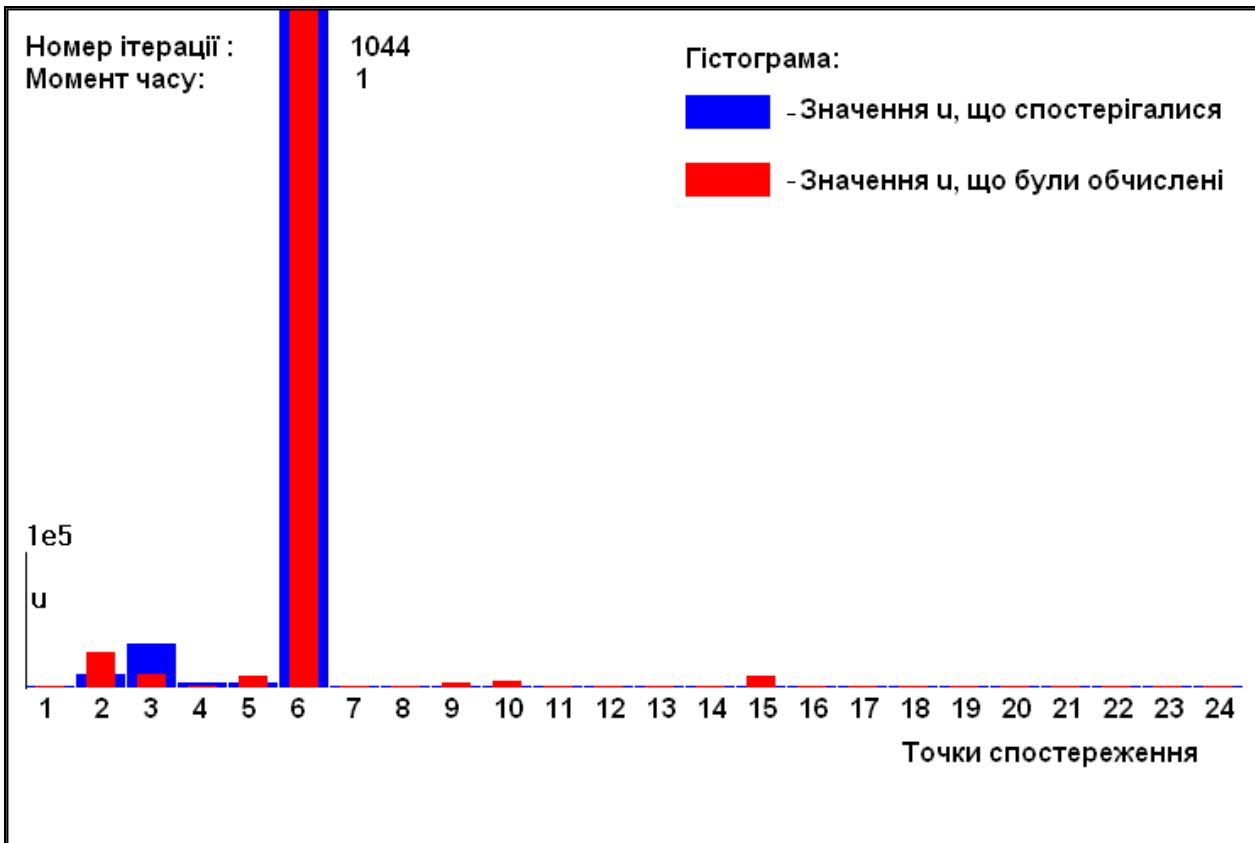


Рис. 5.24-5.25 Інтенсивності джерел

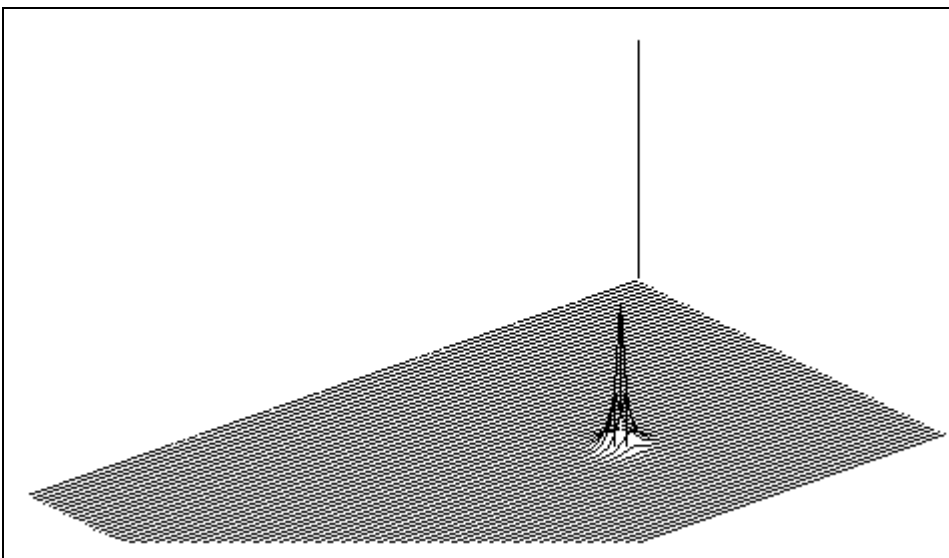
### 5.2.2. Результати чисельного моделювання при невідомих інтенсивностях та невідомих координатах

На основі даної методики була розроблена програма для ЕОМ мовою C/C++. Була розглянута пряма модельна задача з відомими джерелами. Розв'язок визначався з рівняння (1.1), граничних та початкових умов (1.2),(1.3) при заданих значеннях інтенсивності  $q^\beta(t)$  і невідомих координатах джерел  $r_x^\beta(t)$ ,  $r_y^\beta(t)$ ,  $\beta = \overline{1, p}$ . Спочатку з використанням ДС-алгоритму (3.9)-(3.13) була чисельно розв'язана пряма модельна задача з такими параметрами (рис.5.26): область  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 500, 0 \leq y \leq 300\}$ ,  $h_1 = h_2 = 5$ ; період часу  $0 \leq t \leq 920$ ,  $\tau = 2$ ; 1 джерело з координатами  $x_0 = 165, y_0 = 180$  та сталою інтенсивністю 1000.

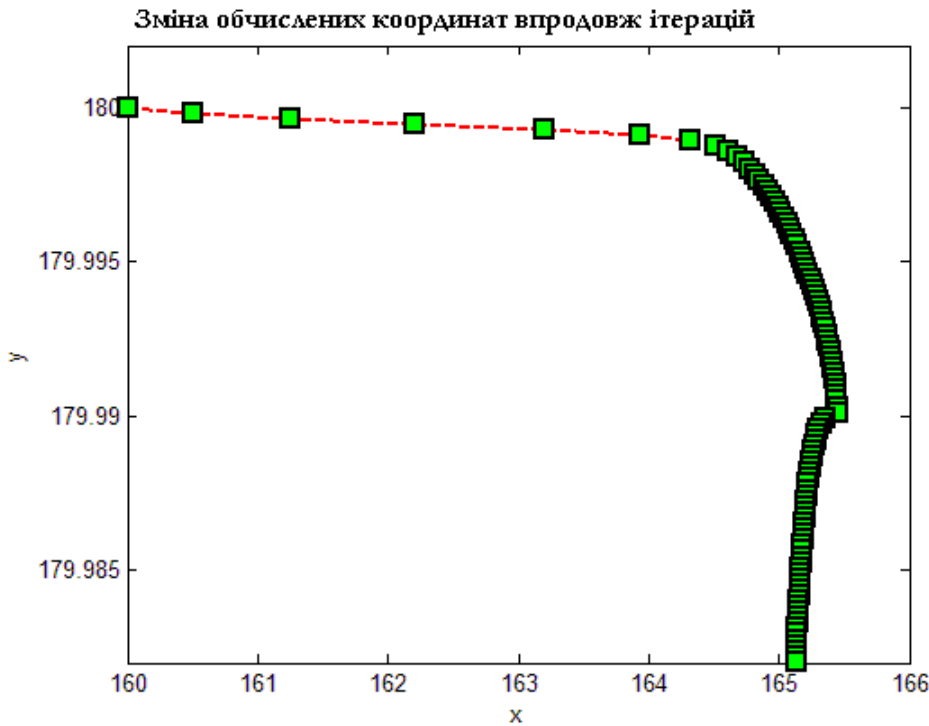
Далі з використанням обчислених значень в 4-х точках спостереження  $z_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  була розв'язана задача ідентифікації координат джерел з такими параметрами: початкове наближення  $x_0^{(0)} = 160, y_0^{(0)} = 180$ ; параметри релаксації  $\alpha = \gamma = 1$ , параметри ітераційного алгоритму  $s^k = 0, \sigma^k = 10^{-5}, k = 0, 1, 2, \dots$

В результаті виконання ітерацій спостерігалось як зменшення функціоналу, так і наближення обчислених координат джерела до модельних. На 54-55 ітераціях спостерігався різкий зменшення функціоналу (на 2 порядки).

**Рис. 5.26.** Чисельний розв'язок модельної задачі в момент часу  $n = 460$ .



**Рис. 5.27.** Обчислені значення координат та функціоналу впродовж ітерацій  
 $(\alpha = \gamma = 1, s_k = 0, \sigma_k = 10^{-5}, k = 1, 2, 3, \dots)$ .



### 5.2.3. Обчислювальні експерименти з регуляризованою моделлю

Була чисельно розв'язана модельна задача (3.19)-(3.21), з функціоналом якості вигляду

$$J(h) = \sum_{j=1}^4 \int_0^T (u(t, w_j; h) - z_j(t))^2 dt + \gamma x_{11}^2,$$

де  $w_j$  та  $z_j(t)$ ,  $j = \overline{1, 4}$  - множина заданих точок та відомі значення стану  $u(t, x)$  в даних точках,  $\varphi_1(t)$  - задана функція, що характеризує інтенсивність джерела з невідомою координатою по змінній  $x_1$ . Алгоритми (3.42)-(3.45) та (3.46)-(3.50) були використані з такими параметрами:  $n = 2$ , область  $\Omega = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 500, 0 \leq x_2 \leq 300\}$ ,  $h_1 = h_2 = 5$ ; період часу  $0 \leq t \leq 920$ ,  $\tau = 2$ ; одне джерело ( $N = 1$ ) з координатами  $x_1^* = 165$ ,  $x_2^* = 180$  та сталою відомою інтенсивністю 1000.

Далі з використанням обчислених значень в 4-х точках спостереження  $z_j$ ,  $j = \overline{1,4}$  була розв'язана задача ідентифікації координат джерел з такими параметрами: початкове наближення  $x_1^{(0)} = 160$ ,  $x_2^{(0)} = 180$ ; параметри релаксації  $\alpha = 0$  (оскільки інтенсивності джерел відомі),  $\gamma = 1$ ; параметри ітераційного алгоритму  $\rho_s = 0$ ,  $\sigma_s = 10^{-6}$ ,  $s = \overline{1,21}$ .

В результаті виконання ітерацій спостерігалось як зменшення функціоналу якості (рис.5.28), так і наближення обчислених координат джерела до модельних (рис.5.29).

Рис.5.28 Залежність функціоналу якості від номеру  $s$  ітерації ( $s = \overline{1,25}$ )

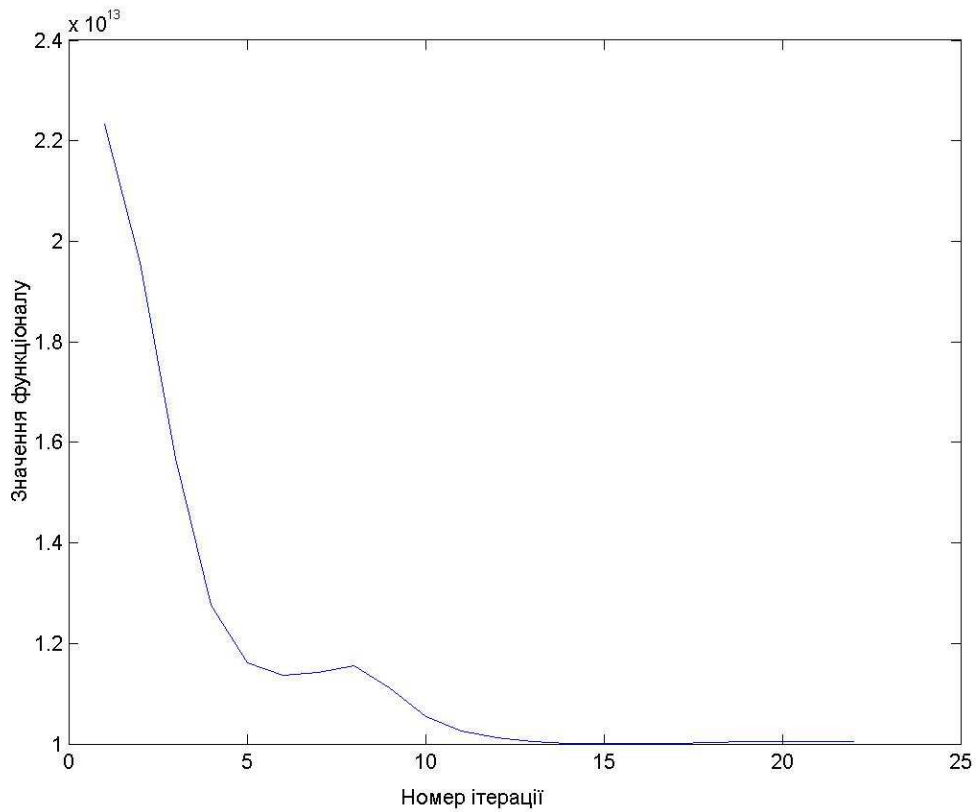
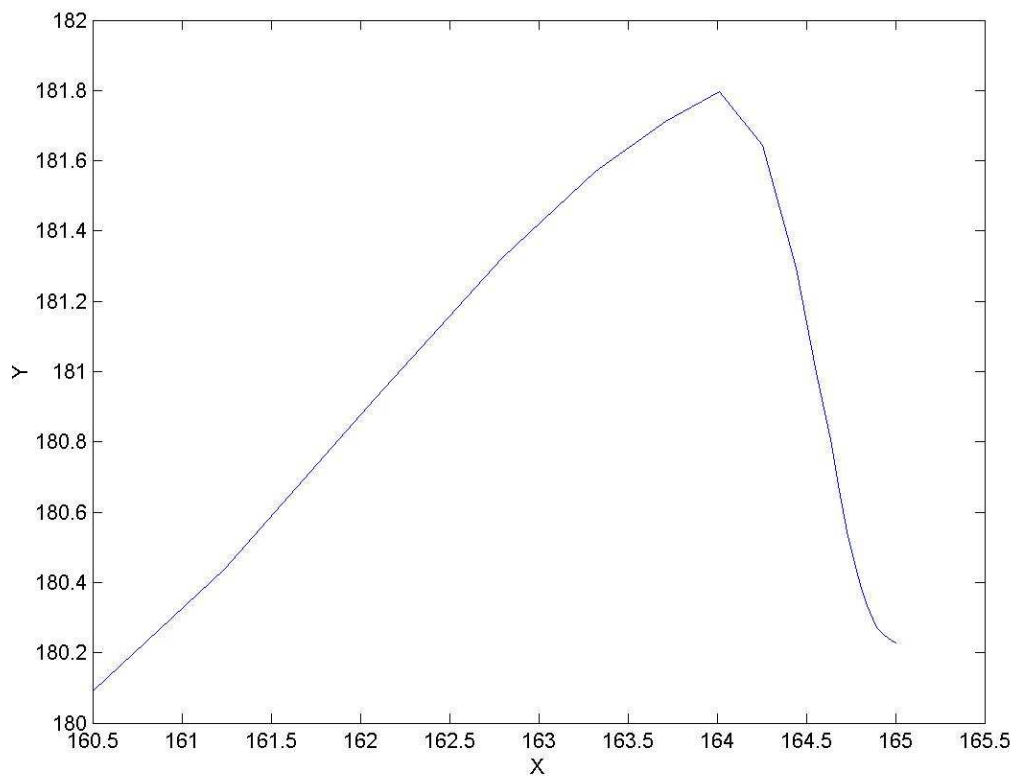


Рис. 5.29 Графік наближення обчислених координат джерела до модельних значень впродовж ітерацій.



### 5.3. Етапи чисельного моделювання процесу проявлення прихованого голографічного зображення. Нестационарна система рівнянь Нав'є-Стокса

#### 5.3.1. Чисельний розв'язок задачі для лінеризованої системи із складними крайовими умовами в контексті задачі проявлення прихованого голографічного зображення

Використовуючи метод релаксації (4.20) для рівняння Пуасона для тиску та ДС-алгоритм (4.21'),(4.22') з приведеними апроксимаціями початкових та граничних умов (4.34)-(4.38), побудованих в параграфі 4.2, було проведено обчислювальний експеримент, в результаті якого через 3697 кроків відносна похибка апроксимації в останній для обчислень момент часу і навіть відносно граничного (усталеного) точного розв'язку складала 5%.

Результати представлені на рисунках 5.30-5.33.

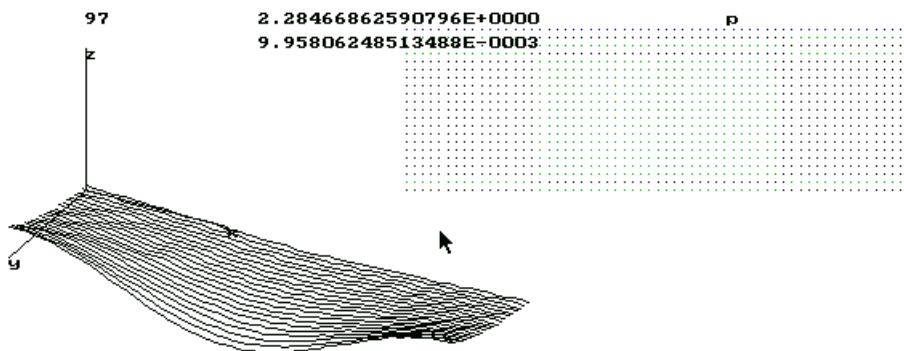


Рис. 5.30. Тиск  $p(x, y, t)$ .

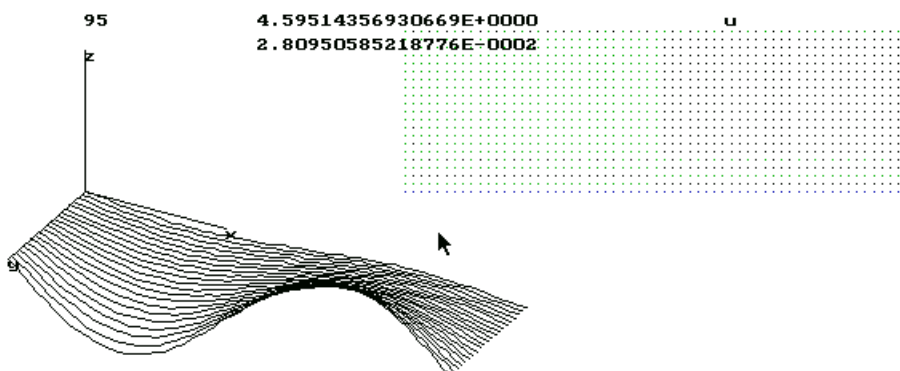
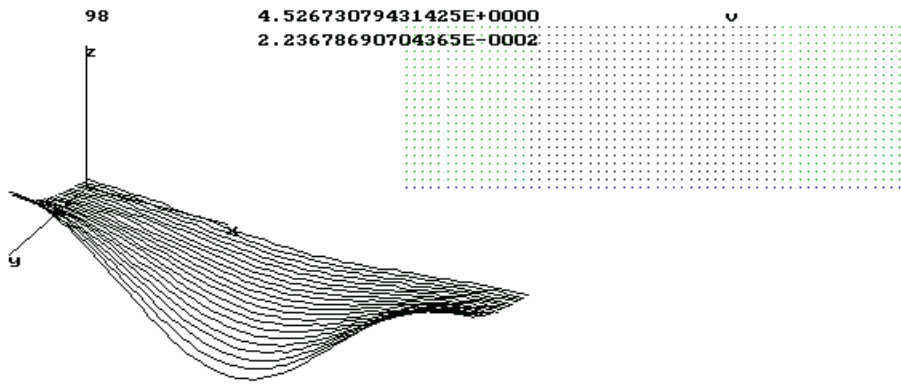
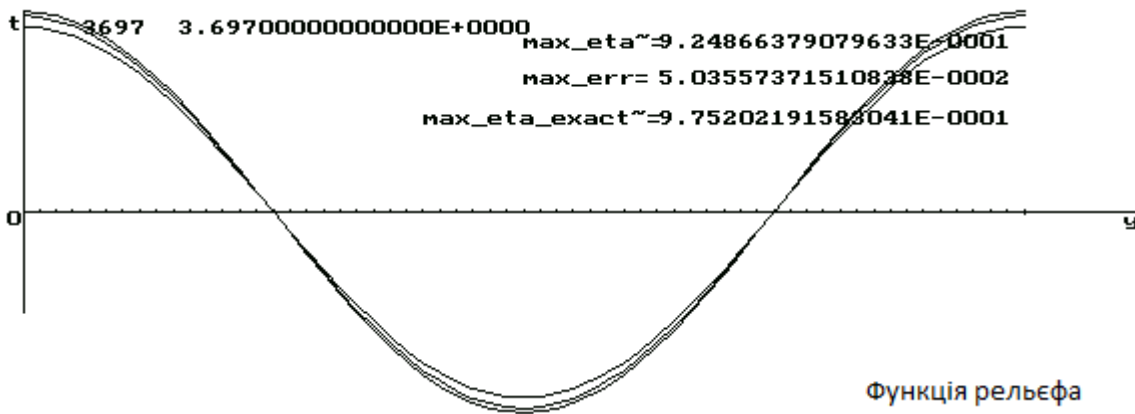


Рис. 5.31. Компонента швидкості  $u(x, y, t)$ .

Рис. 5.32. Компонента швидкості  $v(x, y, t)$ Рис. 5.33. Функція рельєфу  $\eta(x, t)$

### 5.3.2. Чисельний розв'язок задачі для лінеризованої системи із складними крайовими умовами в контексті задачі проявлення прихованого голографічного зображення з урахуванням теплового балансу

Чисельне моделювання процесу проявлення прихованого голографічного зображення за допомогою спрощеної моделі, що складається з системи рівнянь Нав'є-Стокса та рівняння теплопровідності із в'язкістю, що залежить від температури (1.72).

Джерело являє собою тонку металеву пластину, розташовану між підкладкою та термопластичним середовищем (рис.1.1), товщиною якої нехтуємо. Враховуючи несуттєві зміни температури вздовж вісі джерела, рівняння теплопровідності розглядаємо в  $R^1$  по просторовій змінній  $y$ . Отже, маємо

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu(T) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu(T) \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad 0 \leq x \leq a = \pi d, \quad 0 \leq y \leq d, \quad t > 0 \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + q(t) \delta(y - d), \quad 0 \leq y \leq d_1 = d + l, \quad t > 0 \quad (5.4)$$

Додаються початкові умови (1.65), та граничні умови (1.66)-(1.71); нормальна складова тиску на вільній поверхні (при  $y = 0$ ) задана за формулою [122]

$$P_n(x, t) = F_y \cos(a_k x) [\exp(-t / \tau_1) - \exp(-t / \tau_2)].$$

Для чисельного моделювання був використаний розроблений алгоритм (4.19)-(4.26), (4.27), (4.34)-(4.38).

Розрахунки проводилися з такими вхідними параметрами:

$$d = 1, d_1 = 2, a = \pi; T = 5;$$

$$h_x = \pi / 60, h_y = 1 / 20, \tau = 1 / 200;$$

$$q(t) \equiv 500; \mu_0 = 2.3987e-036 \text{ cm}^2/\text{sec}; T_0 = T_{d_1} = 293.16 \text{ K};$$

$\lambda / (\rho c) = 0.1$  на області  $\Omega = G_1 \cup G_2$

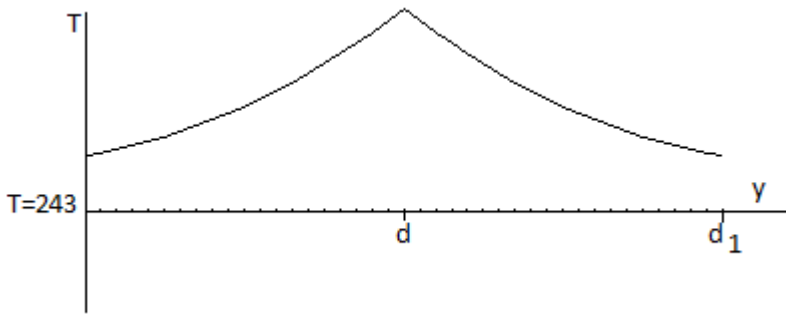


Рис. 5.34. Розподіл температури  $T(y, t)$

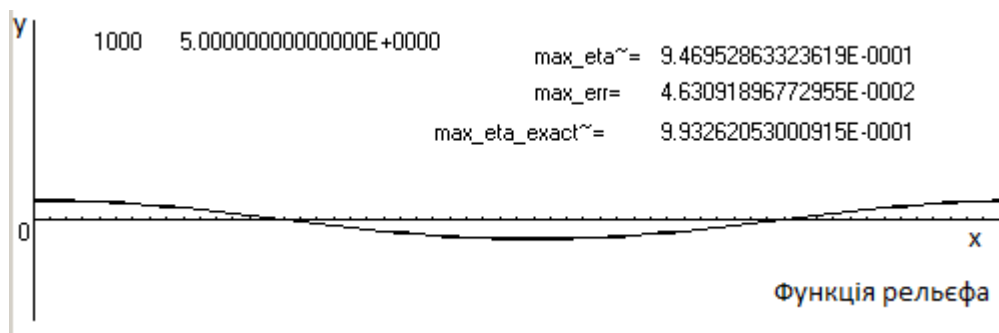


Рис. 5.35. Функція рельєфу  $\eta(x, t)$

## ВИСНОВКИ

В роботі побудовано дискретні моделі та програмне забезпечення для чисельного та комп'ютерного моделювання процесів тепло- та масопереносу, процесу рельєфоутворення, розв'язано задачі ідентифікації точкових джерел для параболічних рівнянь, розроблено двокрокові симетризовані різницеві алгоритми для визначення стану системи рівнянь Нав'є-Стокса. Зокрема,

- 1) встановлено властивості консервативності, дисипативності, дисперсійності, транспортності двокрокових симетризованих різницевих алгоритмів; досліджено вплив апроксимацій граничних умов на стійкість побудованих алгоритмів;
- 2) встановлено умови стійкості різницевих схем ДС-алгоритму для лінеаризованих моделей переносу;
- 3) розроблено алгоритм ідентифікації для уточнення координат та інтенсивностей точкових джерел забруднень;
- 4) проведено регуляризацію математичної моделі для задачі ідентифікації точкових джерел забруднень та розроблено методи ідентифікації;
- 5) побудовано алгоритм розв'язання задачі оптимального керування для лінеаризованої системи рівнянь Нав'є-Стокса;
- 6) проведено чисельні експерименти із застосуванням двокрокових симетризованих алгоритмів для лінійних диференціальних рівнянь із змінними коефіцієнтами, нелінійних диференціальних рівнянь та систем, зокрема рівняння Бюргерса, системи рівнянь Нав'є-Стокса; побудовано комп'ютерну модель процесу рельєфоутворення в голографії; побудовано комп'ютерну модель процесу розповсюдження забруднень з точковими джерелами.

## СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Калиткин Н.Н. Математические модели природы и общества / Н. Н. Калиткин, Н. В. Карпенко, А. П. Михайлов, В. Ф. Тишкин, М. В. Черенков. – М: ФИЗМАТЛИТ, 2005, –360 с.
2. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными / Ж. -Л. Лионс. – М.: Мир, 1972, 416 с.
3. Bensoussan A. Novel formulation de problems de controle impulsienel et applications / A. Bensoussan, J. L. Lions // Comp. Rend. Acad. Sc., Paris. 1973, v. 276, № 20, p. A 1189-A1192.
4. Ляшко С. И. О регуляризации задачи импульсно–точечного управления псевдопараболическими системами / С. И. Ляшко // Кибернетика и вычисл. техника. –1986. – вып. 71. – С. 25-27.
5. Ляшко С. И. Дифференцируемость регуляризованного критерия качества при импульсно–точечном управлении псевдопараболическими системами / С. И. Ляшко // Кибернетика. – 1988. – №3. – С. 64-66.
6. Ляшко С. И. Обобщенное управление линейными системами / С. И. Ляшко – К.: “Наукова думка” . –1998. – 466с.
7. Ляшко И. И. Вопросы автоматизированного расчета задач на ЭВМ / И. И. Ляшко, И. В. Сергиенко, Г. Е. Мистецкий, В. В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1977. – 288 с.
8. Ляшко І. І. Побудова стійких схем розв’язування змішаної задачі для еволюційного узагальнення просторових рівнянь Нав’є-Стокса / І. І. Ляшко, Н. З. Прохур // Доп. АН УРСР, сер А. – 1985. №12. С. 14-16.
9. Белов Ю. А. Математическое обеспечение сложного эксперимента / Ю. А. Белов, В. П. Диденко, Н. Н. Козлов, И. И. Ляшко, В. Л. Макаров, О. Е. Цитрицкий. – К.: Наук. думка, 1982-1984. Тт.1-4.
10. Григоренко Я. М. Задачи теории упругости неоднородного тела / Я. М. Григоренко, А. Т. Василенко, Н. Д. Панкратова. – К.: Наукова думка, 1991. – 216 с.

11. Дейнека В. С. Математические модели и методы решения задач с разрывными решениями / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. – К.: Наук. думка, 1995. – 262с.
12. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. – К.: Наук. думка, 1991. – 432 с.
13. Ермоленко Ю. М. Конечно–разностный метод в задачах оптимального управления / Ю. М. Ермоленко, В. П. Гуленко, Т. И. Царенко. – К.: Наук. думка, 1976. – 164 с.
14. Пшеничный Б. Н. Численные методы в экстремальных задачах / Б. Н. Пшеничный, Ю. М. Данилин. – М.: Наука, 1975. – 320 с.
15. Пшеничный Б. Н. Выпуклый анализ и экстремальные задачи / Б. Н. Пшеничный. – М.: Наука, 1980. – 320 с.
16. Скопецкий В. В. О некоторых новых результатах решения проблемы моделирования и управления динамики систем с распределенными параметрами / В. В. Скопецкий, В. А. Стоян // Проблемы управления и информатики. – 2002. – №3, с. 73-84.
17. Скопецкий В. В. Математичне моделювання прямих та обернених задач динаміки систем з розподіленими параметрами / В. В. Скопецкий, В. А. Стоян // НАН України, ін-т кібернетики, КНУ ім. Шевченка., К.: Наукова думка. – 2002. – 361с.
18. Белоцерковский О. М. Нестационарный метод крупных частиц для решения задач внешней аэродинамики / О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давидов // ЖВМ и МФ. – 1971. Т.11. №1. С. 182-207.
19. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О. М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1994.
20. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье - Стокса для сжимаемого газа / И. Ю. Браиловская // ДАН СССР. – 1965. – Т. 160. – №5. – С. 1042-1045.

21. Браиловская И. Ю. Явные разностные методы для расчета отрывных течений вязкого сжимаемого газа / И. Ю. Браиловская // Некоторые применения метода сеток в газовой динамике. – М.: Изд-во при МГУ. – 1971. – Вып. 4. – С. 6-85.
22. Браиловская И. Ю. Разностный метод численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье-Стокса для сжимаемой жидкости / И. Ю. Браиловская // В кн. Вычислительные методы и программирование. Вып. 7. М.: Изд-во ЛГУ. – 1967. С. 3-15.
23. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О. А. Ладыженская. М.: Наука, 1970. – 288 с.
24. Ладыженская О. А. О новых уравнениях для описания движения вязких несжимаемых жидкостей и разрешимости в целом для них краевых задач / О. А. Ладыженская. – Труды МИАН им. Стеклова, 1967. – вып. 102. – с. 85-104.
25. Ладыженская О. А. О разрешимости краевых и начально-краевых задач для уравнений Навье-Стокса в областях с некомпактными границами / О. А. Ладыженская, В. А. Солонников // Вестник ЛГУ, 1977, № 13, с. 39-47.
26. Ладыженская О. А. О разрешимости основных краевых задач для уравнений параболического и гиперболического типов / О. А. Ладыженская // Докл. АН СССР. – 1954. – Т. 97. – №3. – С. 395-398.
27. Ладыженская О. А. Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье-Стокса, существование и гладкость / О. А. Ладыженская // Успехи мат. наук, 2003. – т.58. – вып.2. – С.45-78.
28. Лионс Ж. Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / Ж. Л. Лионс. – М., 1972. – 587 с.
29. Лионс Ж. Л. Неоднородные граничные задачи и их приложения / Ж. Л. Лионс, Е. Мадженес (Lions J.-L., Magenes E.). – М.: Мир, 1971. – 371 с.

30. Марчук Г.И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. –М.: Наука. – 1989. – 608 с.
31. Темам (R. Temam) Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ / Темам (Temam R.) –М.: Мир. – 1981. – 408 с.
32. Вабищевич П.Н. Математическое моделирование / П. Н. Вабищевич. –М.: МГУ, 1993, 152с.
33. Пейре Р. Вычислительные методы в задачах механики жидкости / Р. Пейре, Т. Тейлор.– Л.: Гидрометеиздат, 1986. –352 с.
34. Раджагонал К. Р. О некоторых нерешенных проблемах нелинейной динамики жидкостей / К. Р. Раджагонал // Успехи мат. наук, 2003, т.58, вып.2, С.111-122.
35. Гущо Ю.П. Фазовая рельефография / Ю. П. Гущо. –М.: Наука, 1974. – 168 с.
36. Заболотный М.А. Визуализация скрытого изображения в тонких пленках полимерных полупроводников / М. А. Заболотный // Физические основы оптической памяти и среды. К.: – 1986. – Вып. 17. – С.28–40.
37. Роуч П. Вычислительная гидродинамика / П. Роуч. – М.:Мир, 1980. 616 с.
38. Юдович В. И. О проблемах и перспективах современной математической гидродинамики / В. И. Юдович // Успехи механики, 2002, т.1, №1, С.61-102.
39. Динабург Е.И., Синай Я.Г. Существование и единственность решений квазилинейной аппроксимации 3-х мерной системы Навье-Стокса / Е. И. Динабург, Я. Г. Синай // Проблемы передачи информации, 2003, т.39, вып.1, С.53-57.
40. Искуариаза Л. L3-решения уравнений Навье-Стокса / Л. Искуариаза, Г. А. Серегин, В. Шверак // Успехи мат. наук, 2003, т.58, вып.2, С. 3-44.
41. Махалов А.С. Глобальная разрешимость 3-х мерных уравнений Навье-Стокса с равномерно большой начальной завихренностью / А. С. Махалов, В. П. Николаенко // Успехи мат. наук, 2003, т.58, вып.2, С.79-110.

42. Dubois Sandrine C.R. What is a solution to the Navier-Stokes equations? / C. R. Dubois Sandrine // Mathematical Academy of Sciences, Paris, 2002, v.335, №1, p. 27-32.
43. Chen Gui-Qiang. Global Solution to the Navier-Stokes equations for compressible heat-conducting flow with symmetry and free boundary / Chen Gui-Qiang, Krapka Milan // Commun. Partial Differential Equations, 2002, v.27, №5-6, p. 907-943.
44. Динабург Е.И. Новые конечно-мерные аппроксимации 3-х мерной системы Навье-Стокса / Е. И. Динабург // Доклады РАН 2002, т.383, №2, С.151-155.
45. Данаев Н.Т. Об одном классе итерационных схем для решения сеточных уравнений Навье-Стокса / Н. Т. Данаев, Ш. С. Смагулов, Л. М. Тукелова // Сибирский журнал вычислительной математики, 2002, т.5, №3, С. 225-251.
46. Nicoud F.J. Conservative high-order finite-differential schemes for low-Mach number flows / F. J. Nicoud // Computational Physics, 2000, v.158, №1, p. 71-97.
47. Selçuk Nevin. Comparison of methods of lines and finite differences solutions of 2-D Navier-Stokes equations for transient laminar pipe flow / Selçuk Nevin, Tarhan Tanil, Tanriculn Songül // Int. J. Numer. Meth. Eng. 2002, v.53, №7, p.1615-1628.
48. Mucha Piotr Boguslav. On existence for Dirichlet problem for the compressible linearized Navier-Stokes system in the  $L_p$ - framework / Mucha Piotr Boguslav, Zajaczkowski Wojciech // Ann. Pol. Math. 2002, v.78, №3, p. 241-260.
49. Грищенко О.Ю. Про один ітераційний алгоритм розв'язування початково – крайової задачі для системи рівнянь Нав'є -Стокса / О. Ю. Грищенко, В. І. Ляшко, Л. І. Потапенко // Вісник Київського університету. Сер. фіз.-мат. науки. 2001. Вип. 1. – С. 180–185.
50. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач / Р. Рихтмайер, К. Мортон – М.: Мир, –1972. – 418с.

51. Балдыбек Ж. Об одном приближенном методе решения начально-краевой задачи для уравнения Навье-Стокса / Ж. Балдыбек, М. Отелбаев, Ш. Смагулов // Доклады Рос. Академии наук, 2002, т.386, №4, С.439-442.
52. Быченков Ю.В. Об одном 3-х параметрическом методе решения уравнений Навье-Стокса / Ю. В. Быченков // Ж. вычислительной математики и математической физики, 2002, т.42, №9, С.1405-1412.
53. Курганов Д.В. Матричный метод расчета уравнений Навье-Стокса в естественных переменных / Д. В. Курганов, О. С. Мажорова, Ю. П. Попов // Дифференциальные уравнения, 2002, т.38, №7, С.955-960.
54. Kobayashi Takayuki.  $L_2$  и  $L_\infty$  оценки решений сжимаемых уравнений Навье-Стокса в 3-мерной внешней области / Kobayashi Takayuki // Publ. Res. Inst. Math. Sci. 2002, v. 38, №1, p. 211-225.
55. Ren Chun-feng. Two-grid error estimates for the stream form of Navier-Stokes equations / Ren Chun-feng, Ma Yi-chen // Appl. Math. And Mech. Engl. Ed. 2002, v. 23, №7, p. 773-782.
56. Kobayashi Takayuki. Remark on the rate of decay of solution of linearized compressible Navier-Stokes equations / Kobayashi Takayuki, Shibata Yoshihiro // Pasif. J. Math. 2002, v. 207, p. 199-234.
57. Iftimie Dragos. A uniqueness result for the Navier-Stokes equations with vanishing vertical viscosity / Iftimie Dragos // SIAM J. Math. Anal. 2002, v. 33, №6, p. 1483-1493.
58. Gallaher I. Existence et unicité de solutions pour le système de Navier-Stokes axisymétrique / I. Gallaher, S. Ibrahim, M. Majdoub // Commun. Part. Differ. Equat. 2001, v.26, №5-6, p. 883-907.
59. Балаганский М.Ю. Итерационное решение системы нелинейных уравнений Навье-Стокса для функций тока-вихря / М.Ю.Балаганский // Новокузнецк:НФИ КемГУ, 2002, С. 26-30.
60. Wang Hiaoshen. Superconvergence analysis for the Navier-Stokes equations / Wang Hiaoshen, Ye Hiu // Appl. Numer. Math., 2002, v. 41, №4, p. 515-527.

61. Серегин Г. А. Дифференциальные свойства слабых решений уравнений Навье-Стокса / Г. А. Серегин // Алгебра и анализ. 2002, т.14, №1, С. 194-237.
62. Бирюк А. Э. О пространственных производных решений уравнений Навье-Стокса с малой вязкостью / А. Э. Бирюк // Успехи мат. Наук. 2002, т.57, №1, С. 147-148.
63. Кобельков Г. М. Симметричные аппроксимации уравнений Навье-Стокса / Г. М. Кобельков // М.: Мат. Сб. 2002, т. 193, №7, С. 87-108.
64. Choe Hi Jun. Strong solutions of the Navier-Stokes equations for nonhomogeneous incompressible fluids / Choe Hi Jun, Kim Hyunseok // Commun. Part. Differ. Equat. 2003, v.28, №5-6, p.1183-1201.
65. Caffarelli L. Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier-Stokes equations / L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg // Common Pure and Applied Mathematics, v. 35 (1982), 771-831.
66. Leray J. Sur le Mouvement d'un Liquide Visquex Emplissent l'Espace / J. Leray // Acta Math., v.63 (1934), p. 193-248.
67. O'Leary Mike. Conditions for the local boundedness of solutions for the Navier-Stokes system in tree dimensions / Mike O'Leary // Commun. Part. Differ. Equat. 2003, v.28, №3-4, p.617-636.
68. Rao Joulan. The time- asymptotic behavior of the general Navier-Stokes equations in even multidimensions / Rao Joulan, Wang Weike // Shuxue Zazhi=J. Math. 1999, v.19, №4, p. 361-367.
69. Skalák Zdeněk. Additonal note partial regularity of weak solutions of the Navier-Stokes equations in the class  $L^\infty(0, T, L^3(\Omega)^3)$  / Skalák Zdeněk // Appl. Math. 2003, v.48, №2, p. 153-159.
70. Семин Л.Г. Метод коллокации и наименьших квадратов решения краевых задач для уравнений Навье-Стокса / Л. Г. Семин // К.ф.м.н. Институт математики СО РАН, Новосибирск, 2002, 17с.
71. Zedan Hasan A. On properties of the Navier-Stokes equations / A. Zedan Hasan // Appl. Math. and Comput. 2003, v.144, №2-3, p.287-304.

72. Yamazak Masao. The Navier-Stokes equations in various function spaces / Yamazak Masao // Selected Papers on Classical Analysis: Transl. from dep. Providece (R.1.): Amer. Math. Soc. 2001, p.111-132.
73. Колмычков В. В., Мажорова О. С., Попов Ю. П. К расчету уравнений Навье-Стокса в естественных переменных / В. В. Колмычков, О. С. Мажорова, Ю. П. Попов // Препринт Ин-т прикл. мат. РАН. 2001, №60, С.1-40.
74. Fursikov A. V. Feedback stabilization for Navier-Stokes equations: Theory and Calculations / A. V. Fursikov, A. A. Kornev // Partial Differential Equations and Fluid Mechanics. –2011. – p.1-44.
75. Андерсон Д. Вычислительная гидродинамика и теплообмен / Д. Андерсон, Дж. Танненхил, Р. Плетчер. В 2-х томах. Т. 2. – М.: Мир, 1990. – 384 с.
76. Chorin H. K. A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous flow Problems / H. K. Chorin // J. Comp. Phys. – 1967. – V.2. – P. 12-26.
77. Марчук Г.И. Методы расщепления / Г. И. Марчук. – М. Наука, 1989. – 320 с.
78. Харлоу Ф. Численный метод частиц в ячейках для задач гидродинамики / Ф. Харлоу // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир. – 1967. – С. 316-342.
79. Белоцерковский О. М. Нестационарный метод крупных частиц для решения задач внешней аэродинамики / О. М. Белоцерковский, Ю. М. Давидов // ЖВМ и МФ. – 1971. – Т.11. – №1. – С. 182-207.
80. Бим Р. М. Неявная факторизованная разностная схема для уравнения Навье-Стокса сжимаемого газа / Р. М. Бим, Р. Ф. Уорминг // РТК. – 1978. – Т. 16. – №4. – С. 34-42.
81. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1983. – 616 с.
82. Годунов С. К. Разностные схемы / С. К. Годунов, А. С. Рябенский. – М.: Наука, 1977. – 440 с.

83. Самарский А. А. Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. – М.: Наука, 1973. – 415 с.
84. Ляшко И. И. Численно–аналитическое решение краевых задач теории фильтрации / И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко. – К.: Наукова думка, 1973. – 264 с.
85. Гладкий А. В. Алгоритмизация и численный расчет фильтрационных схем / А. В. Гладкий, И. И. Ляшко, Г. Е. Мистецкий. – К.: Виша школа, 1981. – 288 с.
86. Положий Г. Н. Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента / Г. Н. Положий. – К.: Изд-во Киевского ун-та, 1962. – 164 с.
87. Шокин Ю. И. Метод дифференциального приближения. Применение к задачам газовой динамики / Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1985. – 364 с.
88. Полежаев В. М. Численное моделирование процессов тепло-массопереноса / В. М. Полежаев, В. М. Пасконов, Л. А. Чудов. – М.: Наука, 1984. – 288 с.
89. Лакс П. Об устойчивости конечно-разностных аппроксимаций гиперболических уравнений с переменными коэффициентами / П. Лакс // Математика (сб. переводов). – 1962. – Т.6. – № 3.
90. Мак-Кормак Р. В. Численный метод решения уравнений вязких течений / Р. В. Мак-Кормак // Аэрокосмическая техника. – 1983. – Т. 1. – №4. – С. 114-123.
91. Браиловская И. Ю. Разностная схема для численного решения двумерных нестационарных уравнений Навье - Стокса для сжимаемого газа / И. Ю. Браиловская // ДАН СССР. – 1965. – Т. 160. – №5. – С. 1042-1045.
92. Allen J. S. Numerical solutions of the compressible Navier-Stokes equations for the laminar near wake / J. S. Allen, S. J. Chen // Phys. Fluids. – 1970. – V.13. – № 1. – P.37-52.

93. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики / Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1967. – 196 с.
94. Ковеня В. М. Метод расщепления в задачах газовой динамики / В. М. Ковеня, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1981. – 304 с.
95. Белоцерковский О. М. Численное моделирование в механике сплошных сред / О. М. Белоцерковский. – М.: Наука, 1984. – 520с.
96. Самарский А. А. Разностные методы решения задач идентификации источника для параболических задач / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич // Вестник Московского университета, С.15, Вычислительная математика и кибернетика 1995, № 1, с. 47-56.
97. Вабищевич П. Н. Численное решение задачи идентификации младшего коэффициента эллиптического уравнения / П. Н. Вабищевич // Дифференциальные уравнения. – 2002, Т. 38, №7, С. 943-948.
98. Ткаченко Д. С. Обратные задачи об источнике для параболических уравнений и систем с финальным и интегральным переопределением / Д. С. Ткаченко // Автореф. дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. МИ-ФИ, М.:2002, 16с.
99. Прилепко А. И. Фредгольмовость и корректная разрешимость обратной задачи об источнике с интегральным переопределением / А. И. Прилепко, Д. С. Ткаченко // Ж.в.м. и м. ф. –2003. –т.43, №9, С. 1392-1401
100. Ляшко С. И. Моделирование и оптимизация подземного массопереноса / С. И. Ляшко, Д. А. Ключин, А. С. Тригуб. – 1988. – С.110-237.
101. Грищенко О. Ю. Дисипативність двокрокових симетризованих алгоритмів для гіперболічних рівнянь переносу / О. Ю. Грищенко, В. В. Оноцький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – вип. 3. – 2000. – С. 182-189.
102. Грищенко О. Ю. Двокрокові різницеві алгоритми для гіперболічних рівнянь першого порядку з керованою штучною в'язкістю /

- О. Ю. Грищенко, В. І. Ляшко, В. В. Оноцький // Журнал обчислювальної та прикладної математики. –2001. – вип. 1(86). – С. 20-28.
103. Оноцький В.В., Вплив апроксимації граничних умов на стійкість двокрокового симетризованого алгоритму для рівнянь Нав'є-Стокса / В. В. Оноцький // Dynamical systems modeling and stability investigation. International conference. Thesis of conference reports.– Київ. – 2001. – С. 205.
104. Оноцький В. В., Застосування двокрокових симетризованих алгоритмів для розв'язування нестационарних рівнянь Нав'є-Стокса / В. В. Оноцький // Міжнародна конференція “Обчислювальна та прикладна математика”. Збірка тез. – 2002. – С. 71.
105. Ляшко І. І. Економічний чисельний алгоритм для одного класу нелінійних крайових задач / І. І. Ляшко, О. Ю. Грищенко, В. М. Склеповий, В. В. Оноцький // Доповіді НАН України. – вип. 3. – 2003. – С. 68-72.
106. Грищенко О. Ю. Двокроковий різницевий алгоритм знаходження періодичних розв'язків рівнянь типу Шредінгера / О. Ю. Грищенко, В. Г. Слюсаренко, В. В. Оноцький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – вип. 2. – 2004. – С. 204-209.
107. Грищенко О. Ю. Про один чисельний алгоритм моделювання динамічних процесів ньютонівської теплопровідної рідини / О. Ю. Грищенко, В. В. Оноцький // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – вип. 3 – 2004.– С.192-197.
108. Грищенко О. Ю. Регуляризація дельта-функції в задачі ідентифікації точкових джерел забруднень / О. Ю. Грищенко, Н. І. Ляшко, В. В. Оноцький // XII Всеукраїнська наукова конференція “Сучасні проблеми прикладної математики та інформатики”, Тези доповідей, Львів – 2005. – С. 73.
109. Ляшко Н. И. Об одном алгоритме регуляризации сингулярных управлений параболическими системами / Н. И. Ляшко, А. Е. Грищенко, В. В. Оноцкий // Кибернетика и системный анализ, 2006, №1, С.86-94.

110. Грищенко О. Ю. Про один двокроковий скінченно–різницький алгоритм моделювання процесів переносу / О. Ю. Грищенко, В. І. Ляшко, В. В. Оноцький // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. – вип. 7 – 2006. С. 7-10.
111. Ключин Д. А. Численное решение задач тепломассопереноса в грунте при микроорошении / Д. А. Ключин // Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1994 – 158 с.
112. Кулагин В. П. Некоторые прикладные задачи идентификации / В. П. Кулагин // М.:Техн.ун-т. – 2002. 81 с.
113. Жуков В. Т. Применение метода конечных суперэлементов для решения задачи конвекции-диффузии / В. Т. Жуков, Н. Д. Новикова, Л. Т. Стаховская, Р. П. Федоренко, О. Б. Феодоритова // Матем. моделир. – 2002, Т.14, №11, С. 78-92.
114. Герман Е. В. Об одной задаче идентификации функции источника для эллиптических уравнений / Е. В. Герман // Вопросы мат. ан.: Сб. научных трудов, посв. 45-летию КГТУ, Вып.4. Красноярск: КГТУ, – 2001. С.37-47.
115. Панасенко В. В. Решение задачи идентификации модели динамического объекта при однократном наблюдении его состояния / В. В. Панасенко, С. В. Соколов, И. В. Щербань // Изв. РАН. Теория и системы управления. –2003, №1, с.24-28.
116. Кулагин В. П. Принципы применения быстродействующих алгоритмов для идентификации моделей с распределенными параметрами / В. П. Кулагин // Мос. гос. ин-т электоники и математики (техн. ун-т), М. – 2003, 33с.
117. Заболотская Е. И. Двойственный регуляризованный метод в задаче оптимального управления параболических систем / Е. И. Заболотская, А. З. Ишмухаметов // Вопросы моделир. и анализа в задачах принятия решений. ВЦ РАН. М. 2002. С.165-171.

118. Эммануилов О. Ю. Управляемость параболическими уравнениями / О. Ю. Эммануилов // М.: Мат. сборник, 1995, т. 186, №6, с.109-132.
119. Тихонов А. Н. Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. – М.: Наука 1986.
120. Алифанов О. М. Экстремальные методы решения некорректных задач / О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев. – М., 1988.
121. Самарский А. А. Методы решения сеточных уравнений / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. – М., 1978.
122. Грищенко О. Ю. Чисельне моделювання і оптимізація динамічних і релаксаційних процесів: Дис... д-ра фіз.-мат. наук: 01.05.02 / О. Ю. Грищенко. – Київський національний ун-т ім. Тараса Шевченка – К., 2003. – 301 арк. : рис. – Бібліогр.: арк. 297.
123. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток / В. К. Саульев. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 324 с.
124. Гулин А. В. Об устойчивости одного класса разностных схем / А. В. Гулин, А. А. Самарский // Диф. Уравнения, 1993, Т. 29, №7, С. 1163-1173.
125. Самарский А. А. Критерий устойчивости семейства разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин // Доклады РАН, 1993, Т.330, №6, С. 694-695.
126. Гулин А. В. Критерий устойчивости двумерных разностных схем / А. В. Гулин, С. Л. Дегтярев // Диф. уравнения, 1996, Т.3, №7, С.1-8.
127. Гулин А. В. Численное исследование устойчивости двухслойных разностных схем для двумерного уравнения теплопроводности / А. В. Гулин, Л. Ф. Юхно // Ж. в. м. и мат. физ., 1996, Т.36, №8, С. 118-126.
128. Гулин А. В. Границы устойчивости двумерных разностных схем / А. В. Гулин, Л. Ф. Юхно // Мат. моделирование, 1998, Т.10, №1, С.44-50.
129. Дегтярев С. Л. Об устойчивости разностных схем с переменными весами для одномерного уравнения теплопроводности / С. Л. Дегтярев // Ж. в. м. и мат. физ., 1994, Т.34, №8-9, С.1316-1322.

130. Оран Элейн. Численное моделирование реагирующих потоков / Элейн Оран, Джей Борис. – М., Мир, 1990, 660 с., стр. 136-142, 329-336.
131. Грищенко О. Ю. Чисельне моделювання процесів релаксаційної газової динаміки / О. Ю. Грищенко, С. І. Ляшко, О. І. Молодцов. – К. : “Віпол”, – 1998. –224 с.
132. Самарский А. А. О регуляризации разностных схем / А. А. Самарский // Ж.в.м. и мат.физ, 1967, Т.7, №1, с. 62-93.
133. Rensoussan A. Novel formulation de problems de controle impulsienel et applications / A. Rensoussan, J. L. Lions // –Comp. Rend. Acad. Sc., Paris. 1973, t. 276, № 20, p. A 1189-A1192.
134. Давыдов А. С. Квантовая механика / А. С. Давыдов. – М., – 1975. – 704 с.
135. Ляшко И. И. Об одной разностной схеме для нелинейной фильтрации тяжелой несжимаемой жидкости / И. И. Ляшко, А. Е. Грищенко, В. Н. Склеповой // Вычислительная и прикладная математика. Вып. 44, 1981. – С. 126–138.
136. Zienkiewicz O. C. The Finite Element Method / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. – 4<sup>th</sup> ed., McGraw-Hill, New York, 1989.
137. Вукальський І. Д. Одностороння нелокальна крайова задача для сингулярних параболічних рівнянь / І. Д. Вукальський // Укр. мат. журнал. – 2001, Т.53, №11, С. 1521-1531.
138. Каплун Ю. І. Асимптотичні розв’язки сингулярно збурених диференціальних рівнянь з імпульсною дією / Ю. І. Каплун. – Автореф. дис. к.ф.-м.н. КНУ ім. Шевченка, Київ, – 2002.
139. Бутузова М. В. Бисингулярные начально-краевые задачи для параболических уравнений / М. В. Бутузова // МГУ. ВМК. М., – 2001, 21с.
140. Самойленко А. М. Сингулярне збурення рівняння з імпульсною дією / А. М. Самойленко, Ю. І. Каплун, В. Г. Самойленко // Укр.мат.журнал. – 2002, Т.54, №8, С. 1089-1099.

141. Андреев В. Б. Поточечные и весовые априорные оценки решения и его первой производной для сингулярных возмущений уравнения конвекции-диффузии / В. Б. Андреев // Диф.уравн. – 2002, т.38, №7, С.918-929.
142. Шишкин Г. И. Сеточная аппроксимация решений и производных в случае сингулярных возмущений эллиптических уравнений конвекции-диффузии / Г. И. Шишкин // Доклады РАН, – 2002, т.384, №3, С. 312-315.
143. Yusubov Sh. Sk. The necessary conditions of optimality for impulse excitations / Sh. Sk.Yusubov // Proc. Inst. Math. And Mech. Azeb. Acad. Sci. – 2001. 15, p.223-227.
144. Остапенко В. В. Симметричные компактные схемы с искусственной вязкостью повышенного порядка дивергентности / В. В. Остапенко // Ж.в.м. и м.ф. – 2002, т.42, №7, С.1019-1038.
145. Еримеев В. Н. Вариационный подход в задачах идентификации входящих параметров гидродинамических моделей по данным измерений и планирования экспериментов / В. Н. Еримеев, С. В. Кочергин // Морской гидрофиз. журнал, – 2002, №1, С.59-68.
146. Лаврик В. І. Математичне моделювання деяких нерівноважних процесів фільтраційно-конвективної дифузії / В. І. Лаврик, В. М. Булавицький // Доп. НАН України, – 2002, №2, С.68-72.
147. Сергиенко И. В. Оптимальное управление параболическими системами с условиями сосредоточенной теплоемкости / И. В. Сергиенко, В. С. Дейнека // Пробл. управл. и информатики. – 2003, №3, С.5-26.
148. Ляшко С. И. Обобщенное решение и оптимальное управление в системах, описывающих динамику вязкой стратифицированной жидкости / С. И. Ляшко, Д. А. Номировский // Диф. ур., – 2003. 39, №1, С. 84-91.
149. Bewley T. Existence and uniqueness of optimal control of the Navier-Stokes equations / T. Bewley, R. Temam // C. r. Acad. sci. Ser. 1. – 2000, v.330, №11, p. 1007-1011.

150. Barbu Viorel. Contrallability of parabolic and Navier-Stokes equations / Viorel Barbu // *Sci. Math. Jap.* – 2002. 56, №1, p. 143-211.
151. Лаврентьев М. М. Некорректные задачи математической физики и анализа / М. М. Лаврентьев, В. Г. Романов, С. П. Шишатский. – М., 1980.
152. Lyasko Sergey. Identification of Point Contamination Source in Ground Water / Sergey Lyasko, Klyushin, Vladimir Semenov, Katerina Shevchenko // *Int. J. Ecol. Dev.*; Vol.5, No. F06, Fall 2006, p.36-43.
153. Leray J. Etude de diverses equations integrees nonlineaires et de quelques problemes que pose l'hydrodynamique / J. Leray // *J. Math. Pures Appl.*, 12, 1933, p. 1-82.
154. Leray J. Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois / J. Leray // *J. Math. Pures et Appl.*, 13, 1934, p. 331-418.
155. Leray J. Essai sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace / J. Leray // *Acta Math.*, 63, 1934, p. 193-248.
156. Agmon S., Douglis A., Nirenberg L. Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions / S. Agmon, A. Douglis, - L. Nirenberg // *I. Comm. Pure Appl. Math.*, 12, 1959, p. 623-727.
157. Cuvelier. Thesis / Cuvelier. – University of Delft, 1976.
158. Hopf E. Uber die Anfangswertaufgabe fiir die hydrodynamischen Grundgleichungen / E. Hopf // *Math. Nachr.*, 4 (1951), p. 213-231.
159. Hopf E. On nonlinear partial differential equations, Lecture Series of the Symposium on Partial Differential Equations / E. Hopf // Berkeley, 1955, Ed. The Univ. of „Kansas (1957), p. 1-29.
160. Эскуриаза Л.  $L^{3,\infty}$ -решения уравнений Навье-Стокса и единственность для обратной задачи / Л. Эскуриаза, Г. Серегин, В. Шверак // *УМН.* – 2003. Т.58, №2, С.3-44.
161. Serrin J. The initial value problem for the Navier-Stokes equations. // *Nonlinear problems* / J. Serrin. – ed R E Langer. Madison Univ of Wisconsin Press, – 1963, p.69-98.

162. Cattabriga L. Su un problema al controllo relativo al sistema di equazioni di Stokes / L. Cattabriga // *Rend Sem Mat Univ Padova*, – 1961, v.31, p.308-340
163. Necas J. Equations aux derivees partielles / J. Necas. – Presses de l'Universite de Montreal, 1965.
164. Солонников В. А. О краевой задаче для стационарной системы уравнений Нав'є-Стокса / В. А. Солонников, В. Е. Скадилев.– Труды МИАН им. Стеклова, 1973, 125, с. 196-210.
165. Ворович И. И. Стационарные течения вязкой несжимаемой жидкости / И. И. Ворович, В. И. Юдович. – Матем. сб., 1961, т.53, с 393-428.
166. Rabinowitz P. H. Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations (I) and (II) / P. H. Rabinowitz // *Comm. Pure Appl. Math.*, 20, 1967, p. 145-205.
167. Velte W. Stabilitatsverhalten und Verzweigung Stationarer Losungen der Navier -Stokesschen Gleichungen / W. Velte // *Arch. Rational Mech. Anal.*, 16, 1964, p. 97-125.
168. Agrachev A. A. On controllability of the Navier-Stokes equations by low modes forcing / A. A. Agrachev, A. V. Sarychev // *Inter. Confer. "Kolmogorov and Contemporary Mathematics"*, M., Fac. Mech. And Math., MSU, 2003, p.723.
169. Fursikov A. V. О exact boundary zero-contrallability of two-dimensional Navier-Stoke equations / A. V. Fursikov, O. Yu.Immanuilov // *Acta Applicande Mathematicae*. – 1994, v. 37, p. 67-76.
170. Ключин Д. А. Ідентифікація точкових джерел для параболічних задач з сингулярною правою частиною / Д. А. Ключин, К. В. Шевченко // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2004. – вип. 2. – С. 62-70.
171. Ключин Д. А. Ідентифікація точкових джерел для параболічних задач з сингулярною правою частиною / Д. А. Ключин, К. В. Шевченко // *Журнал обчислювальної та прикладної математики*. – 2004. – вип. 2. – С. 62-70.

172. Шевченко К. В. Слабкий розв'язок параболічних систем з сингулярними правими частинами / К. В. Шевченко // Вісник Київського університету. – Сер. фіз.-мат. науки. 2004. Вип. 4.
173. Патанкар С. В. Численное решение задач теплопроводности и конвективного теплообмена при течении в каналах МЭИ / С. В. Патанкар. – 2003. – 313 с.
174. Юнаковский А. Д. Моделирование нелинейного уравнения Шредингера / А. Д. Юнаковский. – ИПФ РАН. – 1995. –159 с.
175. Романов В. Г. Обратные задачи математической физики / В. Г. Романов. – М.:Наука. – 1984. – 261 с.
176. Денисов А. М. Введение в теорию обратных задач / А. М. Денисов. – М.:Изд-во МГУ. –1994. – 207 с.
177. Ватульян А. О. Математические модели и обратные задачи / А. О. Ватульян // Соросовский образовательный журнал. – №11. – 1998. – с.143-148.
178. Куржанский А. Б. Управление и наблюдение в условиях неопределенности / А. Б. Куржанский. – М., Наука. – 1977.
179. Куржанский А. Б. Метод гарантированных оценок и задачи регуляризации для эволюционных систем / А. Б. Куржанский, И. Ф. Сивергина // ЖВМ и МФ. 1992. Т.32, № 11. С. 1720-1733.
180. Сизиков В. С. Устойчивые методы обработки результатов измерений / В. С. Сизиков. – Учебное пособие. СПб.: “Спецлит”, 1999. – 240с.
181. Дьяконов В. Matlab. Анализ, идентификация и моделирование систем / В. Дьяконов, В. Круглов. – Специальный справочник. СПб.: “Питер”, 2002. – 448 с.
182. Ronald E. Mickens. Mathematical methods for the natural and engineering sciences / Mickens Ronald E. – World Scientific. –2004, –538s.
183. Грищенко О. Ю. Ідентифікація точкових структурованих за віком джерел забруднень з використанням двокрокового симетризованого алгоритму / О. Ю. Грищенко, Д. А. Ключин, В. В. Оноцький,

- Г. М. Стешенко // Журнал обчислювальної та прикладної математики. – 2011. – вип. 1(104). – С. 40-48.
184. Подлипенко Ю. К. Об оценивании функционалов от решения линеаризованной задачи Навье-Стокса по неполным данным / Ю. К. Подлипенко, В. Н. Головач // Доповіді НАН України. – вип. 2. – 2007. – С. 43-47.
185. Оноцький В. В. Ідентифікація координат та інтенсивностей точкових джерел забруднень / В. В. Оноцький // Тези конференції "Обчислювальна та прикладна математика". – 2004. – С. 118.
186. Грищенко О. Ю. Оптимальне зосереджене керування для лінеаризованої системи рівнянь Нав'є-Стокса / О. Ю. Грищенко, В. В. Оноцький // Праці міжнародного симпозіуму "Питання оптимізації обчислень ПОО-XXXV". – Том 1. – С. 170-174.
187. Потапенко Л. І. Математичне моделювання процесу рельєфоутворення в термопластичних середовищах [Текст] : дис. ... канд. техн. наук : 01.05.02 / Потапенко Леонід Іванович ; Київ. нац. ун-т ім. Тараса Шевченка. – К., 2011. – 130 С.